

УДК 621.3.011.713

И.П. Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия

**ЧЕТЫРЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СИНХРОННЫХ МАШИН
С РЕАКТИВНОЙ НАГРУЗКОЙ**

Рассматриваются ток и момент индуктивной синхронной электрической машины при индуктивной нагрузке. Для индуктивной синхронной машины с индуктивной нагрузкой справедлива теорема 1. Амплитуда тока в индуктивной нагрузке индуктивной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения. Теорема доказывается путем приравнивания второго закона Кирхгофа и закона электромагнитной индукции применительно к вращающейся машине. Также справедлива теорема 2. Амплитуда вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой не зависит от частоты вращения. Теорема доказывается путем анализа закона Ампера применительно к вращающейся машине. Установлено, что при активной нагрузке амплитуда тока линейно зависит от частоты вращения машины. Амплитуда вращающего момента также линейно зависит от частоты вращения. При емкостной нагрузке амплитуда тока квадратично зависит от частоты вращения. Амплитуда вращающего момента также квадратично зависит от частоты вращения. Установлена зависимость мощности от характера нагрузки машины. Для индуктивной нагрузки реактивная электрическая мощность линейно зависит от частоты. Для резистивной нагрузки мощность квадратично зависит от частоты. Для емкостной нагрузки мощность кубично зависит от частоты. Для синхронной емкостной машины с емкостной нагрузкой справедливы теоремы 3 и 4. Теорема 3: амплитуда напряжения на емкостной нагрузке емкостной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения. Теорема 4: амплитуда вращающего момента для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Ключевые слова: синхронная машина, индуктивная нагрузка, ток, момент, амплитуда.

I.P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

**FOUR THEOREMS FOR SYNCHRONOUS MACHINES
WITH REACTIVE LOAD**

The current and the moment of the inductive synchronous electric machine under inductive load are considered. For a synchronous machine with an inductive load, Theorem 1 is valid. The amplitude of the current in the inductive load of an inductive synchronous electric machine is independent of the rotational speed. The theorem is proved by equating the second Kirchhoff law and the law of electromagnetic induction with reference to a rotating machine. Theorem 2 is also valid. The torque amplitude for an inductive synchronous electric machine with an inductive load is independent of the rotational speed. The theorem is proved by analyzing the Ampere law with respect to a rotating machine. It is established that, with an active load, the current amplitude depends linearly on the rotational speed. The torque amplitude also depends linearly on the rotational speed. With a capacitive load, the current am-

plitude depends quadratically on the rotational speed. The torque amplitude also depends quadratically on the rotational speed. The dependence of the power on the nature of the load is established. For inductive loads, the reactive electrical power is linearly dependent on frequency. For a resistive load, the power is quadratically dependent on the frequency. For a capacitive load, the power is cubic depending on the frequency. For a synchronous capacitive machine with a capacitive load, Theorem 3 and 4 are valid. Theorem 3. The voltage amplitude on the capacitive load of a capacitive synchronous electric machine is independent of the rotational speed. Theorem 4. The amplitude of the torque for a capacitive synchronous electric machine with a capacitive load is independent of the rotational speed.

Keywords: synchronous machine, inductive load, current, torque, amplitude.

Введение. Представляет интерес поведение синхронных электрических машин при различном характере нагрузки. Для индуктивной синхронной электрической машины это зависимость амплитуды тока и вращающего момента от нагрузки, для емкостной синхронной электрической машины это зависимость амплитуды напряжения и вращающего момента.

Актуальность работы обусловлена широким распространением синхронных электрических машин, используемых, в частности, в качестве генераторов.

Цель исследования – показать, при каком характере нагрузки параметры машины не зависят от частоты.

Задачи работы – получить доказательные на уровне теорем результаты.

Ток и момент индуктивной синхронной электрической машины при индуктивной нагрузке. Пусть нагрузкой фазы индуктивной синхронной электрической машины является катушка индуктивности [1–3]. Далее суммарная индуктивность катушки и обмотки машины обозначается L . Число витков обмотки – n . Длина активной части витка – l . Индукция магнитного поля в рабочем зазоре – B . Угол поворота ротора – φ . Частота вращения – $\omega = d\varphi/dt$. Ток – i . Число полюсов – два. Диаметр ротора – D_r . Активные электрические и механические потери не учитываются. Для синхронной машины с индуктивной нагрузкой справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Амплитуда тока в индуктивной нагрузке индуктивной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения.

Доказательство. При указанных допущениях справедливо равенство (второй закон Кирхгофа и закон электромагнитной индукции применительно к вращающейся машине):

$$Bln \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = L \frac{di}{dt}. \quad (1)$$

Интегрирование этого выражения дает следующее:

$$i = -\frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2} \cos \varphi + I_0 = -I_m \cos \varphi + I_0.$$

Начальный ток I_0 можно положить равным нулю.

Амплитуда тока:

$$I_m = \frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2},$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Теорема 2. Амплитуда вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Доказательство. При указанных допущениях вращающий момент в соответствии с законом Ампера (применительно к вращающейся машине) определяется как

$$\mu = Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -Bln \frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2} \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -\frac{(Bln)^2}{L} \frac{D_r^2}{8} \sin 2\varphi.$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = \frac{(Bln)^2}{L} \frac{D_r^2}{8},$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Правомерен вопрос: а как обстоит дело при другом характере нагрузки синхронной электрической машины?

Ток и момент при другом характере нагрузки. При активной нагрузке аналог уравнения (1) имеет вид

$$Bln \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = Ri.$$

Амплитуда тока

$$I_m = \frac{Bln}{R} \frac{D_r}{2} \omega,$$

от частоты вращения ω зависит (линейно).

Вращающий момент определяется как

$$\mu = Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = Bln \frac{Bln}{R} \frac{D_r}{2} \omega \sin \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \frac{(Bln)^2}{R} \frac{D_r^2}{8} \omega \sin 2\varphi.$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = \frac{(Bl n)^2 D_r^2}{R} \omega,$$

от частоты вращения ω зависит (линейно).

При емкостной нагрузке [4–8] аналог уравнения (1) имеет вид:

$$Bl n \frac{D_r}{2} \omega \sin \omega t = \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Дифференцирование этого выражения дает следующее:

$$i = Bl n C \frac{D_r}{2} \omega^2 \cos \omega t.$$

Амплитуда тока

$$I_m = i = Bl n C \frac{D_r}{2} \omega^2,$$

от частоты вращения ω зависит (квадратично).

Вращающий момент определяется как

$$\mu = Bl n i \frac{D_r}{2} \sin \varphi = Bl n Bl n C \frac{D_r}{2} \omega^2 \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = (Bl n)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^2 \sin 2\varphi.$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = \mu = (Bl n)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^2,$$

от частоты вращения ω зависит (квадратично).

Зависимость мощности от характера нагрузки. Для индуктивной нагрузки реактивная электрическая мощность определяется как

$$Q = I^2 X_L = I^2 \omega L = \frac{(Bl n)^2 D_r^2}{L} \omega. \quad (2)$$

где I – действующее значение тока.

Механическая мощность [9, 10] определяется как

$$Q_M = M \omega = \frac{(Bl n)^2 D_r^2}{L} \omega. \quad (3)$$

Разумеется, (2) и (3) совпали.

Мощность линейно зависит от частоты.

Для резистивной нагрузки активная электрическая мощность определяется по формуле

$$P = I^2 R = \frac{(Bl n)^2 D_r^2}{R} \omega^2. \quad (4)$$

Механическая мощность

$$P_M = M \omega = \frac{(Bl n)^2 D_r^2}{R} \omega. \quad (5)$$

Разумеется, (4) и (5) совпали.

Мощность квадратично зависит от частоты.

Для емкостной нагрузки реактивная электрическая мощность определяется как

$$Q = I^2 X_C = I^2 \frac{1}{\omega C} = (Bl n)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^3. \quad (6)$$

Механическая мощность

$$Q_C = M \omega = (Bl n)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^3. \quad (7)$$

Разумеется, (6) и (7) совпали. Мощность кубично зависит от частоты.

Напряжение и момент емкостной синхронной электрической машины при емкостной нагрузке. Дуальным аналогом индуктивной синхронной электрической машины [11–20] является емкостная синхронная электрическая машина [1, 7].

В соответствии с законом магнитоэлектрической индукции (дуальный аналог закона электромагнитной индукции)

$$i = Dbv, \quad (8)$$

где D – электрическая индукция (электрическое смещение) в рабочем зазоре, b – ширина электрода, v – линейная скорость.

Выражение (8) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dq}{dt} = Db \frac{dx}{dt}, \quad dq = Db dx, \quad \int_0^q dq = Db \int_0^x dx, \quad q = Dbx.$$

С учетом последнего уравнения сила, действующая на электрод,

$$F = qE = q \frac{u}{x} = Dbu. \quad (9)$$

Это дуальный аналог закона Ампера для электрического (магнитоэлектрического) взаимодействия. Здесь E – напряженность электрического поля, u – напряжение. Электрический ток

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (10)$$

Замечание. Формулы (8) и (9) могут быть получены из их электромагнитных аналогов путем простой дуально-инверсной замены величин: $e \rightarrow i$, $B \rightarrow D$, $l \rightarrow b$, $i \rightarrow u$.

Теорема 3. Амплитуда напряжения на емкостной нагрузке емкостной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения.

Доказательство. Для вращательной машины уравнение для тока с учетом (8) и (10) имеет вид:

$$Db \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = C \frac{du}{dt}.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$u = -\frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2} \cos \varphi + U_0 = -U_m \cos \varphi + U_0. \quad (11)$$

Амплитуда напряжения

$$U_m = \frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2}. \quad (12)$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Теорема 4. Амплитуда вращающего момента для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Доказательство. Вращающий момент в соответствии с (9), (11) и (12) применительно к вращающейся машине определяется как

$$\mu = Db u \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -Db U_m \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -Db \frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2} \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -\frac{D^2 b^2 D_r^2}{C} \frac{d\varphi}{8} \sin 2\varphi.$$

Амплитуда вращающего момента,

$$M_m = \frac{D^2 b^2 D_r^2}{C} \frac{d\varphi}{8},$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Выводы. Таким образом, для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой амплитуды тока и вращающего момента от частоты вращения не зависят. При другом характере нагрузки – зависят. Для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой амплитуды напряжения и вращающего момента от частоты вращения не зависят. Полученные результаты рекомендуется использовать при проектировании электрических систем.

Библиографический список

1. Попов И.П. Свободные гармонические колебания в электрических системах с однородными реактивными элементами // *Электричество*. – 2013. – № 1. – С. 57–59.
2. Попов И.П. Самокомпенсация симметричной реактивной нагрузки в сети // *Вестник Псков. гос. ун-та. Технические науки*. – 2017. – Вып. 5. – С. 37–41.
3. Попов И.П., Попов Д.П., Кубарева С.Ю. Индуктивно-индуктивная колебательная система // *Вестник Курган. гос. ун-та. Технические науки*. – 2013. – Вып. 8. – № 2(29). – С. 78, 79.
4. Попов И.П. Емкостно-инертное устройство // *Известия Санкт-Петербург. гос. электротехн. ун-та «ЛЭТИ»*. – 2015. – Т. 2. – С. 43–45.
5. Попов И.П. Зависимость реактивного сопротивления пьезоэлектрического преобразователя от механических параметров его нагрузки // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. – 2013. – № 5(87). – С. 94–98.
6. Попов И.П. Вращательные инертно-емкостные устройства // *Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Технические науки*. – 2011. – № 3(31). – С. 191–196.
7. Попов И.П. Колебательные системы с однородными элементами // *Инженерная физика*. – 2013. – № 3. – С. 52–56.
8. Пат. № 2086065 С1 Рос. Федерация. Электрическое емкостное устройство / И.П. Попов; опубл. 27.07.1997. Бюл. № 21.
9. Попов И.П. Механические аналоги реактивной мощности // *Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика*. – 2015. – № 3(30). – С. 37–39.
10. Попов И.П. Комплексная мощность механических колебательных процессов // *Вестник Сибир. гос. ун-та путей сообщения*. – 2016. – № 1. – С. 32–36.
11. Gieras J.F., Jonsson U. Design of a High Speed Magnet Brushless Generator for Microturbines // *Electromotion*. – 2005. – Vol. 12, № 2–3. – P. 86–91.

12. Next Generation More-Electric Aircraft: A Potential Application for HTS Superconductors / Cesar A. Luongo, Philippe J, Masson, Taewoo Nam, Dimitri Mavris, Hyan D. Kim, Gerald V. Brown, Mark Waters, David Hall // *IEEE Transactions on applied superconductivity*. – 2009. – Vol. 19, № 3.

13. Barnes P.N., Sumption M.D., Rhoads G.L. Review of high power density superconducting generators: Present state and prospects for incorporating YBCO windings // *Cryogenics*. – 2005. – Vol. 45. – P. 670–686.

14. HTS racetrack coils for electrical machines / S. Kozub, I. Bogdanov, D. Dezhin, E. Kashtanov, V. Shuvalov, V. Smirnov, V. Sytnik, P. Shcherbakov, L. Tkachenko // *Proceedings of Cryogenics 2014*. – Prague, April 2014.

15. Brushless Superconducting Syn-chronous Generator With Claw-Shaped Poles and Permanent Magnets / L.G. Verzhbitsky, S.S. Kozub, V.T. Penkin, A.E. Larionov, K.A. Modestov, N.S. Ivanov, E.E. Tulinova, A.A. Dubensky // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. – 2016. – Vol. 26, № 3.

16. Comparative analysis of cogging torque reduction methods of variable flux reluctance machines for electric vehicles / Y. Liu, J. Yin, B. Gong, G. Yang // *ICEMS*. – 2017. – P. 1–6.

17. Chinchilla M., Arnaltes S., Burgos J.C. Control of permanent-magnet generators applied to variable-speed wind-energy systems connected to the grid // *IEEE Transactions on Energy Conversion*. – 2006. – Vol. 21. – Iss. 1. – P. 130–135.

18. Modeling and fault analysis of doubly fed induction generators for gansu wind farm application / M. Kheshti, X. Kang, G. Song, Z. Jiao // *Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering*. – 2015. – Vol. 38. – № 1. – P. 52–64.

19. Bianchi N., Bolognani S. Design Criteria for High-Efficiency SPM Synchronous Motors // *IEEE Trans. Energy Convers.* – 2006. – Vol. 21, № 2. – P. 396–404.

20. Xie G., Ramshaw R.S. Nonlinear model of synchronous machine with saliency // *IEEE Trans. on Energy Conversion*. – 1986. – Vol. 1, № 3. – P. 198–203.

References

1. Popov I.P. Svobodnye garmonicheskie kolebaniia v elektricheskikh sistemakh s odnorodnymi reaktivnymi elementami [Free harmonic oscillations in electrical systems with homogeneous reactive elements]. *Elektrichestvo*, 2013, no. 1, pp. 57-59.

2. Popov I.P. Samokompensatsiia simmetrichnoi reaktivnoi nagruzki v seti [Compensation of a Symmetric Reactive Load in a Network]. *Vestnik Pskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2017, iss. 5, pp. 37-41.

3. Popov I.P., Popov D.P., Kubareva S.Iu. Induktivno-induktivnaia kolebatel'naia sistema [Inductive-inductive oscillatory system]. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2013, iss. 8, no. 2(29), pp. 78, 79.

4. Popov I.P. Emkostno-inertnoe ustroistvo [Capacitive-inert device]. *Izvestiia Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo elektrotekhnicheskogo univerta "LETI"*, 2015, vol. 2, pp. 43-45.

5. Popov I.P. Zavisimost' reaktivnogo soprotivleniia p'ezoelektricheskogo preobrazovatel'ia ot mekhanicheskikh parametrov ego nagruzki [Dependence of the reactance of a piezoelectric transducer on the mechanical parameters of its load]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2013, no. 5(87), pp. 94-98.

6. Popov I.P. Vrashchatel'nye inertno-emkostnye ustroistva [Rotational inert-capacitive devices]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2011, no. 3(31), pp. 191-196.

7. Popov I.P. Kolebatel'nye sistemy s odnorodnymi elementami [Vibrational systems with homogeneous elements]. *Inzhenernaia fizika*, 2013, no. 3, pp. 52-56.

8. Popov I.P. Elektricheskoe emkostnoe ustroistvo [Electric capacitive device]. Patent Rossiiskaia Federatsiia no. 2086065 (1997).

9. Popov I.P. Mekhanicheskie analogi reaktivnoi moshchnosti [Mechanical analogues of reactive power]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2015, no. 3(30), pp. 37-39.

10. Popov I.P. Kompleksnaia moshchnost' mekhanicheskikh kolebatel'nykh protsessov [Complex power of mechanical oscillatory processes]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta putei soobshcheniia*, 2016, no. 1, pp. 32-36.

11. Gieras J.F., Jonsson U. Design of a High Speed Magnet Brushless Generator for Microturbines. *Electromotion*, 2005, vol. 12, no. 2-3, pp. 86-91.

12. Cesar A. Luongo, Philippe J. Masson, Taewoo Nam, Dimitri Mavris, Hyan D. Kim, Gerald V. Brown, Mark Waters, David Hall. Next Generation More-Electric Aircraft: A Potential Application for HTS Superconductors. *IEEE Transactions on applied superconductivity*, 2009, vol. 19, no. 3.

13. Barnes P.N., Sumption M.D., Rhoads G.L. Review of high power density superconducting generators: Present state and prospects for incorporating YBCO windings. *Cryogenics*, 2005, vol. 45, pp. 670-686.

14. Kozub S., Bogdanov I., Dezhin D., Kashtanov E., Shuvalov V., Smirnov V., Sytnik V., Shcherbakov P., Tkachenko L. HTS racetrack coils for electrical machines. *Proceedings of Cryogenics 2014*. Prague, April 2014.

15. Verzhbitsky L.G., Kozub S.S., Penkin V.T., Larionov A.E., Modestov K.A., Ivanov N.S., Tulinova E.E., Dubensky A.A. Brushless Superconducting Syn-chronous Generator With Claw-Shaped Poles and Permanent Magnets. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2016, vol. 26, no. 3.

16. Liu CY., Yin J., Gong B., Yang G. Comparative analysis of cogging torque reduction methods of variable flux reluctance machines for electric vehicles. *ICEMS*, 2017, pp. 1-6.

17. Chinchilla M., Arnaltes S., Burgos J.C. Control of permanent-magnet generators applied to variable-speed wind-energy systems connected to the grid. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2006, vol. 21, iss. 1, pp. 130-135.

18. Modeling and fault analysis of doubly fed induction generators for gansu wind farm application / M. Kheshti, X. Kang, G. Song, Z. Jiao. *Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2015, vol. 38, no. 1, pp. 52-64.

19. Bianchi N., Bolognani S. Design Criteria for High-Efficiency SPM Synchronous Motors. *IEEE Trans. Energy Convers*, 2006, vol. 21, no. 2, pp. 396-404.

20. Xie G., Ramshaw R.S. Nonlinear model of synchronous machine with saliency. *IEEE Trans. on Energy Conversion*, 1986, vol. 1, no.3, pp. 198-203.

Сведения об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета (640020, Курган, ул. Советская, 63/4, e-mail: ip.popow@yandex.ru).

About the author

Popov Igor Pavlovich (Kurgan, Russian Federation) is a Senior Lecturer of the Department "Technology of mechanical engineering, machine tools and instruments" Kurgan State University (640020, Kurgan, 63/4, Sovetskaya str., e-mail: ip.popow@yandex.ru).

Получено 08.10.2018