

УДК 621.341.572

**И.В. Белоусов, В.Ф. Самосейко**Государственный университет морского и речного флота  
им. адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Россия

## ОПТИМАЛЬНАЯ ДВУХФАЗНАЯ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Рассмотрен аналитический подход к оптимальной широтно-импульсной модуляции. При этом широтно-импульсная модуляция в работе понимается как процесс аппроксимации импульсами (модулированного) напряжения желаемого, гладкого (модулирующего) напряжения, которое необходимо для формирования тока нагрузки. Под ошибкой модуляции по току понимается разность между током, порождаемым модулированной функцией напряжения, и током, порождаемым модулирующей функцией напряжения. Мера качества модуляции трактуется как числовая интегральная характеристика квадратичной ошибки модуляции (дисперсии) на некотором временном интервале. Под двухфазной модуляцией понимается модуляция двумя полумостоми. Для мостовой электронно-ключевой схемы получено выражение дисперсии тока в нагрузке. Синтезированы формулы для коммутационных функций полумостов. Показано, что алгоритм двухфазной широтно-импульсной модуляции имеет три свободных переменных, по которым может производиться поиск минимума дисперсии тока в нагрузке, которая является фильтром низкой частоты. Введено понятие нулевой потенциальной функции как свободной переменной, по которой ведется оптимизация. Найдено ее выражение, которому соответствует минимум дисперсии тока при двухфазной модуляции. Получены формулы для определения параметров, характеризующих положение импульсов потенциалов полумостов на интервале широтно-импульсной модуляции. Показано, что оптимальное расположение импульсов на периоде широтно-импульсной модуляции позволяет существенно снизить дисперсию тока при относительной частоте модуляции, меньшей 40. При относительной частоте модуляции, большей 40, оптимальной становится модуляция с центрально-симметричным положением импульсов на интервале модуляции. Описанный в работе подход к двухфазной оптимальной широтно-импульсной модуляции может быть обобщен на многофазную широтно-импульсную модуляцию.

**Ключевые слова:** широтно-импульсная модуляция, двухфазная, качество модуляции, дисперсия тока, оптимизация.

**I.V. Belousov, V.F. Samoseiko**Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,  
Saint Petersburg, Russian Federation

## OPTIMAL TWO-PHASE PULSE-WIDTH MODULATION

An analytical approach to optimal pulse-width modulation is considered. In this case, the pulse width modulation means the process of approximation of the pulses (modulated) of the required voltage, the smooth (modulating) voltage, which is necessary for the formation of the load current. Current modulation error refers to the difference between the current generated by the modulated voltage func-

tion and the current generated by the modulating voltage function. The modulation quality index is interpreted as a numerical integral characteristic of a quadratic modulation (dispersion) error at a certain time interval. Two-phase modulation is a two-half-bridge modulation. For two-phase pulse-width modulation the expression of current dispersion to the load is obtained. A synthesized formula for half-bridge switching functions. It is shown that the two-phase pulse-width modulation algorithm has three free variables, which can be used to find the minimum current dispersion in the load, which is a low-frequency filter. The concept of zero potential function as a free variable, which is optimized, is introduced. We found its expression, which corresponds to the minimum current dispersion in two-phase modulation. Formulas for determining the parameters characterizing the position of pulses of half-bridge potentials at the pulse-width modulation interval are obtained. It is shown that the optimal location of the pulses on the pulse-width modulation period can significantly reduce the current dispersion at a relative modulation frequency of less than 40. When the relative modulation frequency exceeds 40 becomes the optimal modulation with the Central symmetrical position of the pulse interval modulation. The described approach to the two-phase optimal pulse width modulation can be generalized to multi-phase pulse width modulation.

**Keywords:** pulse-width modulation, two-phase modulation, modulation quality, current dispersion, optimization.

**Введение.** Управление потоками электрической энергии с развитием силовой электроники посредством широтно-импульсной модуляции (ШИМ) нашло широкое применение в различных областях техники и, в частности, для управления электродвигателями. Качество ШИМ существенно зависит от частоты следования импульсов. Однако увеличение частоты модуляции ведет к возрастанию динамических потерь в электронных ключах. Большие частоты модуляции применяются в электрических преобразователях меньшей мощности. Мощности преобразователей электрической энергии, реализуемых на полностью управляемых электронных ключах, неуклонно растут. Так мощность единичных преобразователей частоты, используемых в системах электродвижения судов, в настоящее время достигает 5 МВт и более. Повышение качества модуляции напряжения на нагрузке ведет к снижению потерь мощности и уменьшению виброшумовых характеристик электроприводов. Поэтому повышение качества модуляции является актуальной задачей.

Проблеме качества ШИМ с момента начала ее использования в силовой преобразовательной технике уделялось огромное внимание [1–9]. Разработаны различные методы ШИМ [2–4]. Наиболее известными методами ШИМ являются классический, модифицированный классический и векторный [3]. Сравнению методов ШИМ посвящено большое количество работ [10–17], которые основаны на компьютерном моделировании. Ввиду импульсного характера функций моделирование требует существенных затрат машинного времени. Получить окончательный вывод, какой метод лучше, путем компьютерного моделирования невозможно.

Аналитический подход к исследованию ШИМ продвигается в работах авторов [16–18], в которых используется спектральный подход к оценке качества модуляции напряжения. Имеются работы, в которых сделаны шаги в направлении синтеза оптимальной ШИМ по критериям коэффициента гармоник напряжения [5–7, 19, 20].

В данной работе решается задача аналитического синтеза алгоритма оптимальной двухфазной модуляции, основанного на критерии локальной дисперсии тока нагрузки, вычисляемого на периоде ШИМ. Основным элементом преобразовательной техники полумост, состоящий из двух последовательно соединенных ключей. Под двухфазной модуляцией понимается модуляция двумя полумостами  $A$  и  $B$ , образующих электронно-ключевой мост (рис. 1).

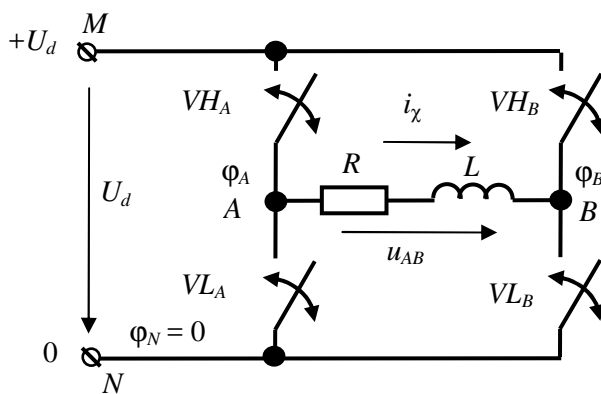


Рис. 1. Электронно-ключевая схема двухфазной модуляции

Питание двухфазной электронно-ключевой цепи осуществляется от источника постоянного напряжения  $U_d$ . Ключи полумостов, подключенные своими выводами к положительному потенциалу источника напряжения, называются верхними  $VH_A$  и  $VH_B$ , а ключи, подключенные выводами, соединенными с отрицательным потенциалом источника напряжения, называются нижними  $VL_A$  и  $VL_B$ . Общий потенциал нижних ключей и источника питания принимается равным нулю. Общий потенциал верхних ключей и источника питания принимается равным напряжению источника питания  $U_d$ . Нагрузка представляет собой  $L,R$ -фильтр низкой частоты.

**Термины и определения.** Под ШИМ в данной работе понимается процесс аппроксимации импульсами напряжения желаемого гладкого напряжения, которое необходимо для формирования тока нагрузки. Импульсная функция – периодическая булева функция, принимающая значение 0 или 1. Модулированная функция – импульсная функция, которая получается в процессе модуляции. Модулирующая функция – гладкая непрерывная функция, к которой должна быть приближена импульсная функция в процессе модуляции. Ошибка модуляции по току – разность между токами, порождаемыми модулированной и модулирующей функциями напряжений. Локальная дисперсия тока – среднее значение квадрата ошибки модуляции на периоде импульсной функции. Оптимальная ШИМ – это ШИМ, позволяющая получить минимум локальной дисперсии тока.

Под модулированной функцией напряжения понимается отношение модулированного напряжения к напряжению источника питания  $U_d$ . Под модулирующей функцией напряжения понимается отношение модулирующего напряжения к напряжению источника питания  $U_d$ . Коммутационная функция полумоста – импульсная функция, 1 которой соответствует включенному состоянию верхнего ключа, 0 – выключенному. Под потенциалом полумоста  $X = A, B$  понимается потенциал его средней точки. Отношение модулированных потенциалов мостов к напряжению источника питания – модулированная функция потенциалов полумостов. Отношение модулирующих потенциалов мостов к напряжению источника питания – модулированная функция потенциалов полумостов. Базовое значение тока –  $I_0 = U_d/R$ . Относительный ток – отношение тока к базовому значению. Относительный ток помечается верхним индексом \*.

**Управление полумостами** осуществляется так, что включен либо верхний, либо нижний ключ. Для описания управления полумостом  $X = A, B$  необходимо задать коммутационную функцию  $\chi_X$ , графическое представление которой приведено на рис. 2.

Формальная запись коммутационных функций полумостов  $X = A, B$ :

$$\begin{aligned} \chi_X &= 1(\alpha_X + \gamma_X - \varphi) \cdot 1(\varphi - \alpha_X) = \\ &= 1\left(\frac{1 + \gamma_X}{2} + \Delta\alpha_X - \varphi\right) \cdot 1\left(\varphi - \frac{1 - \gamma_X}{2} - \Delta\alpha_X\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $1(x)$  – единичная функция аргумента  $x$ ;  $\varphi$  – пилообразная функция относительного времени  $\tau = t/T_0$ ,  $\varphi = \tau - \text{floor}(\tau)$ ;  $\text{floor}(\tau)$  – дробная

часть числа  $\tau$ ;  $T_0$  – период модуляции;  $\alpha_X$  – относительное время от начала интервала ШИМ до момента включения верхних ключей полумостов  $X$ ;  $\Delta\alpha_X$  – коэффициент смещения импульса относительно центра интервала широтно-импульсной модуляции;  $\gamma_X$  – скважность коммутационной функции полумоста  $X$ . Значению  $\chi_X = 1$  соответствует включенное состояние верхнего ключа полумоста  $X$ , а значению  $\chi_X = 0$  – включенное состояние нижнего ключа.

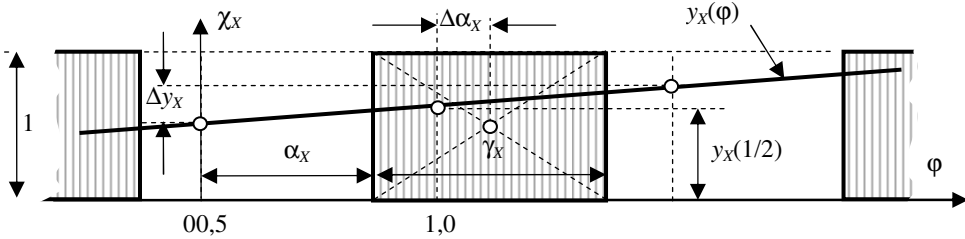


Рис. 2. График периодической импульсной функции со сдвигом импульса относительно начала интервала модуляции вправо

Из рис. 2 следует, что переменные  $\alpha_X$ , характеризующие положение импульсов  $\chi_X$  на интервале модуляции, можно записать в следующем виде:

$$\alpha_X = \frac{1 - \gamma_X}{2} - \Delta\alpha_X.$$

Четыре параметра коммутационных функции  $\alpha_X$ ,  $\gamma_X$ , ( $X = A, B$ ) определяют положение импульсов управления на интервале ШИМ, далее рассматриваются как управляющие переменные, позволяющие сформировать потенциалы узлов  $A$  и  $B$  (см. рис. 1). Число полумостов играет важную роль в обеспечении качества модуляции. Каждый полумост имеет две степени свободы в формировании импульсов напряжения. Два полумоста имеют четыре степени свободы. В мостовой схеме (см. рис. 1) необходимо сформировать заданное напряжение между средними точками полумостов. Это уменьшает число степеней свободы до трех. Поэтому далее рассматривается алгоритм оптимальной ШИМ моста по критерию дисперсии тока в нагрузке, использующий три степени свободы. Ток в нагрузке формируется методом ШИМ потенциалов средних точек полумостов  $A$  и  $B$ . Желаемый ток нагрузки формируется модулирующим напряжением на нагрузке.

**Связь скважности импульсной функции с модулирующей функцией потенциала полумоста.** Модулированный потенциал узла  $X = A, B$  электронно-ключевой цепи, изображенной на рис. 1, обозначим как  $\varphi_X = \chi_X \cdot U_d$ . Тогда модулирующая функция потенциала узла  $X = A, B$  будет являться коммутационной функцией полумоста. Пусть модулирующий (желаемый) потенциал полумоста  $G_X(\varphi)$ . Тогда модулирующая функция потенциала полумоста:

$$g_X(\varphi) = \frac{G_X(\varphi)}{U_d}.$$

Положим, что модулирующая функция потенциала полумоста является гладкой функцией времени. Тогда ее можно представить двумя первыми слагаемыми ряда Тейлора:

$$g_X(\varphi) \approx g_X(1/2) + \Delta g_X(\varphi - 1/2),$$

где  $g_X(1/2)$  – значение модулирующей функции потенциала полумоста  $X$  в середине интервала модуляции при  $\varphi = 1/2$ ;  $\Delta g_X = g_X'(1/2)$  – приращение модулирующей функции линейного напряжения на периоде широтно-импульсной модуляции;  $g_X'(1/2)$  – производная модулирующей функции потенциала полумоста по относительному времени  $\varphi$  в середине интервала при  $\varphi = 1/2$ . Принцип ШИМ заключается в поддержании равенства нулю среднего значения ошибки модуляции на периоде ШИМ:

$$\int_0^1 (\chi_X - g_X(\varphi)) d\varphi = 0.$$

Из данного равенства следует, что  $\gamma_X = g_X(1/2)$ . Если модулирующая функция зависит от относительного времени  $\tau$ , то полагается, что  $\gamma_X = g_X(\tau)$ , где значение  $\tau$  берется в середине интервала модуляции.

**Ток нагрузки, порождаемый модулирующей функцией напряжения.** Пусть модулирующее (желаемое) напряжение на нагрузке  $G_{AB}(\varphi)$  задано, как функция относительного времени  $\varphi \in [0, 1]$ . Модулирующая функция линейного напряжения на нагрузке

$$g_{AB}(\varphi) = \frac{G_{AB}(\varphi)}{U_d} = g_A(\varphi) - g_B(\varphi) = \gamma_A - \gamma_B, \quad (2)$$

где  $\gamma_A, \gamma_B$  – скважности импульсов полумостов. Положим, что модулирующая функция линейного напряжения  $g_{AB}(\varphi)$  является гладкой

функцией времени. Тогда ее можно представить в виде двумя первыми слагаемыми ряда Тейлора:

$$g_{AB}(\varphi) = g_{AB}(1/2) + \Delta g_{AB}(\varphi - 1/2),$$

где  $g_{AB}$  – значение модулирующей функции линейного напряжения в середине интервала модуляции при  $\tau = 1/2$ ,  $g_{AB} = g_{AB}(1/2)$ ;  $\Delta g_{AB}$  – приращение модулирующей функции линейного напряжения на периоде широтно-импульсной модуляции,  $\Delta g_{AB} = g_{AB}'(1/2)$ ;  $g_{AB}'(1/2)$  – производная модулирующей функции линейного напряжения по относительно-му времени  $\varphi$  в середине интервала при  $\varphi = 1/2$ .

Дифференциальное уравнение, определяющее динамическое поведение относительного значения тока  $j(\varphi)$ , порождаемого функцией линейного модулирующего напряжения (2), можно представить в следующем виде:

$$g_{AB}(\varphi) = j(\varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dj(\varphi)}{d\varphi},$$

где  $\varepsilon$  – отношение периода ШИМ  $T_0$  к постоянной времени нагрузки  $T = L/R$ ,  $\varepsilon = T_0/T$ ;  $\varphi$  – относительное время,  $\varphi \in [0,1]$ . Для нахождения решения данного уравнения необходимо задать начальное значение тока  $j(0)$ . Функция  $j(\varphi)$  необходима для нахождения локальной дисперсии тока, величина которой не зависит от  $j(0)$ . Поэтому будем полагать, что  $j(0) = 0$ . Решение данного уравнения при  $j(0) = 0$  примет вид:

$$j(\varphi) = \left( \Delta g_{AB} \cdot \varphi + \left( g_{AB} - \Delta g_{AB} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right) (1 - e^{-\varepsilon\varphi}). \quad (3)$$

**Ток нагрузки, порождаемый модулированной функцией напряжения.** Модулированные потенциалы узлов  $A$  и  $B$  схемы определяются очевидными выражениями:

$$\varphi_A = \chi_A \cdot U_d; \quad \varphi_B = \chi_B \cdot U_d.$$

Модулированное линейное напряжение между двумя средними точками полумостов  $A$  и  $B$ :

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = (\chi_A - \chi_B) U_d = \chi_{AB} \cdot U_d, \quad (4)$$

где  $\chi_{AB}$  – модулированная функция напряжения между узлами  $A$  и  $B$ ,  $\chi_{AB} = \chi_A(\alpha_A, \gamma_A) - \chi_B(\alpha_B, \gamma_B)$ .

Тогда относительное значение тока  $i(\varphi)$ , порождаемого модулированной функцией напряжения при  $\gamma_A > \gamma_B$ ,

$$\chi_{AB} = \chi_A - \chi_B,$$

при  $\gamma_A > \gamma_B$  будет являться решением дифференциального уравнения:

$$\chi_{AB} = i(\varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{di(\varphi)}{d\tau}.$$

Для нахождения решения данного уравнения необходимо задать начальное значение тока  $i(0)$ . Функция  $i(\varphi)$  необходима для нахождения локальной дисперсии тока, величина которой не зависит от  $i(0)$ . Поэтому будем полагать, что  $i(0) = 0$ . Решение данного уравнения при  $i(0) = 0$  может быть представлено в виде составной функции:

$$i_{\chi}^*(\varphi) = e^{-\varepsilon\varphi} \cdot \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \varphi < \alpha_A; \\ (e^{\varepsilon\varphi} - e^{\varepsilon\alpha_A}) & \text{при } \alpha_A < \varphi < \alpha_B; \\ (e^{\varepsilon\alpha_B} - e^{\varepsilon\alpha_A}) & \text{при } \alpha_B < \varphi < \alpha_B + \gamma_B; \\ (e^{\varepsilon\varphi} - e^{\varepsilon(\gamma_B + \alpha_B)} + e^{\varepsilon\alpha_B} - e^{\varepsilon\alpha_A}) & \text{при } \alpha_B + \gamma_B < \varphi < \alpha_A + \gamma_A; \\ (e^{\varepsilon(\gamma_A + \alpha_A)} - e^{\varepsilon(\gamma_B + \alpha_B)} + e^{\varepsilon\alpha_B} - e^{\varepsilon\alpha_A}) & \text{при } \alpha_A + \gamma_A < \varphi < 1. \end{cases} \quad (5)$$

**Локальная дисперсия тока нагрузки.** Графики токов, порождаемых модулирующей функцией  $g_{AB}(\varphi)$  и модулированной функцией  $\chi_{AB}$ , представлены на рис. 3.

Для оптимизации алгоритма ШИМ необходимо найти выражение локальной дисперсии тока в нагрузке между двумя полумостами на интервале широтно-импульсной модуляции:

$$D_{AB} = \int_0^1 (i(\varphi) - j(\varphi))^2 d\varphi, \quad (6)$$

Если в выражение дисперсии тока в нагрузке (6) подставить токи, определенные выражениями (3) и (5), и выполнить интегрирование, то получим дисперсию токов как функцию управляющих переменных  $\gamma_X$ ,  $\Delta\alpha_X$  и параметра  $\varepsilon$ , характеризующего фильтрующие свойства нагрузки. Выражение локальной дисперсии имеет достаточно громоздкий вид, поэтому здесь не приводится. Заметим, что параметр  $\varepsilon$  достаточно мал. Поэтому дисперсия тока (6) может быть представлена в следующем виде:

$$D_{XY} = D(g_X, \Delta g_X, \Delta\alpha_X, g_0) = \varepsilon^2 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D(g_X, \Delta g_X, \Delta\alpha_X, g_0, \varepsilon)}{\varepsilon^2}. \quad (7)$$



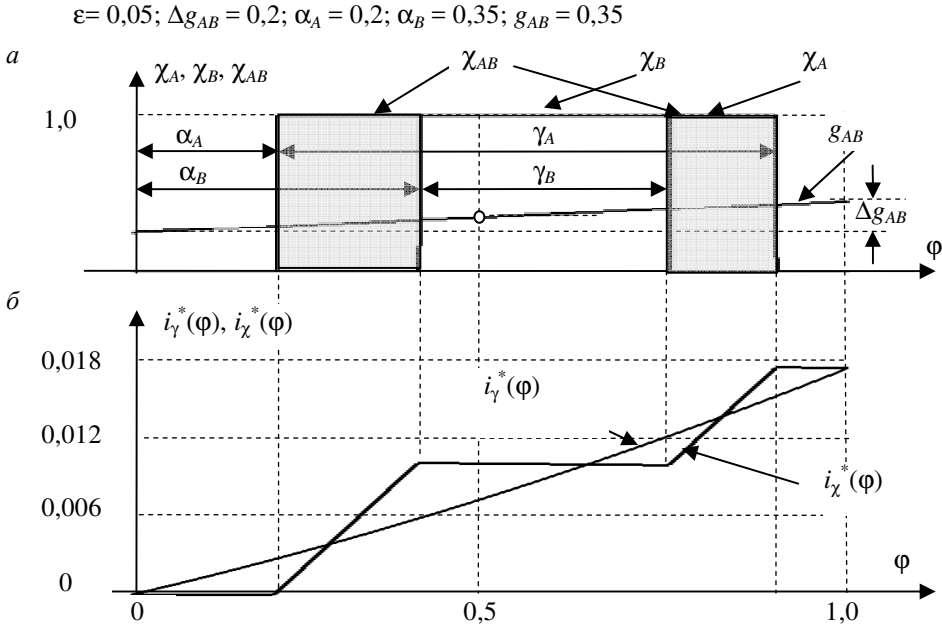


Рис. 3. Графики: а – коммутационных функций  $\chi_A, \chi_B$ ; б – токов, порождаемых модулирующими функциями  $g_{AB}$  и модулированной функцией  $\chi_{AB}$

Данному представлению дисперсии тока соответствует разложение в ряд Маклорена с погрешностью до значений  $O(\Delta\alpha_A^3)$  и  $O(\Delta\alpha_B^3)$ :

$$D_{AB} \approx \varepsilon^2 \left( \begin{aligned} & \frac{g_{AB}^2}{12} \cdot \left( (1 - \gamma_A)^2 + \gamma_B \cdot (\gamma_A + \gamma_B - 1) \right) + 2 \cdot \Delta\alpha_A \cdot \Delta\alpha_B \cdot \gamma_B + \\ & + \Delta\alpha_A^2 \cdot (\gamma_A \cdot g_{AB} + \gamma_B) + \Delta\alpha_B^2 \cdot \gamma_B \cdot (1 - g_{AB}) + \\ & + \frac{\Delta g_{AB}^2}{120} + \frac{\Delta g_{AB}}{12} \cdot (\Delta\alpha_A \cdot \gamma_A \cdot (\gamma_A - 3) + \Delta\alpha_B \cdot \gamma_B \cdot (\gamma_B - 3)) \end{aligned} \right), \quad (8)$$

где  $g_A > g_B$ ;  $g_{AB} = g_A - g_B$ . Погрешность формулы (8) при  $\varepsilon < 1$  не превышает 3%. Представление локальной дисперсии межфазного тока в виде (8) позволяет упростить связь фильтрующих свойств нагрузки (параметр  $\varepsilon$ ) и параметров, определяющих управление ШИМ:  $g_{AB}, \gamma_A, \Delta g_{AB}, \Delta\alpha_A, \Delta\alpha_B$ . Это обстоятельство существенно упрощает синтез оптимального управления.

Заметим, что модулирующая функция напряжения  $g_{AB}$  связана с модулирующими функциями потенциалов полумостов соотношением:

$$g_{AB} = g_A - g_B = \gamma_A - \gamma_B,$$

где  $g_A, g_B$  – некоторые фазные модулирующие функции, удовлетворяющие соотношению:

$$g_A + g_B = 0.$$

Тогда из соотношений (2) следует:

$$g_A = \frac{g_{AB}}{2}; \quad g_B = -\frac{g_{AB}}{2}. \quad (9)$$

Модулирующие функции потенциалов ключей полумостов запишем в следующем виде:

$$\gamma_A = g_0 + g_A; \quad \gamma_B = g_0 + g_B, \quad (10)$$

где  $g_0$  – нулевая потенциальная функция, являющаяся свободной переменной. Переменная  $\gamma_0 = 1/2 - g_0$  – функция предмодуляции.

Из выражений для токов (3) и (5) следует, что дисперсия тока (6) не зависит от переменных  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$ , и функция предмодуляции  $\gamma_0$  может быть принята равной нулю, а модулирующие функции потенциалов полумостов:

$$\gamma_A = (1 + g_{AB})/2; \quad \gamma_B = (1 - g_{AB})/2, \quad (11)$$

Будем полагать, что

$$\Delta\alpha_A + \Delta\alpha_B = 0 \text{ и } \Delta\alpha_A - \Delta\alpha_B = \Delta\alpha_{AB}.$$

Тогда коэффициенты смещения импульсов полумостов:

$$\Delta\alpha_A = \frac{\alpha_{AB}}{2}; \quad \Delta\alpha_B = -\frac{\alpha_{AB}}{2}.$$

Из приведенных соотношений следует, что локальная дисперсия относительного тока (8) будет функцией переменных  $g_{AB}, \Delta g_{AB}, \Delta\alpha_{AB}$ :

$$D_{AB} = D(g_{AB}, \Delta g_{AB}, \Delta\alpha_{AB}) = \varepsilon^2 \left[ \frac{(1 - g_{AB})^2 g_{AB}^2}{48} + \frac{\Delta\alpha_{AB}^2 (1 + (1 - g_{AB})^2)}{4} - \frac{\Delta\alpha_{AB} \cdot \Delta g_{AB} (11 - 3g_{AB}^2 - 4\Delta\alpha_{AB}^2)}{96} + \frac{\Delta g_{AB}^2}{120} \right]. \quad (12)$$

Графический вид зависимости дисперсии тока в нагрузке от переменной  $\Delta\alpha_{AB}$ , характеризующей положение импульсов на периоде ШИМ, приведен на рис. 4. Из вида функции (12) следует, что экстремальные точки дисперсии тока, определенной формулой (12), не будут зависеть от параметров выходного фильтра моста.

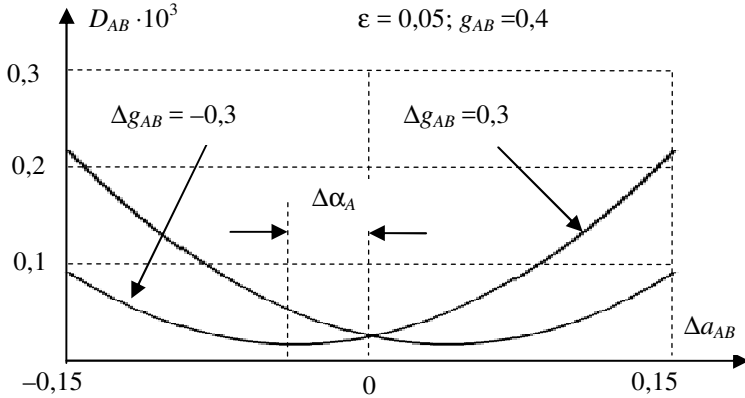


Рис. 4. Графики зависимости дисперсии тока в нагрузке от переменных, характеризующих положение импульса на периоде широтно-импульсной модуляции

**Алгоритм оптимальной двухфазной модуляции.** Выражение дисперсии тока (12) используется в качестве критерия для формирования оптимального алгоритма ШИМ по параметру  $\Delta\alpha_{AB}$ . Минимум дисперсии тока (12) по переменной  $\Delta\alpha_{AB}$  достигается при

$$\Delta\alpha_A = -\Delta\alpha_B = \frac{\Delta\alpha_{AB}}{2} = \sqrt{\frac{33 - 9g_{AB}}{144} + \left(\frac{1 + (1 - g_{AB})^2}{\Delta g_{AB}}\right)^2} - \frac{1 + (1 - g_{AB})^2}{\Delta g_{AB}}.$$

Приближенное выражение для определения оптимального коэффициента смещения импульсов модулированного напряжения можно найти по формуле:

$$\Delta\alpha_{AB} = \Delta\alpha'_{AB} \approx \frac{(11 - 3g_{AB}) \cdot \Delta g_{AB}}{48(1 + (1 - g_{AB})^2)} \approx \frac{11 + 13g_{AB} - 8g_{AB}^3}{96} \cdot \Delta g_{AB}. \quad (13)$$

Погрешность данной формулы при  $\Delta g_{AB} < 0,48$  не превышает 1 %. Коэффициенты смещения импульсов полумостов имеют вид:

$$\Delta\alpha_A = \Delta\alpha'_A = \frac{\Delta\alpha'_{AB}}{2}; \quad \Delta\alpha_B = \Delta\alpha'_B = -\frac{\Delta\alpha'_{AB}}{2}. \quad (14)$$

Наиболее распространенный алгоритм формирования ШИМ использует центрально-симметричное расположение импульсов на интервале модуляции, что соответствует  $\Delta\alpha_{AB} = 0$ . В этом случае дисперсия тока в нагрузке определяется выражением:

$$D(g_{AB}, \Delta g_{AB}, 0) = \varepsilon^2 \left( \frac{(1 - g_{AB})^2 g_{AB}^2}{48} + \frac{\Delta g_{AB}^2}{120} \right). \quad (15)$$

Если частота модуляции  $f \rightarrow \infty$ , то  $\Delta g_{AB} = 0$  и тогда дисперсия тока в нагрузке

$$D(g_{AB}, 0, 0) = \varepsilon^2 \left( \frac{(1 - g_{AB})^2 g_{AB}^2}{48} \right). \quad (16)$$

**Эффективность оптимизации ШИМ** путем смещения импульсов оценим для наиболее распространенного случая – синусоидальной модуляции напряжения на нагрузке. Будем полагать, что модулирующая функция линейного напряжения

$$g_{AB} = a \cdot \sin \left( \frac{2\pi \cdot \tau}{f^*} \right), \quad (17)$$

где  $a$  – амплитуда модулирующей функции,  $a \in [0, 1]$ ;  $f^*$  – относительная частота ШИМ,  $f^* = T_1/T_0$ ;  $T_1$  – период модулирующей функции;  $T_0$  – период ШИМ. Тогда приращение модулирующей функции линейного напряжения на интервале ШИМ

$$\Delta g_{AB} = \frac{\partial g_{AB}}{\partial \tau} = \frac{2\pi \cdot a}{f^*} \cdot \sin \left( \frac{2\pi \cdot \tau}{f^*} \right).$$

Определим среднее значение дисперсии тока (12) на периоде модулирующей функции:

$$ED_{AB}(a, f^*, \Delta\alpha_{AB}) = \frac{4}{f^*} \cdot \int_0^{f^*/4} D(g_{AB}, \Delta g_{AB}, \Delta\alpha_{AB}) \cdot d\tau. \quad (18)$$

Среднюю дисперсию токов в нагрузке при центрально-симметричном расположении импульсов на интервале модуляции будем использовать в качестве базового значения:

$$ED_{AB}(a, f^*, 0) = \frac{a^2 \cdot \varepsilon^2}{96} \cdot \left( 1 - \frac{16a}{3\pi} + \frac{3a^2}{4} + \frac{8\pi^2}{5f^{*2}} \right).$$

Эффективность оптимизации дисперсии тока с учетом приращения моделирующей функции можно оценить отношением средних дисперсий токов в нагрузке:

$$Z = \frac{ED_{AB}(a, f^*, \Delta\alpha'_{AB})}{ED_{AB}(a, f^*, 0)},$$

где  $\Delta\alpha'_{AB}$  – коэффициенты смещения импульсов относительно центра интервала модуляции, определенные формулой (13),  $\Delta\alpha'_{AB} = 2 \cdot \Delta\alpha_A = -2 \cdot \Delta\alpha_B$ ;

$f^*$  – относительная частота ШИМ. Отношение  $Z$  показывает в относительных единицах, как повлияет на дисперсию тока учет приращения моделирующей функции  $\Delta g_{AB}$  на периоде широтно-импульсной модуляции. Графики, показывающие, во сколько раз уменьшится интегральная дисперсия тока, если учитывать приращения моделирующей функции на периоде ШИМ при различных амплитудах модулирующего напряжения, приведены на рис. 5.

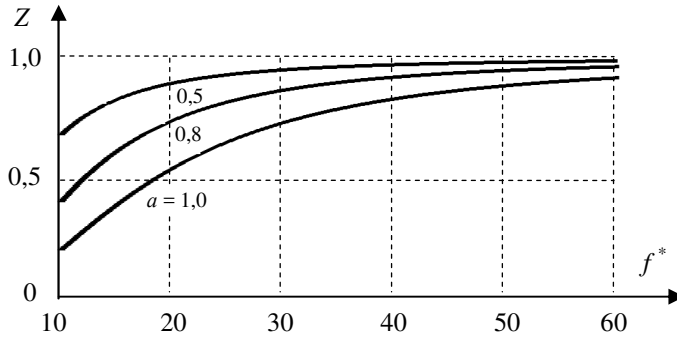


Рис. 5. Графики, показывающие во сколько раз уменьшится интегральная дисперсия тока, если учитывать приращения моделирующей функции на периоде широтно-импульсной модуляции при различных амплитудах модулирующего напряжения

Из данных графиков следует, что наиболее эффективен учет приращения моделирующей функции на периоде ШИМ при малой частоте модуляции и при большой амплитуде моделирующей функции. Для расчета коэффициента смещения импульсов  $\Delta\alpha_{AB}$  может быть использована простая формула:

$$\Delta\alpha_{AB} = \Delta\alpha''_{AB} \approx \frac{11}{96} \cdot \Delta g_{AB}. \quad (19)$$

Коэффициенты смещения импульсов полумостов:

$$\Delta\alpha_A = \Delta\alpha''_A \approx \frac{11}{192} \cdot \Delta g_A; \quad \Delta\alpha_B = \Delta\alpha''_B \approx \frac{11}{192} \cdot \Delta g_B. \quad (20)$$

Можно показать, что при использовании алгоритма модуляции с коэффициентом смещения импульсов на величину, определенную выражением (13), среднее значение локальной дисперсии тока (21) на полупериоде синусоидальной модулирующей функции  $g_{AB}$  определяется как

$$ED_{AB}(a, f^*, \Delta\alpha'_{AB}) \approx \frac{a^2 \cdot \varepsilon^2}{96} \left( 1 - \frac{16a}{3\pi} + \frac{3a^2}{4} + \frac{1-a^2}{f^{*2}} \right). \quad (21)$$

Погрешность данной формулы при  $f^* > 10$  не превышает 2,5 %.

**Выводы.** Из результатов исследований двухфазной мостовой схемы следует, что при относительной частоте модуляции  $f^* < 40$  учет приращения моделирующей функции на периоде ШИМ приводит к существенному уменьшению дисперсии тока в нагрузке. При  $f^* > 40$  оптимизация по критерию дисперсии тока в нагрузке становится неэффективной. В этом случае оптимальный алгоритм ШИМ становится близким к центрально-симметричной ШИМ. Двухфазная ШИМ является базовым элементом для определения дисперсии тока в нагрузке, порождаемого многофазной ШИМ. Используя подход, сформулированный в данной статье, можно получить аналогичный алгоритм оптимальной ШИМ для многофазных мостов по критерию дисперсии тока. При этом нулевая потенциальная функция полумостов будет отличной от нуля. При этом формальное описание оптимального алгоритма ШИМ будет проще наиболее распространенной векторной ШИМ, а дисперсия порождаемого им тока – меньше.

### Библиографический список

1. Зиновьев Г.С. Основы силовой электроники: учеб. пособие. – М.: Юрайт, 2012. – 667 с.
2. Holtz J. Pulsewidth modulation for electronic power conversion // Proc. IEEE. – 1994. – Vol. 82. – № 8. – P. 1194–1214.
3. Holmes D.G., Lipo T.A. Pulse width modulation for power converters: Principles and Practice. – New-York: Wiley-IEEE Press, 2003. – 734 p.
4. Trzynadlowski A.M., Kirlin R.L., Legowski S.F. Space vector PWM technique with minimum switching losses and a variable pulse rate // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 1997. – Vol. 44. – № 2. – P. 173–181.
5. Boller T., Holtz J., Rathore A.K. Optimal Pulsewidth Modulation of a Dual Three-Level Inverter System Operated from a Single DC // IEEE Energy Conversion Congress and Exposition – ECCE, 2011. – P. 3406–3410.
6. Holtz J., Oikonomou N. Optimal Control of a Dual Three-Level Inverter System for Medium-Voltage Drives // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2010. – Vol. 46, № 3. – P. 1034–1041.
7. Халас Ш. Оптимизация управления инверторами напряжения в асинхронном электроприводе // Электричество. – 1993. – № 1. – С. 43–48.

8. Чаплыгин Е.Е. Двухфазная широтно-импульсная модуляция в трехфазных инверторах напряжения // *Электричество*. – 2009. – № 8. – С. 56–61.

9. Быстрый метод пространственно-векторной широтно-импульсной модуляции / В.И. Демкин, А.А. Бодрова, В.И. Логвин, Б.И. Звягинцев // *Молодой ученый*. – 2015. – № 22(102). – С. 137–141.

10. Обухов С.Г., Чаплыгин Е.Е., Кондратьев Д.Е. Широтно-импульсная модуляция в трехфазных инверторах напряжения // *Электричество*. – 2008. – № 8. – С. 23–31.

11. Титяев Д.К., Мирошник Д.Н. Сравнительный анализ векторной и традиционной широтно-импульсной модуляции // *Автоматизация технологичних об'єктів та процесів. Пошук молодих: збірник наукових праць IV Міжнарод. наук.-техн. конф. аспір. та студ. в м. Донецьку; 11–14 травня 2004 р.* – Донецьк: ДонНТУ, 2004. – С. 301–306.

12. Чаплыгин Е.Е., Хухтиков С.В. Широтно-импульсная модуляция с пассивной фазой в трехфазных инверторах напряжения // *Электричество*. – 2011. – № 5. – С. 53–61.

13. Сравнительный анализ энергетических показателей алгоритмов управления высоковольтным многоуровневым преобразователем / А.Б. Виноградов, А.Н. Сибирцев, А.А. Коротков, Д.А. Монов // *Труды VII Междунар. (XVIII Всерос.) конф. по автоматизир. электроприводу (АЭП-2012)*. – Иваново: Изд-во ИГЭУ, 2012. – С. 109–113.

14. Андриянов А.И., Михальченко Г.Я. Сравнительная характеристика различных видов ШИМ по топологии областей существования периодических режимов // *Электричество*. – 2004. – № 12. – С. 46–54.

15. Баховцев И.А. Сравнительный анализ выходного напряжения АИН с синусоидальной и векторной ШИМ // *Техническая электродинамика. Темат. вып. СЭЭ*. – Киев, 2008. – Ч. 3. – С. 63–66.

16. Зиновьев Г.С. Прямые методы расчета энергетических показателей вентильных преобразователей. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1990. – 220 с.

17. Баховцев И.А., Зиновьев Г.С. Обобщенный анализ выходной энергии многофазных многоуровневых инверторов напряжения с широтно-импульсной модуляцией // *Электричество*. – 2016. – № 4. – С. 26–33.

18. McGrath В.Р., Holmes D.G. An analytical technique for the determination of spectral components of multilevel carrier-based PWM methods // *IEEE Trans. Ind. Electron.* – 2002. – Vol. 49, № 4. – P. 847–857.

19. Баховцев И.А. Анализ и синтез энергооптимальных способов управления инверторами с ШИМ: автореф. ... дис. д-ра техн. наук: 05.08.12. – Новосибирск, 2017. – 36 с.

20. Tente P. A quasi analytical procedure for determining the optimum commutation angles of PWM converters // *Archiv fur Elektrotechnik*. – 1980. – Vol. 62, № 6. – P. 343–350.

### References

1. Zinov'ev G.S. *Osnovy silovoi elektroniki* [Fundamentals of power electronics]. Moscow: Iurait, 2012. 667 p.

2. Holtz J. Pulsewidth modulation for electronic power conversion. *Proc. IEEE*, 1994, vol. 82, no. 8, pp. 1194-1214.

3. Holmes D.G., Lipo T.A. *Pulse width modulation for power converters: Principles and Practice*. New-York: Wiley-IEEE Press, 2003. 734 p.

4. Trzynadlowski A.M., Kirlin R.L., Legowski S.F. Space vector PWM technique with minimum switching losses and a variable pulse rate. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1997, vol. 44, no. 2, pp. 173-181.

5. Boller T., Holtz J., Rathore A.K. Optimal Pulsewidth Modulation of a Dual Three-Level Inverter System Operated from a Single DC. *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition - ECCE*, 2011, pp. 3406-3410.

6. Holtz J., Oikonomou N. Optimal Control of a Dual Three-Level Inverter System for Medium-Voltage Drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 1034-1041.

7. Khalas Sh. Optimizatsiia upravleniia invertorami napriazheniia v asinkhronnom elektroprivode [Optimization of voltage inverters control in an asynchronous electric drive]. *Elektrichestvo*, 1993, no. 1, pp. 43-48.

8. Chaplygin E.E. Dvukhfaznaia shirotno-impul'snaia moduliatsiia v trekhfaznykh invertorakh napriazheniia [Two-phase pulse width modulation in three-phase voltage inverters]. *Elektrichestvo*, 2009, no. 8, pp. 56-61.

9. Demkin V.I., Bodrova A.A., Logvin V.I., Zviagintsev B.I. Bystryi metod prostranstvenno-vektornoj shirotno-impul'snoi moduliatsii [A fast method of space-vector pulse-width modulation]. *Molodoi uchenyi*, 2015, no. 22(102), pp. 137-141.

10. Obukhov S.G., Chaplygin E.E., Kondrat'ev D.E. Shirotno-impul'snaia moduliatsiia v trekhfaznykh invertorakh napriazheniia [Pulse width modulation in three-phase voltage inverters]. *Elektrichestvo*, 2008, no. 8, pp. 23-31.



11. Titiaev D.K., Miroschnik D.N. Sravnitel'nyi analiz vektornoj i traditsionnoj shirotno-impul'snoj moduliatsii [Comparative analysis of vector and traditional pulse width modulation]. *Avtomatizatsiia tekhnologichnikh ob'ektiv ta protsesiv. Poshuk molodiikh: zbirnik naukovikh prats' IV Mizhnarodna naukovu-tekhnichna konferentsiia aspirantiv ta studentiv v misti Donets'ku, 11-14 May 2004 p.* Donets'k: Donets'kii natsional'nii tekhnichnii universitet, 2004, pp. 301-306.

12. Chaplygin E.E., Khukhtikov S.V. Shirotno-impul'snaia moduliatsiia s passivnoi fazoi v trekhfaznykh invertorakh napriazheniia [Pulse width modulation with passive phase in three-phase voltage inverters]. *Elektrichestvo*, 2011, no. 5, pp. 53-61.

13. Vinogradov A.B., Sibirtsev A.N., Korotkov A.A., Monov D.A. Sravnitel'nyi analiz energeticheskikh pokazatelei algoritmov upravleniia vysokovol'tnym mnogourovnevym preobrazovatelem [Comparative analysis of energy parameters of control algorithms for high-voltage multilevel converter]. *Trudy VII Mezhdunarodnoi (XVIII Vserossiiskoi) konferentsii po avtomatizirovannomu elektroprivodu (AEP-2012)*. Ivanovo: Ivanovskii gosudarstvennyi energeticheskii universitet, 2012, pp. 109-113.

14. Andriianov A.I., Mikhal'chenko G.Ia. Sravnitel'naia kharakteristika razlichnykh vidov SHIM po topologii oblasti sushchestvovaniia periodicheskikh rezhimov [Comparative characteristics of different types of PWM in the topology of the regions of existence of periodic regimes]. *Elektrichestvo*, 2004, no. 12, pp. 46-54.

15. Bakhovtsev I.A. Sravnitel'nyi analiz vykhodnogo napriazheniia ain s sinusodal'noi i vektornoj SHIM [Comparative analysis of the output voltage of the AIN with sinusodal and vector PWM]. *Tekhnicheskaiia elektrodinamika. Tematicheskii vypusk SEE*. Kiev, 2008. part. 3, pp. 63-66.

16. Zinov'ev G.S. Priamyie metody rascheta energeticheskikh pokazatelei ventil'nykh preobrazovatelei [Direct methods for calculating the energy values of gate converters]. Novosibirsk: Novosibirskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 1990. 220 p.

17. Bakhovtsev I.A., Zinov'ev G.S. Obobshchennyi analiz vykhodnoi energii mnogofaznykh mnogourovnevnykh invertorov napriazheniia s shirotno-impul'snoj moduliatsiei [Generalized analysis of the output energy of multi-phase multilevel voltage inverters with pulse-width modulation]. *Elektrichestvo*, 2016, no. 4, pp. 26-33.

18. McGrath B.P., Holmes D.G. An analytical technique for the determination of spectral components of multilevel carrier-based PWM methods. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2002, vol. 49, no. 4, pp. 847-857.

19. Bakhovtsev I.A. Analiz i sintez energooptimal'nykh sposobov upravleniia invertorami s SHIM [Analysis and synthesis of energy-optimal methods for controlling inverters with PWM]. Abstract of Ph.D. thesis. Novosibirsk, 2017. 36 p.

20. Tente P. A quasi analytical procedure for determining the optimum commutation angles of PWM converters. *Archiv fur Elektrotechnik*, 1980, vol. 62, no. 6, pp. 343-350.

### **Сведения об авторах**

**Белоусов Игорь Владимирович** (Санкт-Петербург, Россия) – доцент кафедры «Электропривод и электрооборудование береговых установок» ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова (198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7, e-mail: ibel@bk.ru).

**Самосейко Вениамин Францевич** (Санкт-Петербург, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Электропривод и электрооборудование береговых установок» ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова» (198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7, e-mail: samoseyko@mail.ru).

### **About the authors**

**Belousov Igor Vladimirovich** (Saint Petersburg, Russian Federation) is an Associate Professor Department of the electric drive and electrical equipment onshore installation Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping (198035, Saint Petersburg, 5/7, Dvinskaya str., e-mail: ibel@bk.ru).

**Samoseiko Veniamin Frantsevich** (Saint Petersburg, Russian Federation) is a Doctor of Technical Sciences, Professor Department of the electric drive and electrical equipment onshore installations Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping (198035, Saint Petersburg, 5/7, Dvinskaya str., e-mail: samoseyko@mail.ru).

Получено 08.10.2018