

УДК 536-3:53.043:537.8

**В.С. Деева**

Томский политехнический университет, Томск, Россия

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА: МОДЕЛЬ АСИММЕТРИЧНОЙ  
ДЕФОРМАЦИИ КОНТАКТНЫХ ТЕЛ**

Представлена модель деформации поверхности при динамическом циклическом взаимодействии элементов контактной пары электрических машин, а именно проявления астигматизма. Методика моделирования основана на применении векторно-матричного метода, предложенного М. Герцбергером. При этом в модели учитывается механическое и электродинамическое силовое действие на деформацию, которое ведёт к появлению асимметрии в исходной осесимметричной форме поверхности контактного сопряжения тел. Результаты моделирования указывают на заметное влияние асимметрии от формы выпуклой неровности поверхности контактных тел, что можно использовать для прогноза состояния электромеханического контакта при эксплуатации в реальном времени.

**Ключевые слова:** выступы шероховатости, радиус кривизны, сопряжение поверхностей, надёжность.

**V.S. Deeva**

Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

**CONTACT MODELLING: ASYMMETRIC DEFORMATION  
OF THE CONTACTING BODIES**

The model of the surface deformation during cyclic interaction of the contact pairs of electrical machine is considered. In particular the profile deformation in form of astigmatism is emphasized. The Herzberger's dispersion formula is applied to create model. The mechanical force and electrodynamic action are taken into account to estimate surface deformation. These factors lead to the asymmetry of the surface having the axially symmetric shape in the beginning of the process. The results show significant dependencies of form of the inequality on the asymmetry. The findings are useful to predict the reliability of electromechanical contact elements during operation.

**Keywords:** roughness peak, radius of curvature, surface matching, reliability.

В работе [1] теоретически и экспериментально показано, что смещение осей симметрии сечений поверхностей элементов контактной пары вызывает: во-первых, возникновение достаточно сильного асимметричного действия мощных электромагнитных сил, обуславливающих в длительном циклическом контакте асимметрию формы и структуры неровностей поверхностей обоих элементов электриче-

ского контакта; во-вторых, резкий слабо прогнозируемый рост электроэрозионной, тепловой и электродинамической деформации контактных плоскостей вплоть до их расплавления и, в-третьих, при отсутствии контроля состояния элементов контакта, практически не прогнозируемое изменение пространственного положения контактных поверхностей элементов контактной пары.

Эффективное математическое моделирование при решении широкого спектра инженерных задач и, в частности, анализ напряженно-деформированного состояния тел [2–10] реализуется методом конечных элементов (МКЭ) на современном этапе развития расчетной базы. Применение МКЭ позволяет с высокой степенью точности учитывать особенности геометрии деформируемого тела, возможности задания свойств материала и действия внешних сил на контактную пару. Достоверность моделирования при этом методе существенно зависит от точности соответствия задаваемых в конечно-элементной модели параметров индивидуальной геометрии тел, механических свойств и характеристик материала тел контакта.

В современных теоретических расчётах деформации твердых тел механические (прочностные) характеристики материала принимают в виде осредненных или общих значений, получаемых в условиях стандартных испытаний. В реальности и тела природного происхождения, и композитные материалы имеют сложную геометрию неровностей поверхностей и очень сложный характер распределения неоднородности материала [3–9]. Индивидуальные свойства тел определяются технологическими аспектами изготовления, условиями эксплуатации изделия и многими другими факторами, это обуславливает, что механические характеристики конкретного образца часто имеют значительные отличия от принятых средних значений. Таким образом, прогноз деформированного состояния элементов контактной пары без учета проявляемой ими в процессе эксплуатации неоднородности материала и изменения реальной геометрии контактных поверхностей приводит к высокой погрешности, даже с применением такого эффективного инструмента, как МКЭ.

Целью настоящей работы является разработка относительно простой модели деформации поверхностей контактно сопрягаемых элементов для оперативного контроля изменения параметров элементов; прогноз состояния контакта моделированием формы выступов шероховатости поверхности элементов в реальном времени при их эксплуатации.

**Анализ проблем динамического контакта.** При выборе модели необходимо учитывать быстродействие реализации процесса моделирования при реальном циклическом электромеханическом взаимодействии [1]. Пространственно-временная изменчивость ограниченной области прямого контактного сопряжения поверхностей контактной пары может служить источником информации о тех физических процессах, которые происходят в реальной эксплуатации. Знание параметров этих изменений даёт возможность решения прогностических задач, связанных с обеспечением устойчивости требуемого режима коммутации тока высокой мощности и достижением показателей гарантированного ресурса работы выключателей тока.

Для извлечения информации о пространственно-временных изменениях поверхностей элементов при циклических взаимодействиях в различных режимах эксплуатации используются априорные предположения о характере функции описания формы профиля сопряжения элементов контакта  $g_{sc}(x, y, z)$ . Отклонение реальной пространственно-временной зависимости от априорной приводит к появлению погрешностей в прогнозе характеристик динамического контакта. В зависимости от того, известно ли заранее об отклонении, а также от того, закономерно ли оно произошло, погрешности оценки состояния контакта будут систематическими или случайными. Заметим, что реальная контактная поверхность не является гладкой, ей свойственны шероховатости – микро- и наноразмерные выступы и впадины (микро- и нанорельеф), и она не всегда осесимметрична.

В данной статье предложен контроль изменения контактного сопряжения элементов контактной пары для одного из типов отклонения поверхностей от исходной осесимметричной формы, а именно астигматизма, для улучшения коммутации при передаче электрической энергии. Предложенный подход, по мнению автора, является перспективным для исследования процессов деструкции электромеханического контакта в процессе динамического контактного взаимодействия. Он не накладывает серьёзных ограничений на основные параметры и характеристики контактного взаимодействия тел, что позволяет моделировать процесс взаимодействия с различной динамикой для получения тренда траектории изменения свойств механического контакта тел «в среднем».

Наряду с имеющимися достоинствами предложенного подхода присутствуют определённые трудности в правильной интерпретации результата, полученного при формировании прогноза состояния контакта, и его живучести. Сложный характер взаимного влияния действующих процессов деструкции поверхностей контакта, отсутствие достоверной информации о некоторых параметрах служат препятствием на пути создания универсального прогноза динамического состояния поверхностей. Для преодоления этих трудностей в модели электромеханического контакта учитываются изменения геометрии непосредственного сопряжения элементов, а именно появление динамической трёхмерной асимметрии поверхностей в ортогональных сечениях осесимметричных элементов.

Теоретическое описание и моделирование электромеханического контакта в работах [2–7] рассматриваются качественно. В данной работе для описания взаимосвязанных динамических процессов контактирования и деструкции поверхности элементов используется матричное представление уравнений динамики деформации. Учёт граничных условий и физически адекватных приближений приводит к замкнутой системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для динамических изменений в характерных точках поверхности контакта. Представленная система уравнений решается численно, и на её основе формулируется алгоритм диагностики в реальном времени.

**Физические факторы деформирования контактной поверхности.** В процессе производства или изготовления тел контактной пары неизбежно возникают погрешности отклонения профиля поверхностей от идеальной. Одной из характерных деформаций первоначально осесимметричной формы поверхностей элементов контакта является появление астигматического отклонения. Астигматическая деформация обусловлена податливостью, пластичностью и усталостью материала при многократном силовом воздействии на элемент контакта. Сопряжение элементов контакта сопровождается механическим и электродинамическим давлением на области прямого соприкосновения их поверхностей, вследствие чего закругления вершин профиля микронеровностей поверхности обоих элементов «теряют» свою осесимметричную форму, радиусы кривизны в меридиональном и сагиттальном сечениях становятся различными. Наличие такой деформации при измерении поверхности оптическими или телевизионными методами

контроля проявится в соответствующем виде дисторсии оптического изображения [1, 2].

**Моделирование астигматизма контактной поверхности.** Для выявления меры влияния астигматизма на изменение геометрии контакта поверхностей в стационарном и динамическом режимах контактного взаимодействия тел примем за основу уравнение поверхности второго порядка вида:

$$g_{sc}(x^*, y^*, z) = 2z + Cz^2 - Ax^{*2} - By^{*2} = 0. \quad (1)$$

Данное уравнение формы контактной поверхности  $g_{sc}$  записано в декартовой системе координат  $(x^*, y^*, z)$ , начало которой находится в вершине профиля микронеровности контактной поверхности, а направление оси  $z$  совпадает с линией пересечения плоскостей симметрии элементов контакта; коэффициенты  $A$  и  $B$  – значение кривизны поверхности в меридиональном и сагиттальном сечениях формы тела соответственно;  $C$  – постоянный коэффициент, определяющий тип формы поверхности. Поверхность описывается дифференциальным уравнением  $m$ -порядка. На рисунке представлен вид контактной поверхности второго порядка.

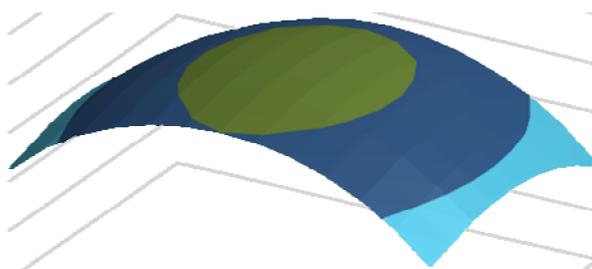


Рис. Контактная поверхность 2-го порядка

Заметим, что моделирование астигматизма контактной поверхности уравнением (1) в отличие от моделирования криволинейной поверхности уравнением тороида [13] является частным случаем. Асферическую контактную поверхность чётного порядка в наиболее общем представлении в системе координат с началом установленным в вершине профиля микронеровности поверхности можно описать уравнением вида [11–14]:

$$g(\rho, z) = z - \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2 \cdot \rho^2}} - \sum \alpha_i \rho^{2i} = 0,$$

где  $c$  – кривизна в области вершины выступа неровности контактной поверхности;  $k$  – квадрат показателя эксцентриситета формы вершины выступа;  $\alpha_i$  – коэффициенты асферической деформации выступа контактной поверхности, соответствующие порядку аббераций ( $i = 1, 2, 3, \dots$ );  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Для моделирования пространственно-временного трансформирования контактной поверхности применим известную методику вычисления астигматизма и асимметрии [13]. При описании начальных данных, определяющих геометрическое представление решаемой задачи, используем векторы  $\mathbf{A}(x, y)$  и  $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ . В обозначении векторов:  $(x, y)$  – координаты точки пересечения лучей нормали к образующей поверхности плоскости  $XOY$ ;  $(\xi, \eta)$  – направляющие косинусы лучей нормали (как радиусы кривизны выступов поверхности) соответственно относительно осей  $X$  и  $Y$ .

Сущность идеи применения этой методики заключается в следующем. Основные свойства формы контактной поверхности в выбранной системе координат описываются матрицей  $\mathbf{M}$ -преобразования, матричные элементы которой вычисляются по конкретным параметрам контактного тела. В частности, такими параметрами являются радиусы кривизны выступов микронеровностей контактных поверхностей и расстояния между их вершинами. Определение параметров матрицы  $\mathbf{M}$  даёт возможность оценить положение и форму сопряженных плоскостей, которыми в решаемой задаче являются контактные поверхности. Такой подход, по нашему мнению, позволяет разработать алгоритмы расчета различного типа деформации форм контактных поверхностей, произвольным образом расположенных в контактном пространстве.

Моделирование ведется с использованием векторно-матричного метода, предложенного в [13] и развитого в [14]. В приведённом ниже изложении нет системного раскрытия известных алгоритмов метода Герцбергера. Алгоритмы приняты и приведены в готовом для использования виде и расположены в порядке вычисления.

Покажем, что конечные координаты векторов отражённых поверхностью лучей  $\mathbf{A}'(x', y')$  и  $\mathbf{S}'(\xi', \eta')$ , где  $(x', y')$  – координаты точки пересечения отражённых поверхностью лучей нормали к образующей

поверхности плоскости  $XOY$  и  $(\xi', \eta')$  – направляющие косинусы отражённых поверхностью лучей нормали соответственно относительно осей  $X$  и  $Y$  связаны с начальными координатами исходного состояния контактной поверхности матричным соотношением

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{S}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{S} \end{vmatrix},$$

где  $\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{vmatrix}$ ;  $\beta = \begin{vmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{vmatrix}$ ;  $\gamma = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ ;  $\delta = \begin{vmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{vmatrix}$ .

Матричные элементы определяются по аналогии с [13] с учётом степени деформации контактной поверхности  $\zeta^2$ , т.е. по величине отклонения текущей нормали деформированной контактной поверхности от нормали исходной поверхности:

$$\begin{aligned} X &= \zeta x, \quad Y = \zeta y, \quad D = \zeta^2 - AX\xi - BY\eta; \\ q^2 &= D^2 - (AX^2 + BY^2)(A\xi^2 + B\eta^2 - C\zeta^2), \quad q > 0; \\ z &= \frac{D - q}{A\xi^2 + B\eta^2 - C\zeta^2} = \frac{AX^2 + BY^2}{D - q}; \\ X^* &= X + z\xi; \quad Y^* = Y + z\eta; \\ R &= A(A + C)X^{*2} + B(B + C)Y^{*2} + \zeta^2; \\ q'^2 &= \zeta^2 R + q^2, \quad q' > 0, \quad q' = -q \text{ (для нормали отражения);} \\ \psi &= (q' - q)R; \quad t = 1 + \psi(1 + Cz); \quad \zeta' = \zeta t; \\ \gamma_1 &= -A\psi\xi; \quad \delta_1 = 1 - A\psi z; \\ \gamma_2 &= -B\psi\xi; \quad \delta_2 = 1 - B\psi z; \\ \alpha_1 &= (\zeta t - \gamma_1 z) / \zeta'; \quad \beta_1 = z(t - \delta_1) / \zeta; \\ \alpha_2 &= (\zeta t - \gamma_2 z) / \zeta'; \quad \beta_2 = z(t - \delta_2) / \zeta. \end{aligned}$$

Расчёт деформации поверхностей, обладающих осевой симметрией, основывается на их описании уравнением:

$$g_{sc}(u^*, z) = 0; \quad \rho = \sqrt{2u^*}; \quad \rho = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}. \quad (2)$$

В расчетах [13] промежуточная величина  $q$  для преломления вычисляется без учета знака сагиттального радиуса кривизны  $r_s$ , т.е.  $q' = \sqrt{q'^2}$ . В [14] показано, что лучше расчёт проводить с учётом знака. При этом формула для расчёта величины  $q$  имеет следующий вид:  $q' = \text{sign}(r_s) \cdot \sqrt{q'^2}$ . Это уточнение особенно важно при расчете поверхностей высшего порядка с радиусом кривизны при вершине, стремящихся к бесконечности.

Алгоритмы расчета поверхностей второго порядка, обладающих осевой симметрией, разработанные Герцбергером [13], описываются уравнением вида:

$$g_{sc}(u^*, z) = z + 0,5 \cdot b \cdot c \cdot z^2 - b \cdot u^* = 0, \quad (3)$$

для поверхностей высшего порядка:

$$g_{sc}(u^*, z) = z - \sum_{i=1}^n c_i \cdot u^{*i} = 0. \quad (4)$$

При описании поверхностей второго порядка, не обладающих осевой симметрией, наблюдаем подобие уравнению формы (1). Таким образом, уравнение поверхности (1) даёт хорошие результаты при математическом моделировании и расчете астигматических ошибок осесимметричных тел контакта и при решении других задач [15].

**Выводы.** В работе предложена математическая модель асимметричного астигматического пространственно-временного изменения формы криволинейного сечения – поверхности сопряжения тел, применяемая для диагностики состояния и управления токовой нагрузкой тел контактной пары электромеханического контакта в реальном времени. Проявление астигматизма контактного сечения в результате «механической ползучести» тел контактной пары увеличивает площадь реального контакта в сечении расслоения «трубки» тока динамического контактного пространства выключателя при разрыве/соединении электрических линий, что ведёт к снижению плотности распределения тока в этом сечении. Другими словами, асимметрии контакта элементов является положительным фактором с точки зрения снижения деструктивного действия энергии электрического тока. Астигматизм контактного сечения ведет к повышению надёжности функционирования выключателей тока и напряжения при их эксплуатации.

### Библиографический список

1. Слободян С.М., Деева В.С. Влияние смещения осей симметрии контакта выключателя тока // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2017. – № 23. – С. 17–32.
2. Brown R.G. Introductory Physics I. Elementary Mechanics. – New York: Duke University, Physics Department Durham, 2013. – 701 p.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
5. Naumenko K., Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – 220 p.
6. Betten J. Creep Mechanics. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
7. Sweeney J., Bonnerb M, Ward I. Modelling of loading, stress relaxation and stress recovery in a shape memory polymer // J. of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2014. – Vol. 37. – P. 12–23.
8. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. The response of a glassy polymer in a loading-unloading deformation: the stress memory experiment // Polymer. – 2013. – Vol. 54, № 21. – P. 5993–6002.
9. Mortazavian S., Fatemi A. Fatigue behavior and modeling of short fiber reinforced polymer composites: A literature review // International Journal of Fatigue. – 2015. – Vol. 70. – P. 297–321.
10. Study of a nonequilibrium plasma model of surface discharge and the influencing factors / W. Sima, C. Liu, M. Yang, H. Xu, Q. Shao // IEEE Transactions on Plasma Sciences. – 2017. – Vol. 45(6). – P. 906–912.
11. Whitehead A.N. An Introduction to Mathematics. – New York: Create Space Independent Publishing Platform, 2016. – 218 p.
12. NIST Handbook of Mathematical Functions / F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 967 p.
13. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика / пер. с англ. Е.Д. Трифонова. – М.: Иностр. лит-ра, 1962. – 487 с.
14. Агапов Н.А. Моделирование погрешностей изготовления оптических поверхностей // Оптика атмосферы и океана. – 1989. – Т. 2. – № 7. – С. 776–777.

15. Linear elastic contact of the Weierstrass profile / M. Ciavarella, G. Demelio, J.R. Barber, Y.H. Jang // Proc Roy Soc London A. – 2000. – Vol. 456. – P. 387–405.

### References

1. Slobodian S.M., Deeva B.S. Vliianie smeshcheniia osei simmetrii kontakta vykliuchatel'ia toka [The effect of the misalignment of the axis on the power switch]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotehnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniia*, 2017, no. 23, pp. 17-32.

2. Brown R.G. Introductory Physics I. Elementary Mechanics. New York: Duke University, Physics Department Durham, 2013. 701 p.

3. Kristensen R. Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Mechanics of Composite Materials]. Moscow: Mir, 1982. 334 p.

4. Dzhonson K. Mekhanika kontaktnogo vzaimodeistviia [Contact Mechanics]. Moscow: Mir, 1989. 509 p.

5. Naumenko K., Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. 220 p.

6. Betten J. Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 p.

7. Sweeney J., Bonnerb M, Ward I. Modelling of loading, stress relaxation and stress recovery in a shape memory polymer. *J. of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2014, vol. 37, pp. 12-23.

8. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. The response of a glassy polymer in a loading-unloading deformation: the stress memory experiment. *Polymer*, 2013, vol. 54, no. 21, pp. 5993-6002.

9. Mortazavian S., Fatemi A. Fatigue behavior and modeling of short fiber reinforced polymer composites: A literature review. *International Journal of Fatigue*, 2015, vol. 70, pp. 297-321.

10. SimaW., Liu C., Yang M., Xu H., Shao Q. Study of a nonequilibrium plasma model of surface discharge and the influencing factors. *IEEE Transactions on Plasma Sciences*, 2017, vol. 45(6), pp. 906-912.

11. Whitehead A.N. An Introduction to Mathematics. New York: Create Space Independent Publishing Platform, 2016. 218 p.

12. Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 967 p.

13. Gertsberger M. *Sovremennaia geometricheskaia optika* [Modern Geometrical Optics]. Moscow: Inostrannaia literaturara, 1962. 487 p.

14. Agapov N.A. Modelirovanie pogreshnostei izgotovleniia opticheskikh poverkhnostei [Errors modelling in optical surface making]. *Optika atmosfery i okeana*, 1989, vol. 2, no. 7, pp. 776-777.

15. Ciavarella M., Demelio G., Barber J.R., Jang Y.H. Linear elastic contact of the Weierstrass profile. *Proc Roy Soc London A*, 2000, vol. 456, pp. 387-405.

#### **Сведения об авторе**

**Деева Вера Степановна** (Томск, Россия) – кандидат технических наук, доцент Томского политехнического университета (634050, Томск, пр. Ленина, 30, +7-3822-303-133, e-mail: veradee@mail.ru).

#### **About the author**

**Deeva Vera Stepanovna** (Tomsk, Russian Federation) is a Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor in Tomsk Polytechnic University (634050, Tomsk, Lenina ave., 30, +7-3822-303-133, e-mail: veradee@mail.ru).

Получено 30.01.2018