

УДК 519.6: 629.7.036.3

**А.Р. Яматов**

Пермский военный институт внутренних войск МВД России, Пермь

## **МЕТОДИКА СИНТЕЗА СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОГО ГРАДИЕНТА В ПРОЦЕДУРЕ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА**

Предложена новая методика применения модифицированного градиента процедуры наискорейшего спуска для построения структурной схемы надежности системы. Проведен сравнительный анализ с данными, полученными другими методами. Проведено исследование эффективности методов с применением процедуры наискорейшего спуска при синтезе структурной схемы надежности (ССН) системы. Определены дополнительные этапы к методу наискорейшего спуска, повышающие качество ССН-системы, а в большинстве случаев приводящие ССН-системы к оптимуму. Применение предлагаемого метода, а также процедуры адаптации градиента обеспечивает существенное снижение информационной сложности алгоритма поиска оптимального решения. Включая либо заменяя в градиенте различные параметры, методику возможно применять для расчета иных систем, используя другие критерии (вес, площадь или объем оборудования и т.д.).

**Ключевые слова:** наискорейший спуск, модифицированный градиент, динамическое программирование, проектирование структурной схемы надежности, оптимизация, резервирование.

**A.R. Yamatov**

Perm Military Institute of Internal Troops under Domestic Affairs Ministry

## **SYNTHESIS APPROACH TO THE STRUCTURAL SYSTEM RELIABILITY USING MODIFIED GRADIENT IN THE QUICKEST DESCENT PROCEDURE**

There has been suggested a new approach to using modified gradient in the quickest descent procedure in order to create the structural system reliability. In the course of the research there has been conducted comparative analysis of data obtained with the help of other methods. Efficiency of the methods has been studied by means of the quickest descent procedure when synthesizing the structural system reliability. Some additional stages for the quickest descent approach have been specified which increase the structural system reliability quality and, in most cases, optimize the system performance. Using the given approach and gradient adaptation procedure leads to considerable decrease of information-based complexity in optimal solution search algorithm. By adding or replacing gradient parameters, the new approach can be applied to calculate other systems using various measures (weight, area, equipment size, etc).

**Keywords:** the quickest descent, modified gradient, dynamic programming, structural system reliability design, optimization, redundancy.

Обеспечение требуемой надежности устройства связано со всеми этапами его жизни: проектированием, созданием и практическим использованием. На этапе проектирования обеспечение требуемой надежности достигается методами, не требующими резервирования [1].

В тех случаях, когда такие способы повышения надежности устройства исчерпаны, но не обеспечивают получения заданных параметров, например заданного времени наработки на отказ, с целью дальнейшего повышения надежности прибегают к резервированию.

Актуальной проблемой при проектировании оптимальных систем управления и структурных схем надежности (ССН) является обеспечение высокой надежности при ограниченных ресурсах. Поэтому актуальной научной проблемой является разработка новых эффективных математических методов и алгоритмов построения оптимальной системы по критерию надежности, когда заданная надежность достигается при минимально возможном количестве или минимальной стоимости резервного оборудования, или при заданном объеме или стоимости резервного оборудования достигается максимально возможная надежность.

Государственный стандарт [2] устанавливает общие правила расчета надежности технических объектов, требования к методикам и порядок представления результатов расчета надежности, но не определяет методы проектирования ССН-системы.

Задачу проектирования оптимальной ССН-системы возможно решить методом Беллмана (динамическое программирование) [3, 4], методом наискорейшего спуска [5, 6, 7] и методом с применением генетического алгоритма [8]. Часто такие решения имеют близкие к оптимальным параметры в связи с особенностями их применения.

Целями данной статьи являются доказательство преимущества новой методики применения наискорейшего спуска с модифицированным градиентом и определение путей дальнейшей оптимизации ССН-системы (проверка на наличие более оптимальной системы).

### **Определение градиента для реализации наискорейшего спуска**

Упрощенная методика синтеза ССН-системы на основе процедуры наискорейшего спуска описана в [6, 7]. В методике использовался градиент

$$(\delta_i^j)^* = \max\{\delta_i^j\} \text{ для } i = \overline{1,5},$$

$$\delta_i^j = \frac{P_i^{j+1}(t) - P_i^j(t)}{W_i \cdot P_i^{j+1}(t)}, \quad (1)$$

где  $j$  – номер итерации, начинающийся с 0, это ССН, полученная на первом этапе;  $P_i$  – вероятность безотказной работы (ВБР) подсистемы;  $W_i$  – стоимость подсистемы.

Градиент (1) не учитывает применения мажоритарного резервирования, и в методике не рассмотрены методы по дальнейшей оптимизации полученных результатов.

В подразделе 8.8.4 [4] и источнике [9] для вычисления градиента, если переменные имеют разные единицы измерения, предлагается перейти к относительным переменным  $y_i$ , используя минимально и максимально возможные значения переменных  $x_i$ :

$$y_i = \frac{x_i - x_i^{\min}}{x_i^{\max} - x_i^{\min}}. \quad (2)$$

На этой основе предлагаются модифицированный градиент, позволяющий получить ССН-системы с близкими к оптимальным параметрами, и методика дальнейшей оптимизации ССН-системы:

$$(\delta_i^j)^* = \max\{\delta_i^j\} \text{ для } i = \overline{1,5},$$

$$\delta_i^j = \frac{P_i^{j+1}(t) - P_i^j(t)}{W_{i+1} \cdot W_1}. \quad (3)$$

### Методика синтеза ССН системы с применением модифицированного градиента и этапы ее оптимизации

Пусть система включает в свой состав  $n$  подсистем. Известны значения ВБР  $P_i$  и стоимости  $W_i$  (где  $i = 1, \dots, n$ ) каждой из подсистем.

Модель задачи будет иметь вид

$$P_c(t) = \prod_{j=1}^N \varphi_j(m_j) \rightarrow \max, \quad (4)$$

где  $P_c(t)$  – вероятность безотказной работы искомой (полученной) системы;  $\varphi_j(m_j)$  – вероятность безотказной работы  $j$ -го блока с  $m_j$  дублирующими элементами.

$$W_c = \sum_{j=1}^N W_j m_j \leq Q, \quad \forall m_j \geq 0, \text{int}, \quad (5)$$

где  $W_c$  – стоимость искомой (полученной) системы.

Две постановки задачи оптимизации ССН системы выглядят следующим образом:

- 1) построить систему с резервированием элементов по критерию

$$W_c \rightarrow \min \text{ при } P_c(t) \geq P_c^z(t), \quad (6)$$

где  $P_c^z(t)$  – заданная ВБР системы.

- 2) построить систему с резервированием элементов по критерию

$$P_c(t) \rightarrow \max \text{ при } W_c \leq W_c^z, \quad (7)$$

где  $W_c^z$  – заданная стоимость системы.

На **первом этапе** оптимизации по первому критерию добиваются выполнения условия  $P_i(t) \geq P_n^z(t)$ , то есть ВБР каждой из подсистем должна быть не хуже заданной.

На **втором этапе** итеративно увеличивают резервы по наибольшему приращению ВБР на единицу  $(\delta_i^j)^* = \max\{\delta_i^j\}$ .

Если условие  $P_c(t) \geq P_c^z(t)$  не выполняется, повторяют 2-й этап.

Далее находим стоимость реализации системы  $W_n^{\min}$  при достигаемой  $P_c(t) \geq P_c^z(t)$ .

При применении методики с модифицированным градиентом (3) для расчета систем с ограничением по стоимости и МР первого элемента, ССН оптимальны в 44 % случаев (с градиентом (1) 36 %). Методы дальнейшей оптимизации, описанные ниже, приводят к 95%-ному совпадению ССН с оптимальной.

При применении мажоритарного резервирования (МР) первого элемента при некоторых исходных данных решение приводит к резервированию 3 из 5, хотя резервирования 2 из 3 уже было достаточно [10]. В таких случаях предлагается повторить расчеты с шага, где МР 2 из 3 уже применено, игнорируя  $\delta_1^j$ .

Данная методика также была адаптирована для синтеза ССН с ограничением стоимости, и результаты эксперимента в большинстве случаев оптимальны или близки к ним (отклонения стоимости не более 8 %). Дополним метод этапами, повышающими качество ССН системы.

На **третьем этапе**, если результат близок к оптимальному, а для одного или нескольких блоков выполняется условие

$$W_c^z - W_c \geq W_i, \quad (8)$$

тогда из них выбирается блок с минимальной достигнутой вероятностью  $\varphi_j(m_j)$  для дальнейшего резервирования.

Не более чем в 5 % случаев метод приводит к экстремально близкому решению (ССН), а условие  $W_c^z - W_c \geq W_i$  не выполняется. Данные решения встречаются при применении МР первого элемента. Попытка исключить такие «неоптимальные» решения осуществляется на **четвертом этапе**. На нем предлагается произвести повторный расчет, используя модифицированный градиент (3), приведенный к виду

$$\delta_i^j = \frac{P_i^{j+1}(t) - P_i^j(t)}{W_i}, \quad (9)$$

т.е. как и для блоков с резервированием замещением. После этого при условии (8) выполняем третий этап.

Третий и четвертый этапы в 95 % случаев приводят к оптимальной ССН, совпадающей с решением, найденным методом перебора, а оставшиеся 5 % полученных ССН экстремально близки к оптимальным. Использование предложенной методики позволит сократить вычислительную сложность синтеза ССН до нескольких итераций и получить систему с оптимальными значениями искомых параметров.

### Пример применения методики

Решим задачу для критерия  $P_c(t)$  с целью определения оптимальной стратегии дублирования в указанных пределах.

Пусть система автоматизации включает в свой состав пять подсистем при известных значениях ВБР  $P_i$  и стоимости  $W_i$ , где  $i = \overline{1,5}$  каждого из устройств.

При синтезе оптимальной ССН допускается: мажоритарное резервирование подсистемы 1 на начальном шаге оптимизации и резервирование замещением с нагруженным режимом работы элементов на других шагах. В случае необходимости возможна замена мажоритарного резервирования на резервирование замещением с нагруженным режимом работы элементов уже на начальном шаге либо использование МР 3 из 5; резервирование замещением с нагруженным режимом работы элементов для подсистем 2,3,4; резервирование замещением с нагруженным либо ненагруженным режимом работы резервных элементов для подсистемы 5. Ненадежностью и стоимостью мажоритарных элементов и переключающих устройств можно пренебречь.

Заданные значения ВБР подсистем:  $P_1 = 0,9$ ;  $P_2 = 0,75$ ;  $P_3 = 0,82$ ;  $P_4 = 0,8$ ;  $P_5 = 0,9$ ; их стоимости  $W_1 = 16$ ;  $W_2 = 11$ ;  $W_3 = 13$ ;  $W_4 = 12$ ;  $W_5 = 15$  соответственно. Заданное значение ВБР системы  $P_c^z(t) = 0,94$ ; заданное (допустимое) значение стоимости системы  $W_c^z = 120$ .

### Решение

Найдем  $W_c \rightarrow \min$  при  $P_c(t) \geq P_c^z(t)$ .

Для начала проверим выполнение такого условия  $P_i(t) \geq P_c^z(t)$  для каждого  $i$  от 1 до 5.

Видно, что ни для одного из участков системы это условие не выполняется, поэтому необходимо введение резервных элементов.

На первом этапе оптимизации получим следующую ССН – 3,3,2,2,2 (опорная схема), где

$$P_1(t) = 3P_1^2 - 2P_1^3 = 0,972 > P_n^z(t) \cdot P_2(t) = 1 - (1 - P_2)^3 = 0,9844 > P_n^z(t).$$

$$P_3(t) = 1 - (1 - P_3)^2 = 0,9676 > P_n^z(t).$$

$$P_4(t) = 1 - (1 - P_4)^2 = 0,96 > P_n^z(t).$$

$$P_5(t) = 1 - (1 - P_5)^2 = 0,99 > P_n^z(t).$$

Найдем ВБР системы и ее стоимость на 0-шаге.

$$P_n^0 = 0,972 \cdot 0,9844 \cdot 0,9676 \cdot 0,96 \cdot 0,99 = 0,8799 < P_n^z(t),$$

$$W_n^0 = 3 \cdot 16 + 3 \cdot 11 + 2(13 + 12 + 15) = 161.$$

Теперь, когда каждая подсистема обладает ВБР большей либо равной заданной, перейдем ко второму этапу – начнём увеличивать ВБР всей системы.

Попробуем увеличить ВБР для 1 подсистемы. Поскольку разрешено использовать неадаптивное мажоритарное резервирование то теперь придётся вводить 5 каналов и осуществлять выбор 3 из 5:

$$P_1^1(t) = P^5 + 5P^4(1 - P) + 10P^3(1 - P)^2.$$

На остальных участках – резервирование замещением с нагруженным режимом работы резервных подсистем, т.е.  $P_i^1(t) = 1 - (1 - P_i)^n$  – работает хотя бы один канал из имеющихся.

Получим:

$$P_1^1(t) = P^5 + 5P^4(1 - P) + 10P^3(1 - P)^2 = 0,99144;$$

$$P_2(t) = 1 - (1 - P_2)^4 = 0,996; \quad P_3(t) = 1 - (1 - P_3)^3 = 0,994;$$

$$P_4(t) = 1 - (1 - P_4)^3 = 0,992; \quad P_5(t) = 1 - (1 - P_5)^3 = 0,994.$$

Используя модифицированный градиент (2) определим  $(\delta_i^j)^* = \max\{\delta_i^j\}$ .  $(\delta_i^j)^* = \delta_4^1$ , значит, очередной элемент надо добавить на 4-м участке. Следовательно, ССН для шага  $j = 1$  будет иметь вид 3,3,2,3,2.

$$P_n^1 = 0,972 \cdot 0,9844 \cdot 0,9676 \cdot 0,992 \cdot 0,99 = 0,909 < P_n^z(t),$$

$$W_n^1 = W_n^0 + W_4 = 173.$$

Таким образом, увеличиваем резерв только на четвертом участке, остальные без изменений.

Шаг за шагом, резервируя элементы, указанные модифицированным градиентом (3), получим ССН 3,4,3,3,4, для которой

$$P_n^3 = 0,972 \cdot 0,9961 \cdot 0,994 \cdot 0,992 \cdot 0,99 = 0,945.$$

Стоимость реализации системы на третьем шаге оптимизации:

$$W_n^3 = W_n^2 + W_2 = 197.$$

Таким образом, минимальная стоимость реализации системы  $W_n^{\min} = 197$  при достигаемой  $P_c(t) = 0,945$  больше заданной 0,94.

Решение этой задачи с применением градиента (1) привело к ССН 5,3,3,3,2 с  $P_c(t) = 0,953$  при  $W_n^{\min} = 218$ .

Результаты анализа частоты и величины подобных отклонений были приведены выше.

Далее приводятся результаты экспериментального решения поставленной задачи методом наискорейшего спуска с градиентами (1), (3) и методом Беллмана.

### Результаты эксперимента по применению процедуры наискорейшего спуска

Алгоритмы, реализующие методы перебора и наискорейшего спуска, были реализованы в программном продукте.

Было проведено исследование на применение модифицированного градиента для синтеза ССН различной размерности. Большая часть ССН совпала с найденными методом перебора – 95 % случаев. Результаты с отклонениями при применении методики без МР представлены в табл. 1.

Результаты расчета при применении методики с МР первого блока представлены в табл. 2. Результаты с отклонениями от найденных методом перебора выделены курсивом. Строки с решениями представлены в порядке, указанном в заголовке табл. 1 и 2.

При попытке применить МР первой подсистемы с ограничением по стоимости процедура не может построить систему из-за нехватки ресурсов. В этом случае осуществляем построение системы, не используя МР.

Таблица 1

Результаты применения методики без МР

Заданная ВБР и стоимость системы		Перебор					
		Наискорейший спуск с градиентом (3)			Наискорейший спуск с градиентом (1)		
		$W_c \rightarrow \min$ при $P_c(t) \geq P_c^z(t)$			$P_c(t) \rightarrow \max$ при $W_c \leq W_c^z$		
		ССН	$P_c(t)$	$W_c$	ССН	$P_c(t)$	$W_c$
1	0,93 100	22322	0,9323	120	22212	0,7846	96
		22322	0,9323	120	22212	0,7846	96
		22322	0,9323	120	22211	0,7264	87
2	0,92 100	32224	0,9252	136	22212	0,7661	96
		33222	0,9394	139	22212	0,7661	96
		33223	0,9394	139	22212	0,7661	96
3	0,94 115	32332	0,9514	170	31221	0,7406	114
		32332	0,9514	170	31221	0,7406	114
		32332	0,9514	170	21221	0,7053	103
4	0,92 110	43222	0,9267	103	33223	0,9442	105
		33223	0,9442	105	33223	0,9442	105
		33223	0,9442	105	33223	0,9442	105
5	0,93 60	32324	0,9393	82	22214	0,7915	60
		32324	0,9393	82	22214	0,7915	60
		32324	0,9393	82	22213	0,7764	57

Таблица 2

Результаты применения методики с МР первого блока

Заданная ВБР и стоимость системы		Перебор					
		Наискорейший спуск с градиентом (3)					
		Наискорейший спуск с градиентом (1)					
		$W_c \rightarrow \min$ при $P_c(t) \geq P_c^z(t)$			$P_c(t) \rightarrow \max$ при $W_c \leq W_c^z$		
		ССН	$P_c(t)$	$W_c$	ССН	$P_c(t)$	$W_c$
1	0,93 100	33322	0,9333	142	22212	0,7846	96
		33322	0,9333	142	22212	0,7846	96
		33322	0,9333	142	22211	0,7264	87
2	0,94 120	33323	0,9458	129	23323	0,9633	119
		33323	0,9458	129	23323	0,9633	119
		53322	0,9462	139	23323	0,9633	119
3	0,93 105	53344	0,9321	149	32233	0,8444	101
		53344	0,9321	149	32233	0,8444	101
		53344	0,9321	149	32232	0,8122	94
4	0,92 110	55334	0,9202	160	53222	0,8597	109
		54434	0,9217	162	53222	0,8597	109
		54434	0,9217	162	53222	0,8597	109
5	0,93 60	53424	0,9322	106	22214	0,7915	60
		53424	0,9322	106	22214	0,7915	60
		53424	0,9322	106	22213	0,7764	57

Анализ результатов позволяет судить о достаточной точности метода наискорейшего спуска с применением модифицированного градиента. Даже если обратить внимание на отклонения в задачах 2 и 7 (см. табл. 2), то мы увидим прирост ВБР за минимальную стоимость.

Проведен анализ эффективности различных методов оптимизации при синтезе структурной схемы надежности системы.

При применении МР качество ССН системы выше при применении градиента (3). А выполнение 3-го и 4-го этапов оптимизации в 95 % приводит показатели ССН системы к оптимальным параметрам.

В процедуре наискорейшего спуска для задач без МР, использование градиентов (1), (3), (9) приводит к одинаковым результатам.

### Библиографический список

1. Золотова Т.М., Кербников Ф.И., Розенблат М.А. Резервирование аналоговых устройств автоматики. – 2-е изд. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 128 с.
2. ГОСТ 27.301-95. Надежность в технике. Расчет надежности. Основные положения (взамен ГОСТ 27.410-87 (в части п. 2); введ. 01.01.1997). – М.: Изд-во стандартов, 1996. – 9 с.
3. Надежность и эффективность в технике: справочник: в 10 т. / ред. совет: В.С. Авдуевский (пред.) [и др.] Т. 2: Математические методы в теории надежности и эффективности / под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Машиностроение, 1987. – 280 с.
4. Гольдштейн А.Л. Теория принятия решений. Задачи и методы исследования операций и принятия решений: учебное пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2002. – 357 с.
5. Luenberger D.G., Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. – 3 rd ed. – Springer, 2008. – 550 p.
6. Основи надійності цифрових систем: підручник / за ред. В.С. Харченко, В.Я. Жихарева / Міністерство освіти та науки. – Харків, 2004. – 572 с.
7. Надежность, контроль и диагностика ЭВМ: метод. пособие / сост. В.С. Харченко, И.В. Лысенко. – Харків: Изд-во ХАИ, 2001. – 65 с.
8. Cao Dingzhou, Kan Shaobai, Sun Yu. Design of Reliable System Based on Dynamic Bayesian Networks and Genetic Algorithm [Электронный ресурс] // Reliability and Maintainability Symposium, 23–26 January, 2012. – P. 1–6. – URL: [http://www.reliasoft.com/pubs/2012\\_RAMSDesign\\_of\\_reliable\\_system.pdf](http://www.reliasoft.com/pubs/2012_RAMSDesign_of_reliable_system.pdf)
9. Методические указания к лабораторной работе «Моделирование систем сетевого планирования и управления» по курсу «Экономико-математические модели и методы» / сост. Т.В. Алесинская. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999. – 36 с.
10. Анализ методов обеспечения пассивной отказоустойчивости цифровых устройств и систем / С.Ф. Тюрин, О.А. Громов, А.А. Сулейманов, А.В. Греков // Вестник ПГТУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – Пермь, 2011. – № 5. – С. 144–153.

### **Сведения об авторе**

**Яматов Айдар Русланович** (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Пермского военного института внутренних войск МВД России (614108, г. Пермь, ул. Гремячий Лог, д. 1, e-mail: yamatov@mail.ru).

### **About the author**

**Yamatov Aidar Ruslanovich** (Perm, Russian Federation) is Senior Lecturer at the Computer Software and Automated Systems Department, Perm Military Institute of Internal Troops under Domestic Affairs Ministry, (614108, 1, Gremyachy Log, Perm, e-mail: yamatov@mail.ru).

Получено 06.09.2013