

УДК 519.876.5

А.Н. Кириллов^{1,2}, Н.В. Смирнов²¹Институт прикладных математических исследований Карельского
научного центра РАН, Петрозаводск, Россия²Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД В АЭРОТЕНКЕ

Возрастание антропогенной нагрузки на окружающую среду приводит к сокращению запасов питьевой воды, что, в свою очередь, ведет к необходимости повышения эффективности процессов очистки сточных вод. Поскольку проведение натуральных экспериментов на сооружениях очистки воды невозможно, то увеличивается роль математического моделирования при исследовании соответствующих технологических процессов.

Наблюдения показывают, что в течение суток можно выделить периоды, в течение которых расход приходящих на очистные сооружения сточных вод значительно не изменяется. Построение отстойников-усреднителей также может позволить поддерживать постоянное значение расхода сточных вод. С учетом этих факторов в работе предложено дальнейшее развитие компартиментальной математической модели процесса биологической очистки сточных вод с переменной структурой для случая постоянного значения часового расхода сточных вод. Разработанная модификация модели биоочистки описывает динамику концентраций двух типов субстрата, кислорода и общей концентрации микроорганизмов активного ила. Введенные пороговые функции позволяют моделировать переключение процессов окисления с органики на аммоний и конкуренцию микроорганизмов за кислород. Также эти функции позволяют избежать недопустимых значений модельных концентраций, которые могут возникать в результате вычислительных погрешностей. Влияние насыщения микроорганизмов кислородом и субстратами учитывается с помощью функции Моно.

Для компьютерного моделирования на языке программирования Python разработан программный комплекс. Проведена параметрическая идентификация. Найденные выходные модельные концентрации при различных комбинациях значений управляющих параметров приведены в статье. Результаты компьютерного моделирования, значения модельных концентраций на выходе из компартиментов показывают адекватность разработанной модели процессу биологической очистки сточных вод, осуществляемому на очистных сооружениях г. Петрозаводска (Карелия).

Предложенная модель позволяет решать задачу прогнозирования и управления процессом биоочистки, разрабатывать алгоритмы для обеспечения необходимых значений выходных модельных концентраций и оптимизации процесса биоочистки.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамическая система, управление процессом, сточные воды, биологическая очистка, аэрация, окисление, нитрификация.

A.N. Kirillov^{1,2}, N.V. Smirnov²

^{1,2}Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research
Centre of the RAS Petrozavodsk, Russian Federation

²Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russian Federation

COMPUTER MODELING AND CONTROL OF BIOLOGICAL WASTEWATER TREATMENT PROCESS IN ACTIVATED SLUDGE TANK

The increasing of man-induced ecological stress implies the reducing of potable water stock which, in turn, causes the necessity of wastewater treatment processes efficiency increasing. Since the natural experiments performance is impossible then significance of mathematical modeling as an instrument of wastewater treatment processes researching is difficult to overestimate.

The observations show that a day can be divided in periods of approximately constant of the wastewater inflow rate. Also, the system of balancing tanks can maintain the constant value of sewage water flow. In view of these factors, the further development of compartment mathematical model for wastewater biological treatment process is proposed in this paper. The model is the system of ordinary differential equations with variable structure. The hour inflow rate of wastewater is supposed to be constant. The presented model describes the concentration dynamics of two types of substrates, oxygen and overall activated sludge microorganisms concentration. The introduced threshold functions permit to describe the oxidation process switching from organic substance to ammonium and the microorganisms oxygen competition. Also these functions permit to avoid inadmissible values of model concentrations which may emerge as a result of computational errors. The Monod function is used to take into account the oxygen and substrate saturation of microorganisms.

The software package in Python is developed. The parameter identification is presented.

The model output concentrations corresponding different control parameter values are set in the article. The results of computer modeling show the adequacy of the developed model to the wastewater treatment process realizing at Petrozavodsk (Karelia) plant.

The proposed model permits to solve the problem of forecasting and control of biological wastewater treatment process and to develop algorithms for its stabilizing and optimizing.

Keywords: computer modeling, dynamical system, process control, sewage water, biological wastewater treatment, aeration, oxidation, nitrification.

Введение. Одной из приоритетных задач рационального природопользования является очистка сточных вод. В настоящее время наиболее широкое распространение получила биологическая очистка воды в аэротенках. Математическое моделирование является неотъемлемой частью исследований в области процессов биоочистки сточных вод [1–9].

Предельно допустимые концентрации загрязняющих веществ в очищенных сточных водах определяются, исходя из экологической ситуации в регионе и типа водного объекта, в который осуществляется сброс воды. Главной целью биоочистки является минимизация или поддержание концентраций загрязнителя в очищенных сточных водах в допустимых границах. Для достижения указанных целей необходимо

управление процессом биоочистки, этому посвящены работы [10–14]. В качестве управляющих параметров процесса биологической очистки сточных вод часто используют расход сточных вод, активного ила, кислорода. При этом необходимо учитывать технологические особенности процесса биоочистки на конкретных очистных сооружениях, допустимые режимы подачи кислорода, сточных вод.

Авторы в работах [15–17] предложили модели, которые учитывают динамику двух типов микроорганизмов, окисляющих соответствующие типы субстрата. Отделение разных видов микроорганизмов на действующих очистных сооружениях представляет чрезмерно трудоемкую задачу, которая требует недопустимо больших временных затрат. Нахождение оптимального управления в модели из работы [18] не представляется возможным в силу слишком большого в течение суток количества различных комбинаций значений управляющих параметров.

Разработанную математическую модель необходимо проверить на адекватность экспериментальным данным. Решением этой задачи является программный комплекс, который, правда, может вносить погрешности в ходе нахождения численных решений. Во избежание этого в работе предложены соответствующие пороговые функции.

1. Математическая модель. Рассмотрим процесс биоочистки в коридорном аэротенке промежуточного типа (рисунок) в случае постоянного значения расхода сточных вод и активного ила. Места отбора проб условно разделяют аэротенк на компартменты C_i , $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Места входа сточных вод и места отбора проб условно разделяют аэротенк на субкомпартменты z_j , $j \in N$.

В процессе биологической очистки сточных вод активный ил, поступающий с концентрацией X в начало аэротенка, движется вдоль его оси и окисляет растворенные в воде различные типы субстрата. В сточной воде выделим два типа субстрата: легко биоразлагаемый углеродосодержащий (с концентрацией S_s) и аммоний (с концентрацией S_{NH}). В процессе окисления субстрата активный ил потребляет подаваемый в аэротенк в виде воздуха кислород (с концентрацией S_o).

В биомассе активного ила можно выделить гетеротрофные и автотрофные микроорганизмы. Автотрофы преимущественно окисляют аммоний, а гетеротрофы – углеродосодержащий субстрат. Поскольку

выделение концентраций отдельных химических соединений в органическом субстрате вызывает непреодолимые трудности, то в качестве значения S_s используют значение химического потребления кислорода (ХПК). При нахождении значения ХПК учитывается расход кислорода на окисление органических веществ, в том числе тех, которые не будут окислены в аэротенке.

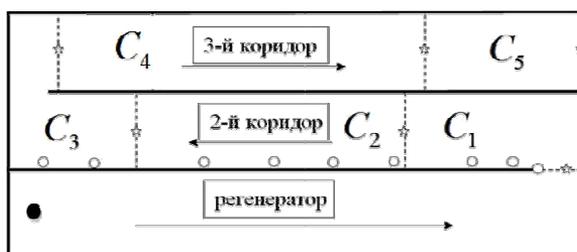


Рис. Схема аэротенка: о – место вхождения сточной воды в аэротенк; ● – место вхождения иловой смеси в аэротенк; ☆ – место отбора проб; → – направление движения иловой смеси

Наличие органических веществ приводит к активизации гетеротрофных микроорганизмов, которые подавляют автотрофные микроорганизмы в борьбе за кислород [19], в результате окисление аммония в значительной мере начинается после окисления органического субстрата. Для описания переключения процесса окисления с органики на аммоний при достижении концентрацией S_s некоторого значения $\kappa_i + \delta$ в работе [18] предложены пороговые функции:

$$f_1(S_s) = \frac{1}{1 + e^{\alpha \left(\frac{\kappa_i + \delta}{S_s} - 1 \right)}}, \quad (1)$$

$$f_2(S_s, S_{NH}) = \frac{S_{NH} / (S_s - \kappa_i - \delta)}{K_\alpha + S_{NH} / (S_s - \kappa_i - \delta)}, \quad (2)$$

где K_α – параметр, который обеспечивает замедление процессов нитрификации, его значение находится экспериментально, κ_i – наименьшее допустимое значение ХПК надидовой жидкости в i -м компартменте аэротенка, δ и α – соответственно достаточно малая и большая величины. Значения констант $\delta = 10^{-2}$ и $\alpha = 10^4$ в ходе компьютерных

экспериментов обеспечили уменьшение концентрации S_S до величины, которая чуть больше κ_i , что необходимо для непрерывности математической модели (4)–(10).

Вследствие погрешностей вычислений найденная концентрация кислорода может принимать неадекватно малые и даже отрицательные значения. Известно, что при концентрации кислорода меньше некоторого порогового значения S_O^p окисление субстрата микроорганизмами активного ила (и потребление кислорода) практически полностью прекращается. Для обеспечения $S_O > 0$ введена пороговая функция):

$$f_3(S_O) = \frac{1}{1 + e^{\eta(S_O - S_O^p)}}, \quad (3)$$

где η – константа, обеспечивающая мгновенное переключение процессов окисления при достижении S_O значения S_O^p , $\eta \leq 0$. В ходе компьютерного моделирования при согласовании с экспертом были выбраны значения $\eta = -50$, $S_O^p = 0,2$.

Для описания насыщения микроорганизмов активного ила субстратом и кислородом будем использовать функцию Моно:

$$f(S, K) = \frac{S}{S + K},$$

где K – константа, $K > 0$.

При переходе иловой смеси в субкомпартмент Z_{j+1} она перемешивается со входящей сточной водой. Модельные концентрации находятся на входе в Z_{j+1} по формулам:

$$S_{m,j+1}^{in} = \frac{S_m^* \cdot V_{sv,j} + S_{m,j} \cdot V_j}{V_{sv,j} + V_j}, \quad m \in \{S, NH, O\},$$

$$X_{j+1}^{in} = \frac{X^* \cdot V_{sv,j} + X_j \cdot V_j}{V_{sv,j} + V_j},$$

где S_m^* , X^* – соответствующие концентрации в сточной воде, V_j , $V_{sv,j}$ – объемы субкомпартмента и сточных вод, входящих в него за единицу времени соответственно.

Через q обозначим суммарный расход сточных вод и смеси активного ила. Время прохождения иловой смесью j -го субкомпартамента аэротенка в таком случае можно найти по формуле

$$T_j = \frac{V_j}{q}.$$

С использованием констант, характеризующих суммарный расход активного ила и сточных вод,

$$Q_j = \frac{1}{T_j}.$$

Для моделирования процесса биоочистки предложена модификация компарментальной математической модели с переменной структурой из работы [17], в которой для упрощения записи опущены номера субкомпарментов:

$$\dot{S}_S = Q(S_S^{in} - S_S) - \frac{\mu_S}{Y_S} f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) f_1(S_S) f_3(S_O) X, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{NH} = Q(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \frac{\mu_{NH}}{Y_{NH}} f(S_{NH}, K_{NH}) \times \\ \times f(S_O, K_{O,A}) f_2(S_S, S_{NH}) f_3(S_O) X, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{X} = Q(u_{il} - X) + (\mu_S f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) f_1(S_S) f_3(S_O) + \\ + \mu_{NH} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) f_2(S_S, S_{NH}) f_3(S_O) - b) X, \end{aligned} \quad (6)$$

$$S_O = Q(S_O^{in} - S_O) + \hat{u} - \left(\hat{v} + \left(\frac{1 - \hat{Y}_S}{Y_S} \mu_S f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) f_1(S_S) + \right. \right. \quad (7)$$

$$\left. \left. + \frac{4,57 - \hat{Y}_{NH}}{Y_{NH}} \mu_{NH} \beta_{NH,O} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) f_2(S_S, S_{NH}) + \beta_O \right) X \right) f_3(S_O),$$

$$\dot{S}_S = Q(S_S^{in} - S_S) - f_1(S_S) X, \quad (8)$$

$$\dot{X} = Q(u_{il} - X) + (\beta + \mu_{NH} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_O) f_2(S_S, S_{NH}) f_3(S_O) - b) X, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_O = Q(S_O^{in} - S_O) + \hat{u} - \\ - \left(\hat{v} + \left(\frac{4,57 - \hat{Y}_{NH}}{Y_{NH}} \mu_{NH} \beta_{NH,O} f(S_{NH}, K_{NH}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times f(S_O, K_{O,A}) f_2(S_S, S_{NH}) + \beta_O \right) X \right) f_3(S_O), \end{aligned} \quad (10)$$

где концентрации на входе и выходе из компартмента соответственно: $S_{\text{NH}}^{\text{in}}$, S_{NH} (г $\text{NH}_4^+/\text{м}^3$) – концентрация аммония, S_{S}^{in} , S_{S} (г ХПК/ м^3) – концентрация легко биоразложимого углеродосодержащего субстрата, X^{in} , X (г активного ила/ м^3) – концентрация активного ила, S_{O}^{in} , S_{O} (г $\text{O}_2/\text{м}^3$) – концентрация растворенного кислорода, модельные параметры: S_{S}^* (г ХПК/ м^3) – пороговое значение концентрации S_{S} , K_{S} (г ХПК/ м^3) – коэффициент полунасыщения легко биоразложимым органическим субстратом, K_{NH} (г $\text{NH}_4^+/\text{м}^3$) – коэффициент полунасыщения аммонием, $K_{\text{O,H}}$ (г $\text{O}_2/\text{м}^3$) – коэффициент полунасыщения кислородом при окислении легко биоразложимого органического субстрата, $K_{\text{O,A}}$ (г $\text{O}_2/\text{м}^3$) – коэффициент полунасыщения кислородом при окислении аммония, K_{α} (г $\text{NH}_4^+/\text{г}$ ХПК) – введен ранее, Y_{S} (г активного ила/г ХПК) – коэффициент перехода массы легко биоразложимого органического субстрата в биомассу, Y_{NH} (г активного ила/г NH_4^+) – коэффициент перехода массы аммония в биомассу, b (1/сут) – скорость распада микроорганизмов, μ_{S} (1/сут) – максимум скорости роста за счет окисления легко биоразложимого органического субстрата, μ_{NH} (1/сут) – максимум скорости роста за счет окисления аммония, β (1/сут) – параметр, характеризующий удельную скорость роста активного ила за счет окисления субстратов, не являющихся легко биоразложимой органикой и аммонием, β_{O} (г $\text{O}_2/(\text{сут} \cdot \text{г}$ активного ила)) – параметр, характеризующий удельный расход кислорода при окислении трудно биоразложимого органического субстрата, $\beta_{\text{NH,O}}$ (г $\text{O}_2/\text{г}$ NH_4^+) – параметр, значение которого находится экспериментально, \hat{Y}_{S} , \hat{Y}_{NH} – безразмерные величины, значения которых равны численным значениям соответствующих параметров, u_{il} (г активного ила / ($\text{м}^3 \cdot \text{сут}$)) – расход активного ила, \hat{i} (г $\text{O}_2 / (\text{м}^3 \cdot \text{сут})$) – удельная скорость подачи кислорода, \hat{V} (г $\text{O}_2/(\text{м}^3 \cdot \text{сут})$) – удельная скорость перехода кислорода через поверхность воды в атмосферу.

В большинстве азротенков промежуточного типа, например, таких как на рисунке, в последнем коридоре (в котором не происходит

подача новых порций сточных вод) концентрация органического субстрата достигает порогового значения и перестает изменяться. В таком случае для уменьшения количества параметров и вычислительных затрат уравнения (4), (6), (7) соответственно заменяются на уравнения (8)–(10). Замена уравнений системы также приводит к необходимости разбиения соответствующего компартмента на субкомпартменты.

Сточные воды после очистки, как правило, сбрасываются в водные объекты. Контролирующие организации устанавливают предельно допустимые концентрации (ПДК) на каждый тип загрязнителя в очищенных сточных водах. В Приложении к разрешению на сброс загрязняющих веществ в окружающую среду от 29.05.2012 г. рег. № 4, выданному Управлением Роспотребнадзора по Республике Карелия, указаны предельно допустимые концентрации субстратов, в том числе:

– ПДК БПК_{ПОЛН} (биологическое потребление кислорода полное, эквивалент ХПК_{ПОЛН}) составляет 6,98 (г БПК_{ПОЛН}/м³);

– ПДК аммония составляет 1,35 (г NH₄⁺/м³).

Минимизация или поддержание выходных концентраций субстратов в допустимых границах является главной целью процесса биочистки. Для достижения этой цели в модель введено управление скоростью подачи активного ила и скоростью подачи кислорода.

2. Результаты компьютерного моделирования. Для параметрической идентификации модели (4)–(10) и нахождения управления создан программный комплекс на языке программирования Python. Для численного решения дифференциальных уравнений был использован метод Адамса, реализованный в решателе Lsode библиотеки odespy. Разбиение каждого интервала времени t_{el} на 1000 точек позволило минимизировать время расчетов при обеспечении допустимых погрешностей расчетов.

Экспериментальные данные были получены на канализационных очистных сооружениях (КОС) г. Петрозаводска. Допустимое множество значений параметров из работы [20] было расширено для нахождения значений параметров модели (4)–(10). Методом сканирования с помощью вычислительного кластера КарНЦ РАН [21] для каждого компартмента были найдены векторы параметров $P_j^* = (p_1^j, \dots, p_n^j)$, где n – количество параметров, которые доставляют минимум функционалу:

$$J = \sum_{k=1}^4 sc_k^2 (y_k - y_k^m(P))^2,$$

где sc_k – коэффициенты масштабирования, которые равны величинам, являющимся обратными значениям соответствующих входных концентраций в соответствующих субкомпарментах, P – вектор значений параметров, y_k и y_k^m – экспериментальные и модельные значения концентраций.

В табл. 1 представлены модельные концентрации, полученные путем интегрирования системы (4)–(10) с найденными векторами параметров. Наибольшее отклонение модельных от экспериментальных значений концентрации не превосходит 6 %.

Таблица 1

Концентрации на выходе из компарментов (эксп. данные – экспериментальные данные, мод. данные – модельные данные)

| Компартменты | S_S (г ХПК/м ³) | | S_{NH} (г NH ₄ ⁺ /м ³) | | X (г микроорганизмов/м ³) | | S_O (г O ₂ /м ³) | |
|--------------|-------------------------------|-------------|--|-------------|---|-------------|---|-------------|
| | Эксп. данные | Мод. данные | Эксп. данные | Мод. данные | Эксп. данные | Мод. данные | Эксп. данные | Мод. данные |
| C_1 | 4,95 | 4,96 | 0,70 | 0,70 | 3660,00 | 3630,89 | 2,57 | 2,59 |
| C_2 | 4,56 | 4,57 | 1,50 | 1,51 | 3380,00 | 3150,12 | 2,7 | 2,64 |
| C_3 | 4,22 | 4,23 | 2,50 | 2,46 | 3260,00 | 3103,89 | 2,00 | 2,18 |
| C_4 | 3,05 | 3,05 | 0,9 | 0,91 | 3150,00 | 3190,59 | 2,17 | 2,06 |
| C_5 | 3,2 | 3,00 | 0,7 | 0,74 | 3300,00 | 3238,84 | 2,03 | 1,99 |

Скорость подачи активного ила и кислорода изменяется путем регулирования пропускной способности соответственно илового насоса и воздуходувок.

Рассмотрим два режима работы илового насоса $u_{il}^{mode} \in \{0,5; 1\}$ и три режима работы воздуходувок $u_{aer}^{mode} \in \{0,33; 0,66; 1\}$. Значения этих параметров соответствуют части от наибольшей пропускной способности (одна часть эквивалентна 100 %).

В табл. 2 представлены значения S_S^{out} , S_{NH}^{out} , X^{out} , S_O^{out} соответствующих модельных концентраций на выходе из аэротенка при различных значениях управляющих параметров.

Таблица 2

Выходные модельные концентрации

| u_{il}^{mode} | u_{aer}^{mode} | S_S^{out} | S_{NH}^{out} | X^{out} | S_O^{out} |
|-----------------|------------------|-------------|----------------|-----------|-------------|
| 0,50 | 0,33 | 3,00 | 10,29 | 2878,88 | 0,01 |
| 1,00 | 0,33 | 5,38 | 7,94 | 2578,89 | 0,01 |
| 0,50 | 0,66 | 3,00 | 0,48 | 3016,1 | 2,92 |
| 1,00 | 0,66 | 3,00 | 0,74 | 3238,84 | 1,99 |
| 0,50 | 1,00 | 3,00 | 0,23 | 3015,06 | 15,37 |
| 1,00 | 1,00 | 3,00 | 0,30 | 3238,35 | 8,49 |

Из табл. 2 видно, что несколько комбинаций управления обеспечивают значения концентраций субстратов меньше ПДК. Увеличение расхода кислорода и активного ила приводит к увеличению финансовых расходов. В таком случае технолог КОС может выбирать разные стратегии, например, минимизировать концентрации субстратов в сточной воде или обеспечивать поддержание концентраций субстратов в допустимых пределах при минимизации финансовых затрат на обеспечение процесса биоочистки.

Выводы. В статье продолжено математическое моделирование процесса биологической очистки сточных вод в аэротенке промежуточного типа. В математическую модель процесса биоочистки введена новая пороговая функция, обеспечивающая адекватность найденных значений концентрации кислорода в процессе вычислений в каждый момент времени. Включение в модель общей концентрации активного ила вместо концентраций отдельных его видов позволяет применять эту модель в реальном времени.

Предложенные управляющие параметры позволяют решать задачи прогнозирования и оптимизации процесса биоочистки. Результаты компьютерного моделирования показывают адекватность модели и предоставляют технолог очистных сооружений выбор стратегии действий: либо с целью минимизации выходных значений концентраций субстратов, либо для оптимизации финансовых расходов на обеспечение процесса биоочистки при поддержании выходных концентраций в допустимых границах.

Работа поддержана грантом РФФИ (грант № 18-01-00249).

Библиографический список

1. Gotovtsev A.V. Evaluating BOD and the Coefficient of Oxidation Rate: Monitoring, Direct and Inverse Problems, Formulas, Calculations and Tables // *Water Resources*. – 2016. – Vol. 43. – № 6. – P. 885–898. DOI: 10.1134/S0097807816050067
2. Savenko V.S. A Semiempirical Mathematical Model of the Secondary Pollution of Water Bodies by Soluble Iron and Manganese Forms // *Water Resources*. – 2016. – Vol. 43. – № 6. – P. 862–872. DOI: 10.1134/S0097807816060063
3. Evaluation of different nitrous oxide production models with four continuous long-term wastewater treatment process data series / M. Sperandio, M. Pocquet, L. Guo, B.-J. Ni, P.A. Vanrolleghem, Z. Yuan // *Bioprocess Biosyst Eng.* – 2016. – Vol. 39. – P. 493–510. DOI: 10.1007/s00449-015-1532-2
4. Mathematical simulating the process of aerobic granular sludge treating high carbon and nitrogen concentration wastewater / J. Zhao, J. Huang, M. Guan, Y. Zhao, G. Chen, X. Tian // *Chemical Engineering Journal*. – 2016. – № 306. – P. 676–684. DOI: 10.1016/j.cej.2016.07.098
5. Mathematical modeling of simultaneous carbon-nitrogen-sulfur removal from industrial wastewater / X.-J. Xu, C. Chen, A.-J. Wang, B.-J. Ni, W.-Q. Guo, Y. Yuan, C. Huang, X. Zhou, D.-H. Wu, D.-J. Lee, N.-Q. Ren // *Journal of Hazardous Materials*. – 2017. – № 321. – P. 371–381. DOI: /10.1016/j.jhazmat.2016.08.074
6. Numerical solution of a multi-class model for batch settling in water resource recovery facilities / P.A. Vanrolleghem, R. Bürger, S. Diehl, M.C. Martíá, P. Mulet, I. Nopens, E. Torfs // *Applied Mathematical Modelling*. – 2017. – Vol. 49. – P. 415–436. DOI: 10.1016/j.apm.2017.05.014
7. Mathematical modeling of autotrophic denitrification (AD) process with sulphide as electron donor / G. Xu, F. Yin, S. Chen, Y. Xu, H.-Q. Yu // *Water Research*. – 2016. – Vol. 91. – P. 225–234. DOI: 10.1016/j.watres.2016.01.011
8. Simsek H. Mathematical modeling of wastewater-derived biodegradable dissolved organic nitrogen // *Environmental Technology*. – 2016. – P. 2879–2889. DOI: 10.1080/09593330.2016.1167964
9. Грудяева Е.К., Душин С.Е. Анализ динамики процесс нитрификации в моделировании биологической очистки сточных вод ASM1 // *Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ*. – 2015. – Т. 1. – С. 12–17.

10. Grigorieva E.V., Bondarenko N.V., Khailov E.N. Time Optimal Control Problem for the Waste Water Biotreatment Model // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2015. – Vol. 21. – P. 3–24. DOI: 10.1007/s10883-014-9214-y

11. Villez K., Vanrolleghem P.A., Corominas L. Optimal flow sensor placement on wastewater treatment plants // Water Research. – 2016. – Vol. 101. – P. 75–83. DOI: 10.1016/j.watres.2016.05.068

12. Грудяева Е.К., Душин С.Е., Кузьмин Н.Н. Динамические модели управляемых биохимических процессов очистки сточных вод // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2015. – Т. 58. – № 9. С. 732–737. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-732-737

13. Грудяева Е.К., Душин С.Е. Логико-динамическое управление биохимическими процессами очистки сточных вод // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 7(168). – С. 208–219.

14. Грудяева Е.К., Душин С.Е., Капулина О.И. Влияние внешних факторов на управляемые биохимические процессы очистки сточных вод // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2017. – Т. 60. – № 9. – С. 891–897. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-891-897

15. Кириллов А.Н., Рейсс Т.В., Смирнов Н.В. Математическое моделирование процессов нитрификации и окисления органических веществ в проточной биосистеме // Ученые записки Петрозавод. гос. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – № 4(133). – С. 105–109.

16. Смирнов Н.В. Управление процессом биоочистки воды в аэротенке [Электронный ресурс] // Тр. XII Всерос. совещ. по проблемам управления ВСПУ-2014; Москва, 16–19 июня 2014 г. – М.: Изд-во Института проблем управления В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 6792–6799.

17. Кириллов А.Н., Смирнов Н.В. Параметрическая идентификация математической модели процесса биологической очистки в аэротенке // Тр. Карел. науч. центра Рос. акад. наук. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. – 2014. – № 4. – С. 67–74.

18. Смирнов Н.В., Новиков П.И. Компьютерное моделирование процесса биоочистки с кусочно-постоянным часовым расходом сточных вод // Вестник Пермского национального политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2017. – № 24. – С. 134–149.

19. Жмур Н.С. Управление процессом и контроль результата очистки сточных вод на сооружениях с аэротенкам. – М.: Луч, 1997. – 172 с.

20. A nonlinear observer for an activated sludge wastewater treatment process / В. Boulkroune, М. Darouach, S. Gille [at al.] // American Control Conference. – USA, 2009. – P. 1027–1033.

21. Центр высокопроизводительной обработки данных ЦКП КарНЦ РАН [Электронный ресурс]. – URL: <http://cluster.krc.karelia.ru> (дата обращения: 01.02.2018).

References

1. Gotovtsev A.V. Evaluating BOD and the Coefficient of Oxidation Rate: Monitoring, Direct and Inverse Problems, Formulas, Calculations and Tables. *Water Resources*, 2016, vol. 43, no. 6, pp. 885-898. DOI: 10.1134/S0097807816050067

2. Savenko V.S. A Semiempirical Mathematical Model of the Secondary Pollution of Water Bodies by Soluble Iron and Manganese Forms. *Water Resources*, 2016, vol. 43, no. 6, pp. 862-872. DOI: 10.1134/S0097807816060063

3. Sperandio M., Pocquet M., Guo L., Ni B.-J., Vanrolleghem P.A., Yuan Z. Evaluation of different nitrous oxide production models with four continuous long-term wastewater treatment process data series. *Bioprocess Biosyst Eng*, 2016, vol. 39, p. 493-510. DOI: 10.1007/s00449-015-1532-2

4. Zhao J., Huang J., Guan M., Zhao Y., Chen G., Tian X. Mathematical simulating the process of aerobic granular sludge treating high carbon and nitrogen concentration wastewater. *Chemical Engineering Journal*, 2016, no. 306, pp. 676-684. DOI: 10.1016/j.cej.2016.07.098

5. Xu X.-J., Chen C., Wang A.-J., Ni B.-J., Guo W.-Q., Yuan Y., Huang C., Zhou X., Wu D.-H., Lee D.-J., Ren N.-Q. Mathematical modeling of simultaneous carbon-nitrogen-sulfur removal from industrial wastewater. *Journal of Hazardous Materials*, 2017, no. 321, pp. 371-381. DOI: /10.1016/j.jhazmat.2016.08.074

6. Vanrolleghem P.A., Bürger R., Diehl S., Martíа M.C., Mulet P., Nopens I., Torfs E. Numerical solution of a multi-class model for batch settling in water resource recovery facilities. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, vol. 49, pp. 415-436. DOI: 10.1016/j.apm.2017.05.014

7. Xu G., Yin F., Chen S., Xu Y., Yu H.-Q. Mathematical modeling of autotrophic denitrification (AD) process with sulphide as electron donor. *Water Research*, 2016, vol. 91, pp. 225-234. DOI: 10.1016/j.watres.2016.01.011

8. Simsek H. Mathematical modeling of wastewater-derived biodegradable dissolved organic nitrogen. *Environmental Technology*, 2016, pp. 2879-2889. DOI: 10.1080/09593330.2016.1167964

9. Grudiaeva E.K., Dushin S.E. Analiz dinamiki protsess nitrifikatsii v modelirovanii biologicheskoi ochistki stochnykh vod ASM1 [Analysis of the dynamics of the nitrification process in the modeling of biological wastewater treatment ASM1]. *Izvestiia Sanktpeterburgskogo gosudarstvennogo elektrotekhnicheskogo universiteta "LETI"*, 2015, vol. 1, pp. 12-17.

10. Grigorieva E.V., Bondarenko N.V., Khailov E.N. Time Optimal Control Problem for the Waste Water Biotreatment Model. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2015, vol. 21, pp. 3-24. DOI: 10.1007/s10883-014-9214-y

11. Villez K., Vanrolleghem P.A., Corominas L. Optimal flow sensor placement on wastewater treatment plants. *Water Research*, 2016, vol. 101, pp. 75-83. DOI: 10.1016/j.watres.2016.05.068

12. Grudiaeva E.K., Dushin S.E., Kuz'min N.N. Dinamicheskie modeli upravliaemykh biokhimicheskikh protsessov ochistki stochnykh vod [Dynamic models of controlled biochemical wastewater treatment processes]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie*, 2015, vol. 58, no. 9, pp. 732-737. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-732-737

13. Grudiaeva E.K., Dushin S.E. Logiko-dinamicheskoe upravlenie biokhimicheskimi protsessami ochistki stochnykh vod [Logico-dynamic control of biochemical wastewater treatment processes]. *Izvestiia Iuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2015, no. 7(168), pp. 208-219.

14. Grudiaeva E.K., Dushin S.E., Kapulina O.I. Vliianie vneshnikh faktorov na upravliaemye biokhimicheskie protsessy ochistki stochnykh vod [The influence of external factors on the controlled biochemical processes of sewage treatment]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie*, 2017, vol. 60, no. 9, pp. 891-897. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-891-897

15. Kirillov A.N., Reiss T.V., Smirnov N.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov nitrifikatsii i okisleniia organicheskikh veshchestv v protochnoi biosisteme [Mathematical modeling of the processes of nitrification and oxidation of organic substances in a flowing biosystem]. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 4(133), pp. 105-109.

16. Smirnov N.V. Upravlenie protsessom bioochistki vody v aerotenke [Management of the process of bio-treatment of water in the aeration tank]. *Trudy XII Vserossiiskogo soveshchaniia po problemam*

upravleniia VSPU-2014, Moscow, 16-19 June 2014. Moscow: Institut problem upravleniia V.A. Trapeznikova RAN, 2014, pp. 6792-6799.

17. Kirillov A.N., Smirnov N.V. Parametricheskaiia identifikatsiia matematicheskoi modeli protsessa biologicheskoi ochistki v aerotenke [Parametric identification of the mathematical model of the biological treatment process in the aeration tank]. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk. Matematicheskoe modelirovanie i informatsionnye tekhnologii*, 2014, no. 4, pp. 67-74.

18. Smirnov N.V., Novikov P.I. Komp'yuternoe modelirovanie protsessa bioochistki s kusochnopostoianym chasovym raskhodom stochnykh vod [Computer simulation of the process of bio-purification with a piece-wise constant flow of sewage]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo politekhnicheskogo universitetam Elektrotehnika informatsionnye tekhnologii sistemy upravleniia*, 2017, no. 24, p. 134-149.

19. Zhmur N.S. Upravlenie protsessom i kontrol' rezul'tata ochistki stochnykh vod na sooruzheniakh s aerotenkam [The management of process and control wastewater treatment result on treatment plants with aeration tanks]. Moscow: Luch, 1997. 172 p.

20. Boulkroune B., Darouach M., Gille S. [at al.]. A nonlinear observer for an activated sludge wastewater treatment process. *American Control Conference. USA, 2009, pp. 1027-1033.*

21. Tsentr kollektivnogo ispol'zovaniia Karel'skogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk "Tsentr vysokoproizvoditel'noi obrabotki dannykh" [Center for Collective Use of the Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences "Center for High-Performance Data Processing"], available at: <http://cluster.krc.karelia.ru> (accessed 01 February 2018).

Сведения об авторах

Кириллов Александр Николаевич (Петрозаводск, Россия) – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11), профессор кафедры «Математический анализ» Петрозаводского государственного университета (185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33, e-mail: kirillov@krc.karelia.ru).

Смирнов Николай Васильевич (Петрозаводск, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и анализа данных» Петрозаводского государственного университета (185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33, e-mail: nvsmirnov87@gmail.com).

About the authors

Kirillov Alexander Nikolayevich (Petrozavodsk, Russian Federation) is a Doctor of Physics and Mathematics, Leading Research Associate of the Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences (185910, Petrozavodsk, 11, Pushkinskaya str., e-mail: kirillov@krc.karelia.ru), Professor Department of Mathematical Analysis Petrozavodsk State University (185910, Petrozavodsk, 33, Lenina ave., e-mail: kirillov@krc.karelia.ru).

Smirnov Nikolai Vasilevich (Petrozavodsk, Russian Federation) is a Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Probability Theory and Data Analysis Petrozavodsk State University (185910, Petrozavodsk, 33, Lenina ave., nvsmirnov87@gmail.com).

Получено 25.04.2018