УДК 621.372.542

И.Н. Липатов

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ СИГНАЛА

Рассматривается использование адаптивного фильтра (АФ) для линейного предсказания двух видов сигнала. В качестве АФ применяется адаптивный RLS-фильтр. Решение задачи линейного предсказания двух видов сигнала с использованием RLS-фильтра смоделировано на ЦВМ. Приводятся результаты моделирования. Оценены среднеквадратические значения ошибок предсказания для двух видов сигнала.

Рассматривается АФ, использующий образцовый сигнал. Общая структура такого АФ показана на рис. 1 [1].

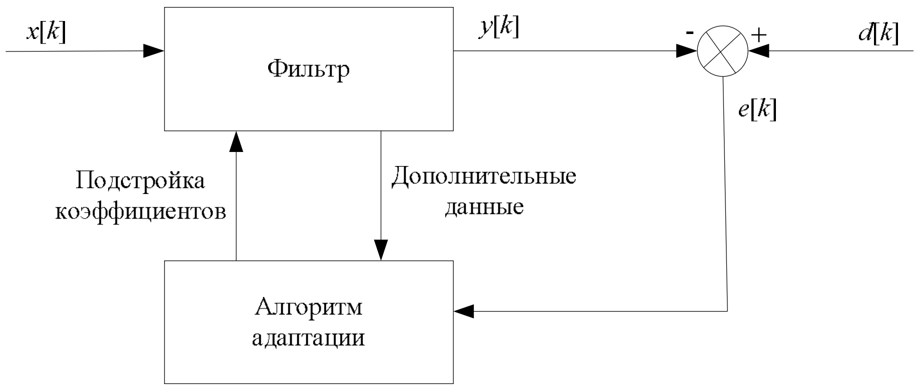

Рис. 1. Общая структура АФ

Входной дискретный сигнал $x[k] = x(t_k)$, $t_k = k\Delta t$ обрабатывается дискретным фильтром, в результате чего получается выходной сигнал $y[k] = y(t_k)$. Этот выходной сигнал сравнивается с образцовым сигналом $d[k] = d(t_k)$, разность между ними образует сигнал ошибки $e[k] = e(t_k)$. Здесь Δt – интервал дискретности измерений сигнала $x(t)$. Задача АФ – минимизировать ошибку воспроизведения образцового сигнала. С этой целью блок адаптации после обработки каждого отсчета анализирует сигнал ошибки и дополнительные данные, поступающие из фильтра, используя результаты этого анализа для подстройки параметров (коэффициентов) фильтра.

В статье используется адаптивный алгоритм RLS (Recursive Least Square, рекурсивный метод наименьших квадратов).

Вывод формул, описывающих алгоритм RLS, производится на основе уравнений оптимальной фильтрации сигнала. Возможны различные подходы к решению задачи оптимальной фильтрации. Детерминированный подход приводит к алгоритму RLS.

Пусть входной дискретный сигнал $\{x[k]\}$ обрабатывается дискретным нерекурсивным фильтром порядка N с коэффициентами $\{w_n\}$, $n = 0,1,...,N$. Выходной сигнал фильтра [1, 2]

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N} w_n x[n-k]. \tag{1}$$

Кроме того, имеется образцовый сигнал $d[k]$. Ошибка воспроизведения образцового сигнала

$$e[k] = d[k] - y[k] = d[k] - \sum_{n=0}^{N} w_n x[n-k]. \tag{2}$$

Перепишем (2) в матричном виде. Для этого обозначим векторстолбец коэффициентов фильтра как w, а вектор – столбец содержимого линии задержки фильтра на k-m шаге как $\overline{x}[k]$:

$$\overline{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ . \\ . \\ . \\ w_N \end{bmatrix}, \quad \overline{x}[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ x[k-1] \\ . \\ . \\ . \\ x[k-N] \end{bmatrix}.$$

С учетом этих обозначений (2) принимает следующий вид:

$$e[k] = d[k] - \overline{x}^T[k]\overline{w}. \tag{3}$$

Сформулируем детерминированную оптимизационную задачу: мы хотим отыскать такие коэффициенты фильтра $\{w_n\}$, чтобы суммарная квадратичная ошибка воспроизведения образцового сигнала была минимальной [1]:

$$J(\{w_n\}) = \sum_{k=0}^{K-1} |e[k]|^2 \to \min . \qquad (4)$$

Адаптивный алгоритм RLS определяется по формулам [1]:

$$\overline{w}[k] = \overline{w}[k-1] + K[k]e[k]; \qquad (5)$$

$$e[k] = d[k] - y[k]; \qquad (6)$$

$$y[k] = \overline{x}[k]^T \, \overline{w}[k-1]; \qquad (7)$$

$$K[k] = \frac{P[k-1]\overline{x}[k]}{1 + \overline{x}[k]^T P[k-1]\overline{x}[k]}; \qquad (8)$$

$$P[k] = P[k-1] - \frac{P[k-1]\overline{x}[k]\overline{x}[k]^T P[k-1]}{1 + \overline{x}[k]^T P[k-1]\overline{x}[k]}, \; k = 1,2,..., \qquad (9)$$

где $\overline{w}[k]$ – вектор коэффициентов фильтра на k-м шаге; $K[k]$ – вектор–столбец коэффициентов усиления на k-м шаге; $P[k]$ – обратная корреляционная матрица сигнала на k-м шаге.

Рассмотрим применение АФ RLS для линейного предсказания сигнала $x[k]$ (рис.2) [1].

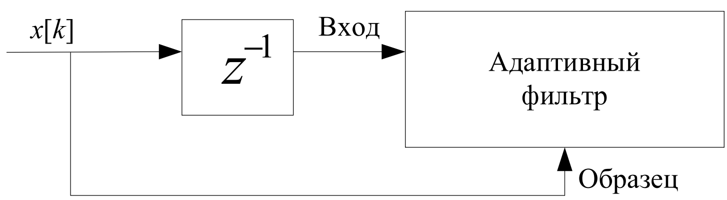

Рис. 2. Линейное предсказание с помощью АФ

Для решения задачи линейного предсказания с помощью АФ (см. рис. 2) будем использовать пакет *Filter Design*, входящий в поставку *MatLab 7.0*. АФ реализованы в виде объектов *MatLab*.

Для создания объекта АФ служит функция adaptfilt. При её вызове необходимо указать требуемый алгоритм адаптивной фильтрации – для этого после имени функции ставится точка и указывается соответствующий идентификатор метода (конструктора):

ha=adaptfilt.algorithm(…).

Набор входных параметров функции зависит от реализуемого алгоритма. Адаптивному RLS-фильтру соответствует следующий вызов конструктора объекта [1]:

ha=adaptfilt.rls (l),

где l – целочисленный параметр, с помощью которого задается длина фильтра.

Обработка сигнала АФ осуществляется с помощью функции filter [1]:

[y,e]=filter(ha,x,d).

Здесь ha – объект АФ; x – входной сигнал; d – образцовый сигнал; y – выходной сигнал; e – сигнал ошибки фильтрации.

Рассмотрим задачу предсказания для случая, когда наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x[k] = s[k] + v[k],\ k = \overline{1, n_2}, \tag{10}$$

где

$$s[k] = A \sin(2\pi f_0 k \cdot \Delta t). \tag{11}$$

Здесь $s[k]$ – сигнал, предсказанные значения которого нужно определить; $v[k]$ – нормальный дискретный белый шум, имеющий среднеквадратичное значение σ_v; A – амплитуда гармонических колебаний; f_0 – частота гармонических колебаний, Гц.

Создадим объект RLS-фильтра. Имеем [1] ha=adaptfilt.rls (N), здесь N – длина RLS-фильтра.

Теперь реализуем собственно фильтрацию RLS-фильтром, используя для этого функцию filter. Имеем следующий оператор программы на языке *MatLab 7.0* [1]:

[y,e]=filter(ha,x(1:end-1), x(2:end)),

здесь y[i] – предсказанное значение сигнала x[i]; e[i] – ошибка предсказания сигнала x[i], которая определяется в виде

$$e[i] = x[i] - y[i],\ i = \overline{1, n_2}. \tag{12}$$

Нас интересует ошибка предсказания $e_1[i]$ сигнала $s[i]$, которая имеет вид

$$e_1[i] = s[i] - y[i],\ i = \overline{1, n_2}. \tag{13}$$

Решение задачи линейного предсказания с использованием адаптивного RLS-фильтра было смоделировано на ЦВМ. Предполагалось, что $A = 1$; $f_0 = 2$; $\sigma_v = 0{,}2$; $\Delta t = 0{,}025$; $N = 7$; $n_2 = 200$. Результаты моделирования приведены на рис. 3,4.

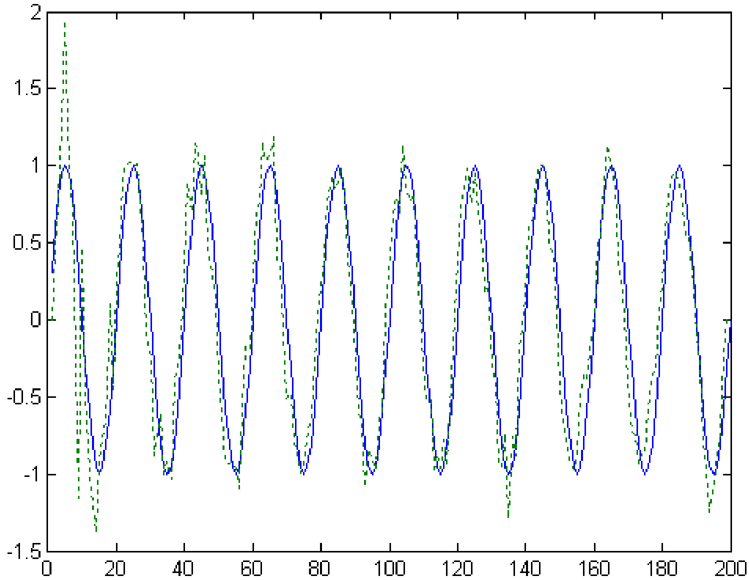

Рис. 3. Графики $s[i]$, $y[i]$, $i = \overline{1, n_2}$

——— – $S[i],\ i = \overline{1, n_2}$; – – – – – – – $y[i],\ i = \overline{1, n_2}$

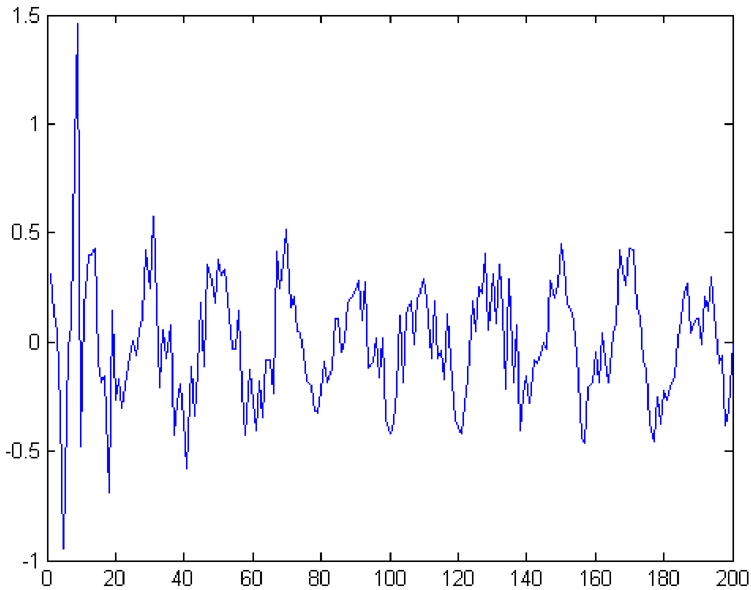

Рис. 4. График $e_1[i]$, $i = \overline{1, n_2}$

На рис. 3 показаны графики $s[i]$, $y[i]$, $i=\overline{1,n_2}$. На рис. 4 приведен график $e_1[i]$, $i=\overline{1,n_2}$. Из рис. 4 видно, что имеет место начальный переходный процесс АФ, т.е. процесс $e_1[i]$, $i=\overline{1,n_2}$ устанавливается только спустя некоторое время $t_{\Pi}=m\Delta t$. Параметр m = 20 характеризует длительность переходного процесса, измеряемую дискретным временем i, i = 1,2,… При $t>t_{\Pi}$ устанавливается стационарный режим работы АФ.

Введем в рассмотрение массив $\varepsilon[i]$ вида

$$\varepsilon[i]=e_1[i+m], \quad i=\overline{1,n_3}, \tag{14}$$

где

$$n_3=n_2-m. \tag{15}$$

Обозначим через $\hat{\sigma}_{\varepsilon}$ оценку среднеквадратичного значения ошибки предсказания $\varepsilon[i]$, $i=\overline{1,n_3}$. Величина $\hat{\sigma}_{\varepsilon}$ определяется по формуле

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}=\sqrt{\frac{1}{n_3}\sum_{i=1}^{n_3}\varepsilon^2[i]}. \tag{16}$$

Было получено значение $\hat{\sigma}_{\varepsilon}=0{,}24$.

Реализуем теперь с помощью RLS-фильтра линейное предсказание сигнала, сформированного с помощью авторегрессионной модели. Согласно авторегрессионной модели сигнал $\{x[k]\}$ формируется путем пропускания дискретного белого шума $\{v[k]\}$ через «чисто рекурсивный» фильтр n-го порядка.

Имеем [1]

$$x[k]=v[k]+\sum_{i=1}^{n}a_i x[k-i], \tag{17}$$

где a_i – коэффициенты авторегрессионной модели.

Было выполнено моделирование работы RLS-фильтра с целью предсказания сигнала $x[k]$, определяемого формулой (17). Предполагалось, что

$$N=16;\ n=8;\ n_2=200;\ \sigma_v=1;\ a=[a_1\ a_2\ \ldots a_{n-1}\ a_n]=$$
$$=[-3{,}18\quad 5{,}18\quad -5{,}21\quad 3{,}5\quad -1{,}57\quad 0{,}46\quad -0{,}08\quad 0{,}006].$$

Результаты моделирования приведены на рис. 5, 6.

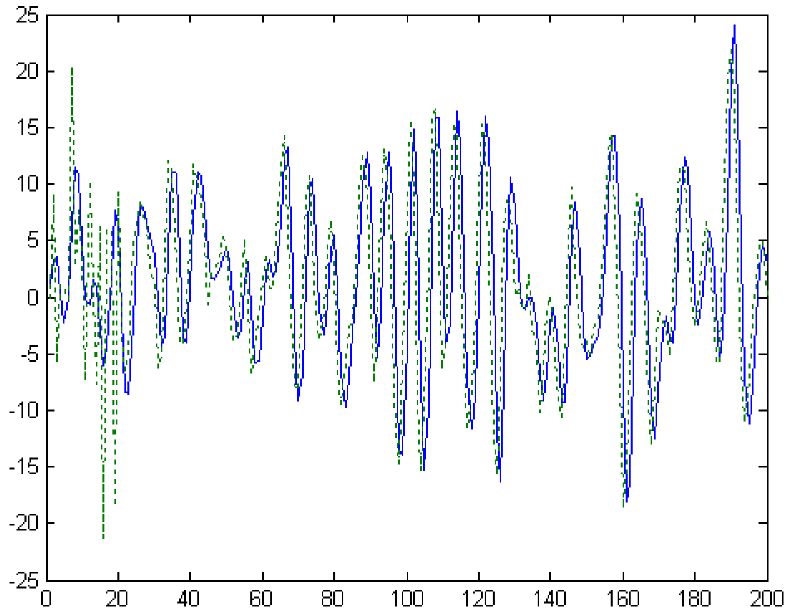

Рис. 5. Графики $x[i]$, $y[i]$, $i = \overline{1, n_2}$

——— – $x[i]$, $i = \overline{1, n_2}$; – – – – – – – $y[i]$, $i = \overline{1, n_2}$;

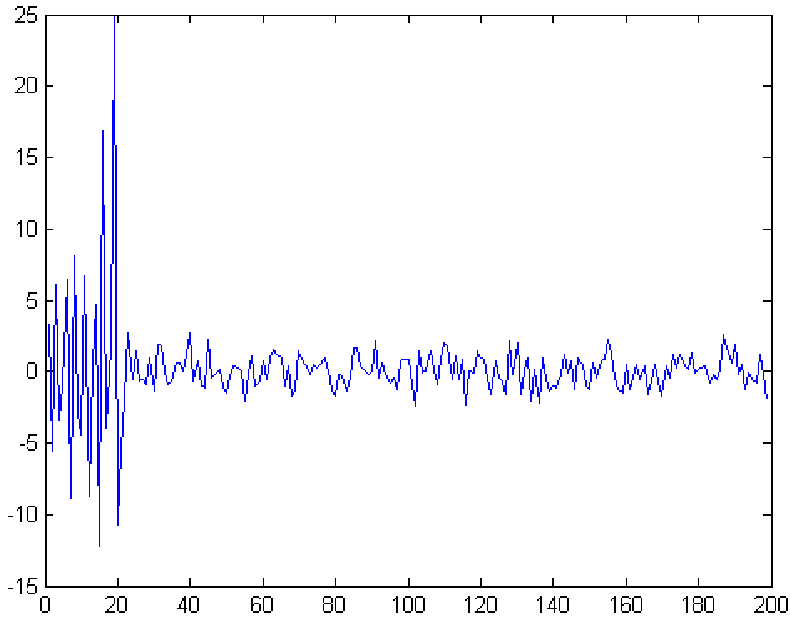

Рис. 6. График $e[i]$, $i = \overline{1, n_2}$

На рис. 5 показаны графики $x[i]$, $y[i]$, $i=1,n_2$. На рис. 6 приведен график $e[i]$, $i=\overline{1,n_2}$. Из рис. 6 видно, что имеет место начальный переходной процесс АФ, после чего устанавливается стационарный режим работы АФ, т.е. процесс $e[i]$, $i=1,n_2$ устанавливается только спустя время $t_П = m_1 \Delta t$. Параметр $m_1 = 40$ характеризует длительность переходного процесса, измеряемую дискретным временем *i*, $i = 1,2,\ldots$

Введем в рассмотрение массив $\varepsilon_1[i]$ вида

$$\varepsilon_1[i] = e[i+m_1], \quad i=\overline{1,n_4}, \tag{18}$$

где

$$n_4 = n_2 - m_1. \tag{19}$$

Обозначим через $\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}$ оценку среднеквадратичного значения ошибки предсказания $\varepsilon_1[i]$, $i=\overline{1,n_4}$. Величина $\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}$ определяется по формуле

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{1}{n_4}\sum_{i=1}^{n_4} {\varepsilon_1}^2[i]}.$$

Было получено значение $\hat{\sigma}_{\varepsilon_1} = 1{,}06$.

Таким образом, в статье выполнено предсказание с помощью адаптивного RLS-фильтра для двух видов сигнала $x[k]$ и оценены среднеквадратические значения ошибок предсказания для этих двух видов сигналов $x[k]$.

Библиографический список

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2006.

2. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989.

Получено 05.09.2012