



УДК 622.276:553.07:456.185-31(470.2)

Статья / Article

© ПНИПУ / PNRPU, 2019

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ПРОГНОЗА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ P_2O_5 В РУДНОМ ТЕЛЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ АПАТИТОВЫЙ ЦИРК

Ю.А. Шарафеева, А.В. Степачева¹

Кировский филиал АО «Апатит» «ФосАгро» (184250, Россия, г. Кировск, ул. Ленинградская, 1)

¹ Федеральное исследовательское учреждение «Кольский научный центр» Российской академии наук (184209, Россия, г. Апатиты, ул. Ферсмана, 24)

COMPARISON OF METHODS FOR PREDICTING THE SPATIAL DISTRIBUTION OF P_2O_5 IN THE ORE BODY OF THE APATITE CIRCUS DEPOSIT

Yulia A. Sharafeeva, Anna V. Stepacheva¹

Kirovsk branch of Apatit PhosAgro (1, Leningradskaya st., Kirovsk, 184250, Russian Federation)

¹ Federal Research Center “Kola Science Center” Russian Academy of Sciences (24, Fersman st., Apatit, 184209, Russian Federation)

Получена / Received: 07.11.2018. Принята / Accepted: 14.01.2019. Опубликовано / Published: 29.03.2019

Ключевые слова:

Апатитовый цирк, полезный компонент, геостатистика, вариограмма, каркасная модель, блочная модель, интерполяция, метод обратного расстояния, кригинг.

В последние десятилетия наблюдается активное взаимодействие геологических и математических наук. Одно из главных направлений внедрения математики в геологию и практику геолого-разведочных работ – математическое моделирование геологических объектов. В Кировско-Апатитском районе Мурманской области градообразующее предприятие Кировский филиал АО «Апатит» ведет разработку шести месторождений: Плато Расвумчорр, Кукисвумчоррское, Юкспорское, Апатитовый цирк, Коашвиское и Ньюрпакское. В данный момент в АО «Апатит» активно внедряется Ventyx MineScape (Австралия) – это набор интегрированных модулей, используемых при ведении горных работ на предприятиях, ведущих открытую/подземную отработку пластовых/рудных месторождений. Также в Горном институте Кольского научного центра РАН (г. Апатиты, Мурманская область) создана и постоянно совершенствуется система компьютерного моделирования объектов горной технологии MINEFRAME. На сегодня она представляет собой интегрированный пакет программ, предназначенный для решения широкого круга горно-геологических и горно-технологических задач. На примере месторождения Апатитовый цирк показана перспективность совместного использования горно-геологических информационных систем MineScape и MINEFRAME для математического моделирования геологических объектов и геостатистического описания пространственного распределения полезного ископаемого. В статье рассмотрены результаты геостатистического исследования распределения полезного компонента (P_2O_5) в пределах рудного тела, ограниченного каркасной моделью балансовых руд месторождения Апатитовый цирк, а также построены две блочные модели. Блоки первой модели были заполнены с помощью метода обратных расстояний, блоки второй – методом обычного кригинга. В конце статьи приводится сравнение средних содержаний, полученных в результате интерполяции методами обычного кригинга и обратных расстояний, для выбора наиболее подходящего метода для данного месторождения.

Key words:

Apatite circus, useful component, geostatistics, variogram, frame model, block model, interpolation, inverse distance method, kriging.

In recent decades, there has been an active interaction of geological and mathematical sciences. One of the main directions of the introduction of mathematics into geology and in the practice of geological exploration is the mathematical modeling of geological objects. In the Kirovsk-Apatit district of the Murmansk region, the Kirov branch of Apatit, JSC, is developing six fields: Plateau Rasvumchorr, Kukisvumchorrskoe, Yuksorskoe, Apatity circus, Koashviskoye and Nyurpakskoye. At the moment, Ventyx MineScape (Australia) is actively being implemented in Apatit JSC. This is a set of integrated modules used in mining operations at enterprises conducting open / underground mining of ore deposits. Also at the Mining Institute of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (Apatity, Murmansk region), the computer modeling system MINEFRAME has been created and constantly improved. Today, it is an integrated software package designed to solve a wide range of geological, mining and technological problems. As example of the Apatite Circus deposit, the prospects of joint use of mining and geological information systems MineScape and MINEFRAME for mathematical modeling of geological objects and a geostatistical description of the spatial distribution of the mineral are shown. The article discusses the results of a geostatistical study of the distribution of the useful component (P_2O_5) within the ore body bounded by the framework model of balance ores from the Apatite circus deposit, and also two block models are constructed. The blocks of the first model were filled using the method of inverse distances, the blocks of the second - by the usual kriging method. At the end of the article, to select the most suitable method for the field, there has been made a comparison between the average contents obtained by using the methods of conventional kriging and inverse distances.

Шарафеева Юлия Александровна – участковый геолог (тел.: +007 965 800 92 08, e-mail: kuznecova1yulia@gmail.com). Контактное лицо для переписки.
Степачева Анна Владимировна – программист (тел.: +007 911 312 94 11, e-mail: stepacheva@mineframe.ru).

Yulia A. Sharafeeva (Author ID in Scopus: 180809-015017) – geologist (tel.: +007 965 800 92 08, e-mail: kuznecova1yulia@gmail.com). The contact person for correspondence.
Anna V. Stepacheva – programmer (tel.: +007 911 312 94 11, e-mail: stepacheva@mineframe.ru).

Введение

С помощью математического моделирования может быть проведено описание пространственного распределения геолого-разведочной информации по результатам дискретных наблюдений, а также прогнозирование их значений в точках или областях исследуемого пространства. В настоящее время как в международной практике, так и в России в основном применяются следующие методы расчета содержаний:

- 1) полигональный метод;
- 2) детерминистические модели;
- 3) вероятностные модели (геостатистические);
- 4) стохастическое моделирование.

Первый метод применялся до развития методов компьютерного моделирования. Оценка содержаний проводилась средневзвешенно на мощность. Оценка объемов – замером площадей на сечениях с последующим использованием формул расчета объемов основных геометрических фигур.

В детерминистических моделях предполагается, что пространственная переменная является неслучайной функцией координат и однозначно зависит от местоположения пунктов измерения. При этом способ интерполяции значений между фактическими данными в точках наблюдений определяет вид используемой математической модели.

Геостатистическая модель рассматривает изучаемый объект как геометрическое поле с определенным законом пространственной изменчивости и с вполне определенным значением изучаемого объекта в каждой его точке. Изучаемый параметр рассматривается как точечная пространственная переменная, обладающая рядом характеристик. Анизотропия пространственной переменной выражается различной скоростью изменения ее значений по различным направлениям [1–8].

Стохастическое моделирование позволяет оценить пространственную вариабельность и неопределенность данных и сгенерировать множество равновероятностных реализаций на основе исходного распределения [9–12].

В Горном институте Кольского научного центра создана и постоянно совершенствуется система компьютерного моделирования объектов горной технологии MINEFRAME. На сегодня она представляет собой интегрированный пакет программ, предназначенный для решения широкого круга горно-геологических и горно-технологических задач. Для нахождения зависимостей, описывающих изменчивость содержания полезного компонента, используются методы геостатистики, а также интерполяция методом обратных расстояний с учетом эллипсоида анизотропии исследуемых характеристик [13–8].

Используя возможности MINEFRAME, по данным эксплуатационной и детальной разведки (более чем 11 000 проб), а также 2%-ной и 4%-ной каркасным моделям пространственного распределения P_2O_5 месторождения Апатитовый цирк, разрабатываемого подземным способом Кировским филиалом АО «Апатит», была сделана оценка распределений содержания полезного ископаемого двумя методами: геостатистическим и обратных расстояний.

Геологическое строение месторождения Апатитовый цирк

История изучения крупнейшего в мире Хибинского щелочного массива насчитывает свыше 150 лет. Неослабевающий интерес к нему вызван относительной редкостью щелочных комплексов, наличием крупнейших месторождений стратегического сырья и выдающимся минеральным разнообразием (свыше 400 минералов, в том числе более 100 впервые здесь открытых).

Хибинский массив по типу строения относится к асимметричным концентрически зональным плутонам, при этом, по геофизическим данным, глубина его нижней границы 5–7 км. Массив сложен нефелиновыми сиенитами, фойдолитами. В нефелиновых сиенитах присутствуют реликты ультрабазитов [19–22]. Широко развита дайковая серия лампрофиров, щелочных базальтов, тингуанитов. Нефелиновые сиениты Хибин содержат

апатитовые минералы только в качестве аксессуаров. Фойяиты (хибиниты) внешней зоны и фойяиты ядра массива обладают слабовыраженной (скрытой) расслоенностью, которая, как и трахитоидность этих пород, согласна с общим строением массива и падает под углами $30\text{--}40^\circ$ к центру концентрической структуры [23–25].

Несмотря на сравнительно простое строение Хибинского массива, не только генезис, но и возрастное соотношение указанных комплексов пород до сих пор вызывают оживленные дискуссии. Для объяснения концентрически-зональной структуры массива предложено множество генетических схем.

Все хибинские месторождения и рудопроявления приурочены к приконтактной с рисчорритами части Главного фойидолитового кольца, где они образуют три рудных поля:

юго-восточное, юго-западное и северное (рис. 1). Месторождения в пределах каждого из этих полей имеют сходное строение [26–30].

Месторождение Апатитовый цирк относится к юго-западному рудному полю, находится между месторождениями Юкспор и Плато Расвумчорр (см. рис. 1) и по сути составляет единое с ними и месторождением Кукисвумчорр 12-километровое рудное тело, все части которого обладают однотипным геологическим строением. Протяженность самого месторождения Апатитовый цирк по простиранию – 2,5 км. Горизонтальная мощность залежи увеличивается от северо-запада к юго-восточному флангу от 10–50 до 150–200 м. Углы падения залежи плавно увеличиваются с глубиной от $15\text{--}20^\circ$ (на верхнем уровне залежи) до $40\text{--}50^\circ$ (на глубине).

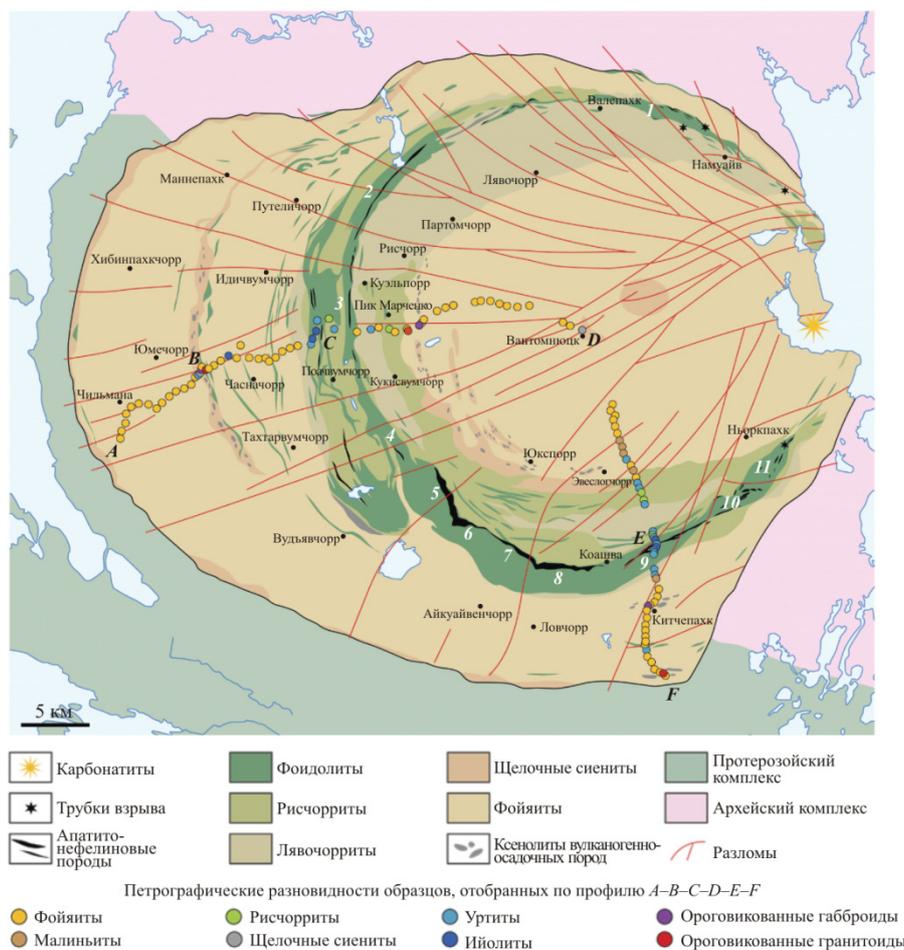


Рис. 1. Схема геологического строения Хибинского массива [32] с дополнениями [26].

Апатито-нефелиновые месторождения: 1 – Валепяхк; 2 – Партомчорр; 3 – Куэльпорр; 4 – Снежный цирк; 5 – Кукисвумчорр; 6 – Юкспор; 7 – Апатитовый цирк; 8 – Плато Расвумчорр; 9 – Коашва; 10 – Ньоркпахк; 11 – Олений ручей. A–B–C–D–E–F – профиль с точками отбора проб для изучения зональности массива

Центральная наиболее мощная часть залежи характеризуется зональным внутренним строением (в направлении от лежащего к висячему боку): 1 – зона уртитов с вкрапленностью апатита (10–15 м); 2 – зона сетчатых, линзовидно-полосчатых и блоковых руд (50–100 м); 3 – зона пятнистых и пятнисто-полосчатых руд (25–75 м); 4 – прерывистая зона титанит-апатитовых руд (20 м). Чередование типов руд нередко нарушается появлением в разных частях разреза жилообразных прослоев внутрирудной брекчии [31, 32].

Месторождение разрабатывается Расвумчоррским рудником Кировского филиала АО «Апатит» с 1954 г. подземным способом.

Геометризация рудного тела месторождения Апатитовый цирк

Геометризация месторождения как один из способов интерпретации геолого-разведочных данных начинается с оконтуривания рудного тела. Это набор операций по выделению объема недр, заключающих запасы, отвечающие кондициям. Оконтуривание отражает морфологию, внутреннее строение, условия залегания, сплошность рудных тел.

Для Апатитового цирка контуры рудного тела были созданы в двумерном пространстве (AutoCad) геологами АО «Мурманская геолого-разведочная экспедиция». Методика оконтуривания промышленных запасов по бортовому содержанию P_2O_5 и мощностей рудных тел и пустых прослоев включала ряд операций: установление в соответствии с кондициями рудных интервалов по скважинам и горным выработкам (оконтуривание по выработке) и определение контуров запасов рудных тел на плане (оконтуривание по площади) [33–37].

Используя инструменты MineScene, сотрудники Кировского филиала АО «Апатит» в трехмерном пространстве привязали контуры рудного тела на геолого-разведочных разрезах к траекториям скважин. Были учтены и те скважины,

которые незначительно отходят от плоскости разреза. На рис. 2 показан разрез по профилю 9+00, на котором видно, как в лежащем боку месторождения балансовые (бортное содержание 4 %) руды переходят в забалансовые (бортное содержание 2 %).

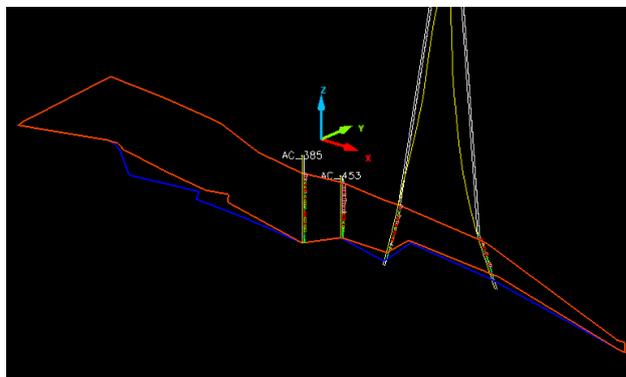


Рис. 2. Трехмерная визуализация контуров рудного тела месторождения Апатитовый цирк по профилю 9+00, MineScene

Каркасное моделирование выполнялось методом триангуляции между контурами также в среде MineScene. Первой была построена 4%-ная каркасная модель. Триангуляция проводилась на основе контура балансовых руд с применением связующих линий, исполняющих роль направляющих для триангуляционной модели. Затем был построен 2%-ный каркас, включающий балансовые и забалансовые руды.

При геометризации рудных тел были учтены скважины, пробуренные с поверхности на стадии предварительной разведки, уточняющие дополнительные скважины детальной разведки, выработки эксплуатационной разведки и кондиции для балансовых и забалансовых руд.

Блочная модель рудного тела месторождения Апатитовый цирк

Основной задачей разведки и последующего изучения месторождений полезных ископаемых является получение достоверной модели распределения изучаемого параметра. Для проведения интерполяции и прогнозирования основных параметров оруденения необходимо создание геометрической основы – блочной модели.

Блочная модель – это упорядоченное множество прямоугольных параллелепипедов, размещенных внутри замкнутой каркасной поверхности. Параметрами блочной модели, определяющими локализацию ее блоков в пространстве, являются размеры основного блока, координаты центра блока и степень его дробления на границах поверхности каркасной модели. Для лучшего моделирования формы тела вблизи его границы могут быть использованы блоки меньшего размера, чем в целом по телу.

В MINEFRAME создана блочная модель путем размещения мини-блоков внутри 4%-ной каркасной модели, построенной в MineScape, для интерполяции содержаний P_2O_5 внутри балансовых руд. Размер блоков отражает геометрию, параметры рудной залежи и учитывает горно-технические требования отработки. Размер элементарных ячеек блочной модели диктовался расстояниями между горизонтами отработки, густотой разведочной сети и общими размерами блочной модели.

Исходя из основной разведочной сети эксплуатационной разведки 50×50 м, на месторождении Апатитовый цирк был использован размер блока в плане 10×10 м. Высота блока месторождения Апатитовый цирк была взята равной высоте подэтажа – 20–25 м. Субблокировка (создание блоков с уменьшенными размерами на контактах рудных тел) применяется для более точного подсчета объемов руды с использованием модели. Размер субблока для месторождения Апатитовый цирк в MINEFRAME – $5 \times 5 \times 7,5$ м.

Рудное тело месторождения Апатитовый цирк относительно других Хибинских апатитовых месторождений имеет небольшие размеры, наиболее выдержанное строение и закономерно меняющуюся мощность, поэтому для интерполяции значений полезного компонента были выбраны два метода математического моделирования: метод обратных расстояний и кригинг.

Метод обратных расстояний

При использовании детерминистических методов предполагается, что анализируемые данные описываются некоторой детерминистической функцией $V(x)$, определенной на исследуемой области (D), где $x \in D$ – координата точки. Значение в любой точке исследуемой области может быть вычислено на основе интерполяционной функции $V(x)$, построенной на основе известных данных $V_i = V(x_i)$, измеренных в точках $x_i \in D$.

Метод обратных расстояний – распространенный метод дистанционного взвешивания для оценки содержания полезного компонента в точке. Он основан на том, что учитываются расстояния от ячейки до ближайших разведочных выработок. Содержание полезного компонента в оцениваемой точке рассчитывается по формуле [38]

$$C = \frac{\sum_{i=1}^N C_i d_i^{-m}}{\sum_{i=1}^N d_i^{-m}},$$

где C_i – содержание полезного компонента в пробе, участвующей в оценке; d_i – расстояние от оцениваемой точки до пробы, участвующей в оценке; N – число проб, участвующих в оценке; m – показатель степени (в нашем случае $m = 2$ – метод обратных квадратичных расстояний).

Содержания интерполировались в блочную модель по всем пробам, которые вошли в 4%-ный каркас рудного тела месторождения Апатитовый цирк. Оценка содержаний производилась композитными пробами – интервалы опробования были приведены к одинаковой длине, т.е. одинаковому статистическому весу [38–41]. Принята длина 3 м как наиболее распространенная длина пробы в базе данных опробования месторождения Апатитовый цирк.

На рис. 3 представлен разрез блочной модели по профилю 9+00, интерполяция содержаний в которой проводилась методом обратных расстояний.

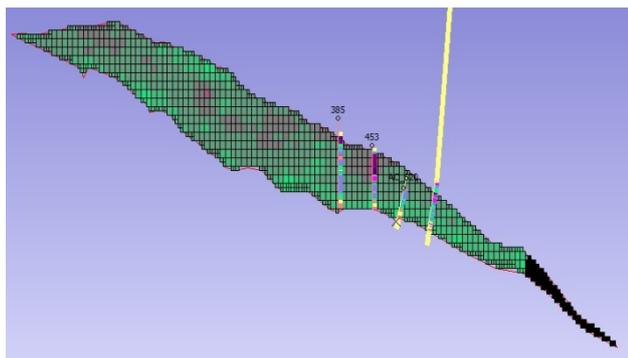


Рис. 3. Разрез блочной модели (метод обратных расстояний) рудного тела месторождения Апатитовый цирк по профилю 9+00, MINEFRAME

Кригинг

Базовой геостатистической процедурой оценивания является кригинг. Метод, названный Ж. Матероном в честь геолога D.G. Krige, изучавшего распределения золота на месторождениях Южной Африки, дает наилучшую эффективную оценку значений в неизвестных точках или средние значения в блоках. Различают несколько видов кригинга: простой, обычный, совместный, индикаторный, универсальный и др. Для прогнозирования распределения P_2O_5 в рудном теле месторождения Апатитовый цирк был применен наиболее часто используемый в геостатистике метод интерполяции – обычный кригинг (далее ОК) [42–49].

Идея Ж. Матерона состоит в том, чтобы представить оценивающую функцию ξ^{OK} самым простым способом – в виде линейной комбинации значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$\xi^{OK} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i.$$

Если бы истинное значение ξ было известно, то можно было бы дать бесконечно много таких представлений. В этом – главное оправдание и отличие метода от многих других подходов, в которых оценка ξ дается через сложные физические уравнения (диффузии, массопереноса, теплопроводности и т.д.), в большей или меньшей мере приближающиеся к реальному процессу.

Проблема состоит в том, чтобы в условиях неопределенности так подобрать коэффициенты λ_i , чтобы оценка была эффективной. Последнее подразумевает два аспекта: несмещенность оценки и минимум ее дисперсии [50–52].

Метод ОК учитывает не только анизотропию распределения интерполируемого компонента, но и его статистические характеристики. При использовании процесса каждый структурный или статистический домен интерполируют отдельно.

Для определения точек (проб), участвующих в расчетах содержаний в каждом блоке, используется поисковая область, параметры которой зависят от морфологии рудного тела и структуры вариограммной модели. В нашем случае экспериментальная общая вариограмма (рис. 4) хорошо аппроксимируется композиционной моделью. Хорошо различимы эффект самородков, т.е. скачок от 0 до σ^2 при $h = 0$, и две сферические модели с разными углами наклона. Параметры модели общей вариограммы таковы: эффект самородков – 13,73; порог – 15,17–19,50; зона влияния, м – 18,00–105,00.

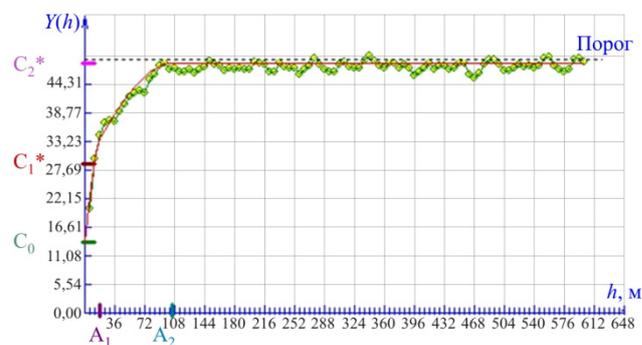


Рис. 4. Общая вариограмма распределения P_2O_5 внутри 4%-ного рудного тела месторождения Апатитовый цирк

С помощью вариограмм по направлениям были выявлены два главных направления анизотропии в рудном теле месторождения Апатитовый цирк. Третье направление автоматически выбрано ортогональным первым двум. Первое главное направление субпараллельно простиранию рудного тела.

компонентов и на результаты расчетов значительное влияние оказывает плотность исходных данных. Так как месторождение Апатитовый цирк имеет участки с различной плотностью разведочной сети, то при применении метода обратных расстояний желательнее подбирать параметры интерполяции отдельно для каждого участка, что увеличивает время прогнозирования распределения полезного компонента в рудном теле.

Обычный кригинг по сравнению с методом обратных расстояний обладает следующими достоинствами: перед интерполяцией содержаний изучаются статистические параметры распределения полезных компонентов, что позволяет более полно выявить как параметры анизотропии, так и зависимости изменения содержаний от расстояния между точками опробования; при расчетах методом обратного кригинга значительно снижаются ошибки, вызванные неравномерной плотностью исходных данных.

Благодарность

Авторы статьи выражают благодарность руководству Кировского филиала АО «Апатит» за предоставленный материал, научному руководителю д-ру геол.-мин. наук Ю.Л. Войтеховскому за помощь в постановке задач и ценные советы на различных этапах выполнения работы.

Библиографический список

1. Поротов Г.С. Математические методы моделирования в геологии: учеб. – СПб.: Санкт-Петербург. гос. горн. ин-т (техн. ун-т), 2006. – 223 с.
2. Капутин Ю.Е. Геостатистическое исследование месторождений полезных ископаемых. – Петрозаводск: КФ АН СССР, 1988. – 31 с.
3. Капутин Ю.Е. Горные компьютерные технологии и геостатистика. – СПб.: Недра, 2002. – 424 с.
4. Bhowmick T., Vandopadhyay S. Geostatistical prediction of fugitive dust dispersion in open pit haul roads // Application of Computers and Operations Research in Mineral Industry Proceedings of the 37th International Symposium APCOM 2015. – Fairbacks, 2015. – P. 1182–1189.
5. Marinho A., Tipe L.M. Traditional versus stochastic mine planning under material type and grade uncertainties // Application of Computers and Operations Research in Mineral Industry Proceedings of the 37th International Symposium APCOM 2015. – Fairbacks, 2015. – P. 316–325.
6. Askari-Nasar H., Frimponf S., Awuah-Offei K. Intelligent optimal production scheduling estimator // Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry Proceedings of the 32nd International Symposium APCOM 2005. Tucson, USA. – London: Taylor&Francis Group, 2005. – P. 279–285.
7. Krige D.G. Letter to the editor. “Matheronian geostatistics – quo vadis ?” by G.M. Philip and D.F. Watson // Mathematical geology. – 1986. – Vol. 18, № 5. – P. 501–502. DOI: 10.1007/BF00897502
8. Journel A.G. Geostatistics: models and tools for the Earth sciences // Mathematical geology. – 1986. – Vol. 18, № 1. – P 119–140. DOI: 10.1007/BF00897658
9. Апухтина И.В. Совершенствование методики оценки запасов месторождений железистых кварцитов на основе трехмерного компьютерного моделирования: дис. ... канд. геол.-мин. наук. – СПб., 2008. – 245 с.
10. Armstrong V. Basic linear geostatistics. – Springer-Verlag, 1998. – 153 p.
11. Hengl T. A practical guide to geostatistical mapping of environmental variables. – European Communities, 2007. – 165 p.
12. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistic. Modelling spatial uncertainty, Wiles series in probability and statistics. – Wiley and Sons, 1999. – 695 p.
13. Лукичев С.В., Наговицын О.В., Морозова А.В. Моделирование рудных и пластовых месторождений в системе MineFrame // Горный информационно-

аналитический бюллетень. – 2004. – № 5. – С. 296–300.

14. Наговицын О.В., Лукичев С.В. Развитие методов моделирования горно-геологических объектов в системе MINEFRAME // Информационные технологии в горном деле: докл. Всерос. науч. конф. с междунар. участием (12–14 октября 2011 г.). – Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2012. – С. 142–147.

15. Лукичев С.В., Наговицын О.В. Автоматизированная система Mine-Frame 3.0 // Горная промышленность. – 2005. – № 6. – С. 32–35.

16. Лукичев С.В., Наговицын О.В. Автоматизированное решение задач горного производства в системе MINEFRAME // Горная техника. – 2014. – № 2. – С. 52–56.

17. Мельников Н.Н., Лукичев С.В., Наговицын О.В. Компьютерная технология инженерного обеспечения горных работ на основе системы MineFrame // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2013. – № 5. – С. 223–234.

18. Наговицын О.В., Лукичев С.В. Горно-геологические информационные системы – история развития и современное состояние. – Апатиты: Изд-во Кольского научного центра РАН, 2016. – 196 с.

19. Бобрышев Г.И., Хищенко В.Т. Отчет о работах по изучению вещественного состава руд апатитовых месторождений в пределах отрабатываемых и подготавливаемых к эксплуатации горизонтов рудников объединения «Апатит» // Фонды Кировского филиала АО «Апатит». – 1975. – Т. 1. – 405 с.

20. Вировлянский Г.М. Особенности размещения апатитовых руд в Хибинских месторождениях и их значение для поисков в других массивах. – Апатиты – М.: Наука, 1968. – С. 91–102.

21. Вировлянский Г.М., Благодетелева Ю.Н. Послеapatитовые кольцевые разломы в Хибинском массиве // Промышленность горно-химического сырья. – М.: НИИТЭХИМ, 1971. – № 4. – С. 5–9.

22. Галахов А.В. Петрология Хибинского щелочного массива. – Л.: Наука, 1975. – 253 с.

23. Дудкин О.Б. Гигантские концентрации фосфора в Хибинах // Геология рудных месторождений. – 1993. – Т. 35, № 3. – С. 195–202.

24. Елисеев Н.А., Ожинский И.С., Володин Е.Н. Геологическая карта Хибинских тундр: тр. Ленингр. геол. управления. – Л. – М.: ГОНТИ, 1939. – Вып. 19. – 98 с.

25. Иванова Т.Н. К вопросу о структуре апатит-нефелинового рудного поля Хибинского щелочного массива // Щелочные породы Кольского полуострова. – Л.: Наука, 1974. – С. 3–8.

26. Породообразующие полевые шпаты Хибинского щелочного массива (Кольский полуостров, Россия) / Г.Ю. Иванюк, Я.А. Пахомовский, Н.Г. Коноплева, А.О. Калашников, Ю.А. Корчак, Е.А. Селиванова, В.Н. Яковенчук // Записки российского минералогического общества. – 2009. – № 6. – С. 1–17.

27. Самоорганизация рудных комплексов / Г.Ю. Иванюк, П.М. Горяинов, Я.А. Пахомовский, Н.Г. Коноплева, В.Н. Яковенчук, А.В. Базай, А.О. Калашников. – М.: ГЕОКАРТ-ГЕОС, 2009. – 392 с.

28. Каменев Е.А. Геология и структура Коашвинского апатитового месторождения. – Л.: Недра, 1975. – 128 с.

29. Каменев Е.А., Минеева Д.А. Новые Хибинские апатитовые месторождения. – М.: Недра, 1982. – 182 с.

30. Каменев Е.А. Поиски, разведка и геолого-промышленная оценка // Отчет по пересчету запасов месторождения Апатитовый Цирк по новым постоянным кондициям. – Апатиты, 2012. – Кн. 1. – 150 с.

31. Отчет по пересчету запасов эксплуатируемых Хибинских апатит-нефелиновых месторождений (по состоянию на 01.01.1965 г.) / И.И. Перекрест, А.С. Михеичев, Ф.В. Минаков, В.А. Гончаренко) // Фонды Кировского филиала АО «Апатит». – Кировск, 1966. – 352 с.

32. Отчет о результатах геологического доизучения и геохимических поисков на редкие металлы и апатит масштаба 1:50 000, проведенных в пределах Хибинского массива

- и его обрамления за 1979–1983 гг. / О.Л. Сняtkова, Н.К. Михняк, Т.М. Маркитахина, Н.И. Принягин, В.А. Чапин, Н.Н. Железова, А.Б. Дуракова, А.С. Евстафьев, В.Ф. Подурушин, М.М. Калинин // Фонды Кировского филиала АО «Апатит». – Мончегорск, 1983. – 468 с.
33. Шарафеева Ю.А., Степачева А.В. Вариограммный анализ пространственной изменчивости содержания оксида фосфора (V) на примере месторождения Апатитовый цирк // Известия вузов. Горный журнал. – 2018. – № 5. – С. 64–70. DOI: 10.21440/0536-1028-2018-5-64-70
34. Haslett J. On the sample variogram and the sample autocovariance for non-stationary time series // The Statistician. – 1997. – Vol. 46, № 4. – P. 475–485. DOI: 10.1111/1467-9884.00101
35. Clark I. A case study in the application of geostatistics to lognormal and quasi-lognormal problems // Proc. 28th Int. Symp. on Computer applications in the mineral industries. – Colorado: Colorado School of Mines Press, 1999. – P. 407–434.
36. Dubrule O. Cross validation of kriging in a unique neighborhood // Mathematical Geology. – 1983. – Vol. 15, № 6. – P. 687–699. DOI: 10.1007/BF01033232
37. Dubrule O., Kostov C. An interpolation method taking into account inequality constraints: I. Methodology // Mathematical geology. – 1986. – Vol. 18, № 1. – P. 33–51. DOI: 10.1007/BF00897654
38. Geotools, Geotech-3D. Часть II. Инструмент геолога: Справочник пользователя. Система MINEFRAME. – Апатиты, 2012. – 107 с.
39. Dubrule O. Two methods with different objectives: splines and kriging // Mathematical geology. – 1983. – Vol. 15, № 2. – P. 245–257. DOI: 10.1007/BF01036069
40. Philip G.M., Watson D.F. Matheronian geostatistics – quo vadis ? // Mathematical geology. – 1986. – Vol. 18, № 1. – P. 93–117. DOI: 10.1007/BF00897657
41. Philip G.M., Watson D.F. Letter to the editor. Geostatistics and spatial data analysis // Mathematical geology. – 1986. – Vol. 18, № 5. – P. 505–509. DOI: 10.1007/BF00897504
42. Войтеховский Ю.Л. Совместный крайгинг глубин и градиентов при оценивании геологических поверхностей // Известия вузов. Серия: Геология и разведка. – 2000. – № 2. – С. 72–78.
43. Войтеховский Ю.Л. Инженерная экология: особенности применения модельных ковариограмм при геостатистическом оценивании загрязненных территорий // Инженерная экология. – 2000. – № 2. – С. 10–16.
44. Войтеховский Ю.Л. Инженерная экология: специфика применения модельных полувариограмм при геостатистической оценке загрязненных территорий // Инженерная экология. – 2000. – № 4. – С. 35–40.
45. Войтеховский Ю.Л. Инженерная экология: эллиптический, зональный и смешанный типы анизотропии модельных вариограмм // Инженерная экология. – 2001. – № 6. – С. 33–38.
46. Dubrule O., Kostov C. An interpolation method taking into account inequality constraints: II. Practical approach // Mathematical geology. – 1986. – Vol. 18, № 1. – P. 53–73. DOI: 10.1007/BF00897655
47. Krige D.G. Conditional bias and uncertainty of estimation in geostatistics // Proc. 28th Int. Symp. on Computer applications in the mineral industries. – Golden, Colorado, 1999. – P. 3–14.
48. Matheron G. Letter to the editor. Philippian / Watsonian high (flying) philosophy // Mathematical geology. – 1986. – Vol. 18, № 5. – P. 503–504. DOI: 10.1007/BF00897503
49. Merks J.W. Applied statistics in mineral exploration // Mining Engineering. – 1997. – Vol. 49, № 2. – P. 78–82.
50. Войтеховский Ю.Л. Матероновская геостатистика: учеб. пособие. – Мурманск: Изд-во Мурманского гос. техн. ун-та, 2004. – 41 с.
51. Войтеховский Ю.Л. Кригинг геологических поверхностей с внутренним и внешним трендами // Известия вузов. Серия: Геология и разведка. – 1999. – № 6. – С. 77–83.

52. Войтеховский Ю.Л. Локальный кригинг и природа “хороших” полувариограмм // Известия вузов. Серия: Геология и разведка. – 2000. – № 5. – С. 122–125.

References

1. Porotov G.S. Matematicheskie metody modelirovaniia v geologii [Mathematical geology modeling methods]. Saint Petersburg, *Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi gornyi institut (tekhnicheskii universitet)*, 2006, 223 p.

2. Kaputin Iu.E. Geostatisticheskoe issledovanie mestorozhdenii poleznykh iskopaemykh [Geostatistical study of mineral deposits]. Petrozavodsk, KF AN SSSR, 1988, 31 p.

3. Kaputin Iu.E. Gornye kompiuternye tekhnologii i geostatistika [Mining computer technology and geostatistics]. Saint Petersburg, Nedra, 2002, 424 p.

4. Bhowmick T., Bandopadhyay S. Geostatistical prediction of fugitive dust dispersion in open pit haul roads. *Application of Computers and Operations Research in Mineral Industry. Proceedings of the 37th International Symposium APCOM 2015*. Fairbacks, Alaska, 2015, pp.1182-1189.

5. Marinho A., Tibe L.M. Traditional versus stochastic mine planning under material type and grade uncertainties. *Application of Computers and Operations Research in Mineral Industry Proceedings of the 37th International Symposium APCOM 2015*. Fairbacks, Alaska, 2015, pp.316-325.

6. Askari-Nasar H., Frimponf S., Awuah-Offei K. Intelligent optimal production scheduling estimator. *Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry Proceedings of the 32nd International Symposium APCOM 2005*. Tucson, USA. London, Taylor&Francis Group, 2005, pp.279-285.

7. Krige D.G. Letter to the editor “Matheronian geostatistics – quo vadis?” by G.M. Philip and D.F. Watson. *Mathematical geology*, 1986, vol.18, no.5, pp.501-502. DOI: 10.1007/BF00897502

8. Journel A.G. Geostatistics: models and tools for the Earth sciences. *Mathematical*

geology, 1986, vol.18, no.1, pp.119-140. DOI: 10.1007/BF00897658

9. Apukhtina I.V. Sovershenstvovanie metodiki otsenki zapasov mestorozhdenii zhelezistykh kvartsitov na osnove trekhmernogo kompiuternogo modelirovaniia [Improving the methodology for the distribution of iron quartzite deposits on the basis of three-dimensional computer modeling]. Ph. D. thesis. Saint Petersburg, 2008, 245 p.

10. Armstrong V. Basic linear geostatistics. Springer-Verlag, 1998, 153 p.

11. Hengl T. A practical guide to geostatistical mapping of environmental variables. European Communities, 2007, 165 p.

12. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistic. Modelling spatial uncertainty, Wiles series in probability and statistics. Wiley and Sons, 1999, 695 p.

13. Lukichev S.V., Nagovitsyn O.V., Morozova A.V. Modelirovanie rudnykh i plastovykh mestorozhdenii v sisteme MineFrame [Simulation of ore and reservoir deposits in the system MineFrame]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten*, 2004, no.5, pp.296-300.

14. Nagovitsyn O.V., Lukichev S.V. Razvitie metodov modelirovaniia gorno-geologicheskikh obektov v sisteme MINEFRAME [Development of methods for modeling geological objects in the system MINEFRAME]. *Informatsionnye tekhnologii v gornom dele. Vserossiiskaia nauchnaia konferentsiia s mezhdunarodnym uchastiem. Ekaterinburg*, IGD UrO RAN, 2012, pp.142-147.

15. Lukichev S.V., Nagovitsyn O.V. Avtomatizirovannaia sistema MineFrame 3.0 [Automated System MineFrame 3.0]. *Gornaia promyshlennost*, 2005, no.6, pp.32-35.

16. Lukichev S.V., Nagovitsyn O.V. Avtomatizirovannoe reshenie zadach gornogo proizvodstva v sisteme mineframe [Automated problem solving of mining production in the system]. *Gornaia tekhnika*, 2014, no.2, pp.52-56.

17. Melnikov N.N., Lukichev S.V., Nagovitsyn O.V. Kompiuternaia tekhnologiia inzhenernogo obespecheniia gornykh rabot na

osnove sistemy MineFrame [Computer technology of engineering providing of mining on basis of MINEFRAME software]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten*, 2013, no.5, pp.223-234.

18. Nagovitsyn O.V., Lukichev S.V. Gorno-geologicheskie informatsionnye sistemy – istoriia razvitiia i sovremennoe sostoianie [Mining and geological information systems – history of development and current state]. *Apatity*, Izdatelstvo Kolskogo nauchnogo tsentra RAN, 2016, 196 p.

19. Bobryshev G.I., Khishchenko V.T. Otchet o rabotakh po izucheniiu veshchestvennogo sostava rud apatitovykh mestorozhdenii, v predelakh otrabatyvaemykh i podgotavlivaemykh k ekspluatatsii gorizontov rudnikov obedineniia “Apatit” [Report on the study of the material composition of ores of apatite deposits, within the developed and prepared for operation of the horizons of the mines of the association “Apatite”]. *Fondy Kirovskogo filiala AO “Apatit”*, 1975, vol.1, 405 p.

20. Virovlianskii G.M. Osobennosti razmeshcheniia apatitovykh rud v khibinskikh mestorozhdeniakh i ikh znachenie dlia poiskov v drugih massivakh [Features of placement of apatite ores in the Khibinsky deposits and their importance for searches in other arrays]. *Apatity*. Moscow, Nauka, 1968, pp.91-102.

21. Virovlianskii G.M., Blagodeteleva Iu.N. Posleapatitovye koltsevye razlomy v khibinskom massive [Post Apatite ring faults in the Khibiny massif]. *Promyshlennost gornokhimicheskogo syria*. Moscow, NIITEKHIM, 1971, no.4, pp.5-9.

22. Galakhov A.V. Petrologiia Khibinskogo shchelochnogo massiva [Petrology of the Khibiny alkaline massif]. Leningrad, Nauka, 1975, 253 p.

23. Dudkin O.B. Gigantskie kontsentratsii fosfora v Khibinakh [Giant phosphorus concentrations in the Khibiny]. *Geologiia rudnykh mestorozhdenii*, 1993, vol.35, no.3, pp.195-202.

24. Eliseev N.A., Ozhinskii I.S., Volodin E.N. Geologicheskaiia karta Khibinskikh tundr

[Geological map of the Khibiny tundra]. *Trudy Leningradskogo geologicheskogo upravleniia*. Leningrad, Moscow, GONTI, 1939, iss.19, 98 p.

25. Ivanova T.N. K voprosu o strukture apatit-nefelinovogo rudnogo polia Khibinskogo shchelochnogo massiva [On the structure of the apatite-nepheline ore field of the Khibiny alkaline massif]. *Shchelochnye porody Kolskogo poluostrova*. Leningrad, Nauka, 1974, pp.3-8.

26. Ivaniuk G.Iu., Pakhomovskii Ia.A., Konopleva N.G., Kalashnikov A.O., Korchak Iu.A., Selivanova E.A., Iakovenchuk V.N. Porodoobrazuiushchie polevyie shpaty Khibinskogo shchelochnogo massiva (Kolskii poluostrov, Rossiia [Breeding feldspars of the Khibinsky alkaline massif (Kola Peninsula, Russia)]. *Zapiski Rossiiskogo mineralogicheskogo obshchestva*, 2009, no.6, pp.1-17.

27. Ivaniuk G.Iu., Goriainov P.M., Pakhomovskii Ia.A., Konopleva N.G., Iakovenchuk V.N., Bazai A.V., Kalashnikov A.O. Samoorganizatsiia rudnykh kompleksov [Self-organization of mining complexes]. Moscow, GEOKART-GEOS, 2009, 392 p.

28. Kamenev E.A. Geologiia i struktura Koashvinskogo apatitovogo mestorozhdeniia [Geology and structure of the Koashvinsky apatite deposit]. Leningrad, Nedra, 1975, 128 p.

29. Kamenev E.A., Mineeva D.A. Novye Khibinskie apatitovye mestorozhdeniia [New Khibiny apatite deposits]. Moscow, Nedra, 1982, 182 p.

30. Kamenev E.A. Poiski, razvedka i geologo-promyshlennaia otsenka [Prospecting, exploration and geological industrial assessment]. *Otchet po pereschetu zapasov mestorozhdeniia Apatitovyi tsirk po novym postoiannym konditsiiam*. Apatity, 2012, book 1, 150 p.

31. Perekrest I.I., Mikheichev A.S., Minakov F.V., Goncharenko V.A. Otchet po pereschetu zapasov ekspluatiruemykh Khibinskikh apatit-nefelinovykh mestorozhdenii (po sostoianiiu na 01.01.1965 g.) [Report on recalculation of exploited reserves of Khibiny apatite-nepheline deposits (as of 01/01/1965)]. *Fondy Kirovskogo filiala AO “Apatit”*. Kirovsk, 1966, 352 p.

32. Sniatkova O.L., Mikhniak N.K., Markitakhina T.M., Priniagin N.I., Chapin V.A., Zhelezova N.N., Durakova A.B., Evstafev A.S., Podurushin V.F., Kalinkin M.M. Otchet o rezultatakh geologicheskogo doizucheniia i geokhimicheskikh poiskov na redkie metally i apatit masshtaba 1:50000, provedennykh v predelakh Khibinskogo massiva i ego obramleniia za 1979-1983 gg. [Report on the results of geological studies and geochemical searches for rare metals and apatite on a scale of 1: 50,000, conducted within the Khibiny massif and its framing for 1979-1983]. Fondy Kirovskogo filiala AO "Apatit". Monchegorsk, 1983, 468 p.
33. Sharafeeva Iu.A., Stepacheva A.V. Variogramnyi analiz prostranstvennoi izmenchivosti sodержaniia oksida fosfora (V) na primere mestorozhdeniia Apatitovyi tsirk [Variogram analysis of phosphorus pentoxide content spatial variability by the example of the Apatite Tsyrc deposit]. *Izvestiia vuzov. Gornyi zhurnal*, 2018, no.5, pp.64-70. DOI: 10.21440/0536-1028-2018-5-64-70
34. Haslett J. On the sample variogram and the sample autocovariance for non-stationary time series. *The Statistician*, 1997, vol.46, no.4, pp.475-485. DOI: 10.1111/1467-9884.00101
35. Clark I. A case study in the application of geostatistics to lognormal and quasi-lognormal problems. *Proc. 28th Int. Symp. on Computer applications in the mineral industries*. Colorado: Colorado School of Mines Press, 1999, pp.407-434.
36. Dubrule O. Cross validation of kriging in a unique neighborhood. *Mathematical Geology*, 1983, vol.15, no.6, pp.687-699. DOI: 10.1007/BF01033232
37. Dubrule O., Kostov C. An interpolation method taking into account inequality constraints: I. Methodology. *Mathematical geology*, 1986, vol.18, no.1, pp.33-51. DOI: 10.1007/BF00897654
38. Geotools, Geotech-3D. Part II. Instrument geologa [Geologist tool]. Spravochnik polzovatel'ia. Sistema MINEFRAME. Apatity, 2012, 107 p.
39. Dubrule O. Two methods with different objectives: splines and kriging. *Mathematical geology*, 1983, vol.15, no.2, pp.245-257. DOI: 10.1007/BF01036069
40. Philip G.M., Watson D.F. Matheronian geostatistics – quo vadis? *Mathematical geology*, 1986, vol.18, no.1, pp.93-117. DOI: 10.1007/BF00897657
41. Philip G.M., Watson D.F. Letter to the Editor. Geostatistics and spatial data analysis. *Mathematical geology*, 1986, vol.18, no.5, pp.505-509. DOI: 10.1007/BF00897504
42. Voitekhovskii Iu.L. Sovmestnyi kraiging glubin i gradientov pri otsenivanii geologicheskikh poverkhnostei [Joint kriging of depths and gradients when evaluating geological surfaces]. *Izvestiia vuzov. Seriya Geologiya i razvedka*, 2000, no.2, pp.72-78.
43. Voitekhovskii Iu.L. Inzhenernaia ekologiya: osobennosti primeneniia modelnykh kovariogramm pri geostatisticheskom otsenivanii zagriaznennykh territorii [Engineering ecology: specificity of the application of covariogram geostatistical assessment of contaminated areas]. *Inzhenernaia ekologiya*, 2000, no.2, pp.10-16.
44. Voitekhovskii Iu.L. Inzhenernaia ekologiya: spetsifika primeneniia modelnykh poluvariogramm pri geostatisticheskoi otsenke zagriaznennykh territorii [Engineering ecology: specificity of application of model semi-variograms in geostatistical assessment of polluted territories]. *Inzhenernaia ekologiya*, 2000, no.4, pp.35-40.
45. Voitekhovskii Iu.L. Inzhenernaia ekologiya: ellipticheskii, zonalnyi i smeshannyi tipy anizotropii modelnykh variogramm [Engineering ecology: elliptic, zonal and mixed types of anisotropy of model variograms]. *Inzhenernaia ekologiya*, 2001, no.6, pp.33-38.
46. Dubrule O., Kostov C. An interpolation method taking into account inequality constraints: II. Practical approach.

Mathematical geology, 1986, vol.18, no.1, pp.53-73. DOI: 10.1007/BF00897655

47. Krige D.G. Conditional bias and uncertainty of estimation in geostatistics. *Proc. 28th Int. Symp. on Computer applications in the mineral industries*. Golden, Colorado, 1999, pp.3-14.

48. Matheron G. Letter to the editor. Philipian. Watsonian high (flying) philosophy. *Mathematical geology*, 1986, vol.18, no.5, pp.503-504. DOI: 10.1007/BF00897503

49. Merks J.W. Applied statistics in mineral exploration. *Mining Engineering*, 1997, vol.49, no.2, pp.78-82.

50. Voitekhovskii Iu.L. Materonovskaia geostatistika [Materonovskaya geostatistics]. Murmansk, Izdatelstvo MGTU, 2004, 41 p.

51. Voitekhovskii Iu.L. Kriging geologicheskikh poverkhnostei s vnutrennim i vneshnim trendami [Kriging of geological surfaces with internal and external trends]. *Izvestiia vuzov. Seriya Geologiya i razvedka*, 1999, no.6, pp.77-83.

52. Voitekhovskii Iu.L. Lokalnyi kriging i priroda “khoroshikh” poluvariogramm [Local kriging and the nature of “good” semi-variograms]. *Izvestiia vuzov. Seriya Geologiya i razvedka*, 2000, no.5, pp.122-125.

Просьба сослаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Шарафеева Ю.А., Степачева А.В. Сравнение методов прогноза пространственного распределения P_2O_5 в рудном теле месторождения Апатитовый цирк // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело. – 2019. – Т.19, №1. – С.73–86. DOI: 10.15593/2224-9923/2019.1.6

Please cite this article in English as:

Sharafeeva Yu.A., Stepacheva A.V. Comparison of methods for predicting the spatial distribution of P_2O_5 in the ore body of the Apatite circus deposit. *Perm Journal of Petroleum and Mining Engineering*, 2019, vol.19, no.1, pp.73-86. DOI: 10.15593/2224-9923/2019.1.6