



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.12

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МАТЕРИАЛОВ КОМПОНЕНТОВ КОМПОЗИЦИИ

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 мая 2018 г.
Принята: 25 июня 2018 г.
Опубликована: 29 июня 2018 г.

Ключевые слова:

цилиндрические оболочки, армированные конструкции, геометрическая нелинейность в приближении Кармана, упругопластическое деформирование, теория Редди, уточненные теории деформирования оболочек, динамическое и квазистатическое нагружение, численная схема «крест».

АННОТАЦИЯ

Сформулирована начально-краевая задача упругопластического деформирования гибких волокнистых цилиндрических круговых оболочек. Перекрестное армирование осуществляется по эквидистантным поверхностям. Механическое поведение материалов фаз композиции описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением. Геометрическая нелинейность рассматривается в приближении Кармана. Учитывается ослабленное сопротивление волокнистых оболочек поперечным сдвигам. Получены система разрешающих уравнений и соответствующие ей граничные и начальные условия, которые позволяют с разной степенью точности определять напряженно-деформированное состояние в компонентах композиции гибких цилиндрических оболочек. Из полученных уравнений, граничных и начальных условий в первом приближении вытекают соотношения традиционной неклассической теории Редди. Решение поставленной начально-краевой задачи строится на основе явной численной схемы «крест». Исследованы особенности неупругого динамического и квазистатического деформирования очень коротких, коротких и длинных волокнистых цилиндрических оболочек разной относительной толщины при разных структурах армирования. Обнаружено, что при динамическом нагружении таких конструкций внутренним давлением теория Редди может приводить к неприемлемым результатам. Различие в расчетах по теории Редди и уточненным теориям возрастает с увеличением рассматриваемого интервала времени. Продемонстрировано, что при проведении динамических расчетов очень тонких цилиндрических армированных оболочек необходимо учитывать изменение их метрики по толщине конструкции. Показано, что в силу геометрической и физической нелинейности сформулированной задачи максимальные прогибы в тонких оболочках могут возникнуть после нескольких десятков осцилляций волокнистой конструкции, а не только окрестности начального момента времени, когда цилиндрическая оболочка подвергается кратковременному, но интенсивному динамическому нагружению.

© ПНИПУ

© Янковский Андрей Петрович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru

Andrey P. Yankovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research, e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MODELING OF DYNAMIC BEHAVIOR OF REINFORCED CYLINDRICAL SHELLS UNDER ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF MATERIALS OF COMPOSITION COMPONENTS

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 May 2018
Accepted: 25 June 2018
Published: 29 June 2018

Keywords:

cylindrical shell, reinforced design, geometric nonlinearity in Karman approximation, elastic-plastic deformation Reddy theory, refined theories of deformation of shells, dynamic and quasi-static loading, numerical "cross" scheme.

ABSTRACT

The initial boundary value problem of elastic-plastic deformation of flexible fibrous cylindrical circular shells is formulated. The crossed reinforcement is located on equidistant surfaces. The mechanical behavior of the materials of the composition components is described by the equations of the theory of flow with isotropic hardening. The geometric nonlinearity is taken into account in the Karman approximation. The weakened resistance of the fibrous shells by the transverse shear is taken into account. The system of governing equations and the corresponding boundary and initial conditions, which allow determining the stress-strain state in the components of the composition of flexible cylindrical shells with varying degrees of accuracy, are obtained. The relations of the traditional non-classical Reddy theory follow from the obtained equations, boundary and initial conditions in the first approximation. The solution of the formulated initial-boundary problem is based on an explicit numerical "cross" scheme. The features of inelastic dynamic and quasi-static deformation are studied for very short, short and long fibrous cylindrical shells of different relative thicknesses for different reinforcements. It is found that under dynamic loading of such structures by internal pressure, Reddy theory can lead to inadmissible results. The difference in the calculations of the Reddy theory and the refined theories increases with the increasing time interval. It is shown that for the dynamic calculations of very thin cylindrical reinforced shells, it is necessary to take into account the change of their metrics on the thickness of the structure. It is shown that due to the geometric and physical nonlinearity of the formulated problem, the maximum deflections in thin shells can occur after several tens of oscillations of the fibrous structure, and not only the neighborhood of the initial moment of time when the cylindrical shell is under short-term intensive dynamic loading.

© PNRPU

Введение

Армированные цилиндрические оболочки все более широко используются в конструкторской практике в качестве силовых элементов изделий авиационного и ракетно-космического назначения, в энергетических установках, в качестве резервуаров для хранения химически активных веществ и др. [1–6], что актуализирует проблему адекватного математического моделирования механического поведения таких конструкций, особенно при воздействии на них высокоинтенсивных нагрузок, характерных для современных инженерных изделий [1, 2, 7–22]. Точность и глубина математического описания при этом зависят от степени учета расчетной схемой различного количества структурных элементов и от используемой теории расчета.

Деформирование анизотропных и слоистых оболочек в рамках гипотез классической теории изучалось в [7, 8]. Однако при этом не удается учесть ослабленное сопротивление таких конструкций поперечным сдвигам. Традиционно поперечные сдвиги в оболочках из композиционных материалов (КМ) учитываются либо в рамках теории Рейсснера–Миндлина [1, 2, 9, 11, 12, 16, 18], либо теории Амбарцумяна–Редди [8, 10, 17, 19]; реже используются теории более высокого порядка [13, 14, 20–22]. При этом подавляющее большинство публикаций посвящено рассмотрению линейно-упругого или

линейно-вязкоупругого поведения тонкостенных КМ-конструкций [1, 2, 7–14, 17–21]. Однако материалы компонентов композиции армированных оболочек могут обладать упругопластическими свойствами [3, 23–25]. Проблема математического моделирования упругопластического деформирования КМ-оболочек при интенсивных нагрузках находится в стадии становления. Так, в [9] изучалась динамика тонкостенных КМ-конструкций в пределах линейно-упругого деформирования их материалов, а также упругопластическое деформирование слоистых элементов конструкций с изотропными материалами слоев. В работе [26] в рамках кинематической модели Редди исследовано нелинейно-упругое динамическое поведение армированных полых оболочек. В [27] построена структурная модель упругопластического деформирования изгибаемых армированных пластин с привлечением гипотез теории Рейсснера и Редди, а в [22] на основе этой же структурной модели построена уточненная (по сравнению с моделью Редди) теория неупругого изгибного деформирования пологих армированных оболочек. В монографии [19] показано, что при линейно-упругом поведении материалов компонентов композиции армированных тонкостенных элементов конструкций уточнение теории Редди не требуется. В работе же [22] продемонстрировано, что при упругопластическом динамическом деформировании материалов фаз композиции волокни-

стных пластин и пологих оболочек требуется использование более точных, чем теория Редди, моделей изгибного поведения таких элементов КМ-конструкций.

Для численного интегрирования начально-краевых задач механики пластин и оболочек, как правило, используются явные схемы типа «крест» [9, 22, 26, 27] или неявные методы Ньюмарка [28–31].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена построению уточненной модели упругопластического деформирования гибких армированных цилиндрических оболочек с использованием пошаговой явной численной схемы «крест».

1. Постановка задачи

Рассматриваем тонкую замкнутую круговую цилиндрическую оболочку длиной L , толщиной $2h$ и радиусом срединной поверхности R , причем $2h \ll \min(L, R)$ (рис. 1). Свяжем с оболочкой цилиндрическую систему координат x_i так, что x_1 – осевая координата ($0 \leq x_1 \leq L$), x_2 – угловая окружная координата ($0 \leq x_2 < 2\pi$), x_3 – радиальная координата ($R-h \leq x_3 \leq R+h$). Конструкция спирально-перекрестно усилена N семействами волокон с углами ψ_s (отсчитываемыми от направления Ox_1) и плотностями ω_s ($1 \leq s \leq N$) армирования (см. рис. 1, б, где изображен случай $N = 2$). Волокна укладываются по поверхностям, эквидистантным срединной поверхности оболочки ($x_3 = \text{const}$); структура армирования в радиальном направлении Ox_3 квазиоднородна.

Кинематические соотношения, связывающие деформации ε_{ij} и перемещения точек U_i гибкой оболочки, в приближении Кармана имеют вид [1, 8, 32]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \partial_1 U_1 + 0,5(\partial_1 U_3)^2, \\ \varepsilon_{22} &= x_3^{-1} \partial_2 U_2 + x_3^{-1} U_3 + 0,5x_3^{-2} (\partial_2 U_3)^2, \\ 2\varepsilon_{12} &= x_3^{-1} \partial_2 U_1 + \partial_1 U_2 + x_3^{-1} \partial_1 U_3 \partial_2 U_3, \quad \varepsilon_{33} = \partial_3 U_3; \end{aligned} \quad (1)$$

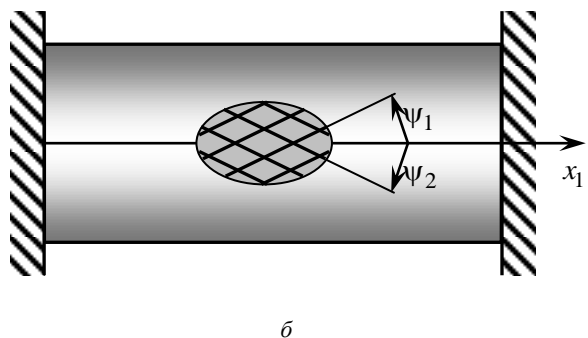
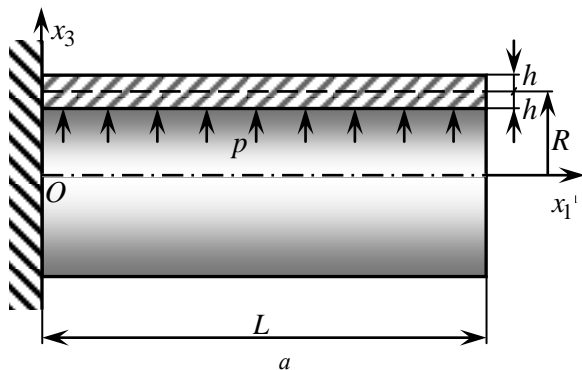


Рис. 1. Цилиндрические КМ-оболочки: жестко закрепленная только на левой кромке (а); жестко закрепленная на обеих кромках (б)

Fig. 1. Cylindrical shells clamped only on the left edge (a) and clamped on both edges (b)

$$2\varepsilon_{13} = \partial_3 U_1 + \partial_1 U_3, \quad 2\varepsilon_{23} = x_3^{-1} \partial_2 U_3 + x_3 \partial_3 (x_3^{-1} U_2), \quad (2)$$

где ∂_i – оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 3$).

В работе [22] было показано, что при наличии на лицевых поверхностях оболочки касательных нагрузок, которыми нельзя пренебречь, не удастся построить явную численную схему типа «крест» так, чтобы соответствующие силовые граничные условия были удовлетворены. Принимая это во внимание, в настоящем исследовании ограничимся рассмотрением практически важного частного случая, когда на лицевых поверхностях цилиндрической оболочки действуют только нормальные нагрузки (см. рис. 1, а). На основании этого предположения для учета ослабленного сопротивления армированной цилиндрической оболочки поперечному сдвигу деформации ε_{i3} аппроксимируем следующим образом [22]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{h^2 - z^2}{h^2} \sum_{k=0}^K \left(\frac{z}{h}\right)^k \varepsilon_{i3}^{(k)}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x} &= \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad x_3 \equiv R + z, \\ \mathbf{x} &\in G, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \\ G &= \{\mathbf{x}: 0 \leq x_1 \leq L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где t_0 – начальный момент времени t ; \mathbf{r} – вектор места точки оболочки; \mathbf{x} – вектор места точки срединной поверхности оболочки ($z = 0$); G – область, занимаемая срединной поверхностью оболочки в координатах Ox_1x_2 ; z – введенная для удобства изложения новая радиальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки; $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ – коэффициенты частичных сумм, подлежащие определению; K – целое число, задающее количество слагаемых, которые удерживаются в степенных разложениях. При $K = 0$ из (3) вытекают соотношения, соответствующие кинематическим гипотезам модели Редди [8, 10, 17, 19].

В соответствии с гипотезой, традиционно применяемой при изгибе тонкостенных элементов конструкций, изменяемостью перемещения $U_3(t, \mathbf{r})$ в радиальном направлении Ox_3 пренебрегаем [1, 2, 7–12, 16–22, 26–28]:

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

где w – прогиб точек срединной поверхности оболочки ($z = 0$).

Используя равенства (2) при учете соотношений (3) и (4), получаем выражения для тангенциальных перемещений точек цилиндрической оболочки

$$U_1(t, \mathbf{r}) = u_1(t, \mathbf{x}) - z\partial_1 w + \sum_k f_1^{(k)}(z) \varepsilon_{13}^{(k)}(t, \mathbf{x}),$$

$$U_2(t, \mathbf{r}) = (R+z)R^{-1}u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + \sum_k f_2^{(k)}(z) \varepsilon_{23}^{(k)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (5)$$

где

$$f_i^{(k)}(z) \equiv 2h^{-2} [h^2 \Phi_i^{(k)}(z) - \Phi_i^{(k+2)}(z)] \quad (i=1, 2),$$

$$\Phi_1^{(k)}(z) \equiv h^{-k} (1+k)^{-1} z^{k+1},$$

$$\Phi_2^{(k)}(z) \equiv h^{-k} (R+z) \Psi_k(z), \quad (6)$$

$$\Psi_k(z) \equiv \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m R^m z^{k-m}}{k-m} - R^k \ln(R+z);$$

u_1, u_2 – продольное и окружное перемещения точек срединной поверхности оболочки ($z = 0$); суммирование по индексу k здесь и далее производится от 0 до K , как это указано в (3).

После подстановки соотношений (5) при учете (4) и (6) в равенства (1) получим выражения для тангенциальных деформаций

$$\varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) = \partial_1 u_1 - z\partial_1^2 w + \sum_k f_1^{(k)}(z) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(k)} + 0,5(\partial_1 w)^2,$$

$$\varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) = (R+z)^{-1} [(R+z)R^{-1}\partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + \sum_k f_2^{(k)}(z) \partial_2 \varepsilon_{23}^{(k)}] + 0,5(R+z)^{-2} (\partial_2 w)^2,$$

$$2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) = (R+z)^{-1} [\partial_2 u_1 - z\partial_1 \partial_2 w + \sum_k f_1^{(k)}(z) \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}] + (R+z)R^{-1} \partial_1 u_2 + \partial_1 \partial_2 w + \sum_k f_2^{(k)}(z) \partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + (R+z)^{-1} \partial_1 w \partial_2 w, \quad \mathbf{x} \in G,$$

$$|z| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (7)$$

Таким образом, в соотношениях (3), (5) и (7) неизвестными являются функции w, u_i и $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ($i=1, 2, 0 \leq k \leq K$), зависящие от времени t и двух пространственных переменных x_1 и x_2 .

Как и в [22, 27], предполагается, что материалы компонентов композиции конструкции однородны

и изотропны, а их упругопластическое деформирование описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. Деформации фаз композиции малы. На основании традиционной для тонкостенных элементов КМ-конструкций силовой гипотезы $\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \approx 0$ [1, 2, 7–12, 16–22, 26–28], согласно рассуждениям из [27], получим определяющее уравнение для композиции рассматриваемой цилиндрической КМ-оболочки, которое имеет матричный вид:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (8)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}^T, \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{12}, \dot{\varepsilon}_{13}, \dot{\varepsilon}_{23}\}^T;$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – векторы-столбцы, компонентами которых являются скорости средних напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции; \mathbf{B} – 5×5 -матрица, вычисляемая по формуле (33) из [27], компоненты которой b_{ij} зависят от упругопластического состояния материалов фаз композиции и от структуры армирования; T – операция транспонирования; точка означает дифференцирование по времени t . Так как элементы b_{ij} матрицы \mathbf{B} зависят от упругопластического состояния материалов компонентов композиции, соотношение (8), строго говоря, является нелинейным, поэтому в каждый момент времени t в каждой точке \mathbf{r} конструкции (независимо от других точек) необходимо организовать итерационный процесс, аналогичный итерационной процедуре «посадки» напряженного состояния на поверхность текучести [9]. Как показано в работе [22], для проведения практически приемлемых расчетов вполне достаточно использовать две итерации.

Осредненные напряжения в композиции σ_{ij} удовлетворяют уравнениям движения элемента $x_3 dx_1 dx_2 dz$ армированной среды, которые в цилиндрической системе координат при учете (4) в приближении Кармана имеют вид [1, 8, 32]

$$\rho \ddot{U}_1(t, \mathbf{r}) = \partial_1 (\sigma_{11} - \sigma_{13} \partial_1 w) + (R+z)^{-1} \partial_2 \times (\sigma_{12} - \sigma_{23} \partial_1 w) + \partial_z (\sigma_{13} - \sigma_{33} \partial_1 w) + X_1(t, \mathbf{r}),$$

$$\rho \ddot{U}_2(t, \mathbf{r}) = \partial_1 [\sigma_{21} - (R+z)^{-1} \sigma_{13} \partial_2 w] + (R+z)^{-1} \partial_2 [\sigma_{22} - (R+z)^{-1} \sigma_{23} \partial_2 w] + \partial_z [\sigma_{23} - (R+z)^{-1} \sigma_{33} \partial_2 w] + (R+z)^{-1} \sigma_{23} + X_2(t, \mathbf{r}); \quad (10)$$

$$\rho \ddot{U}_3(t, \mathbf{r}) = \partial_1 [\sigma_{13} + \sigma_{11} \partial_1 w + (R+z)^{-1} \sigma_{12} \partial_2 w] + (R+z)^{-1} \partial_2 [\sigma_{23} + \sigma_{21} \partial_1 w + (R+z)^{-1} \sigma_{22} \partial_2 w] + \partial_z \sigma_{33} - (R+z)^{-1} \sigma_{22} + X_3(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (11)$$

где

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{s=1}^N \rho_s \omega_s, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{s=1}^N \omega_s; \quad (12)$$

ρ_0, ρ_s – объемная плотность материала связующего и волокон s -го семейства; X_i – компоненты объемной нагрузки, действующей на армированный материал, которые определяются по правилу простой смеси аналогично (12).

Для получения на основании равенств (10) и (11) двумерных уравнений движения элемента оболочки используем метод взвешенных невязок [33]. В качестве весовых функций используем однородные полиномы z^l ($l \geq 0$). Согласно этому методу, умножим уравнения (10) на z^l и проинтегрируем результат по толщине оболочки, а уравнение (11) проинтегрируем с весом 1,0, тогда при учете (4) получим следующие уравнения движения в силовых факторах:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_1^{(l)} &= \partial_1 (M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w) + \\ &+ \partial_2 (\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w) - l M_{13}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_1 w - \\ &- h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_1 w + X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ \rho \ddot{u}_2^{(l)} &= \partial_1 (M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w) + \partial_2 (\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2 w) - \\ &- l M_{23}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w - \\ &- h^l [(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)}] \partial_2 w + \\ &+ \bar{M}_{23}^{(l)} + X_2^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad 0 \leq l \leq K+1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 2h\rho \dot{w} &= \partial_1 (M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w) + \\ &+ \partial_2 (\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w) - \\ &- \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, t \geq t_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ \sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h), \\ M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ \bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz, \\ \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz, \\ u_m^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_m(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ i, j &= \overline{1, 3}, \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

При выводе уравнений (13) была использована формула интегрирования по частям.

Согласно третьему равенству (15), в рамках гипотез, принимаемых для тонких оболочек, некоторым введенным силовым факторам можно дать механическую трактовку: $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$, $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$ – приближенно представляют собой мембранные усилия и изгибающие и крутящие механические моменты в тонкой цилиндриче-

ской оболочке; $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$ ($i, j = 1, 2$) – приближенные выражения для поперечных сил; остальные силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, $\bar{M}_{ij}^{(l)}$ и $\bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$, определенные в (15), – математические моменты высших порядков, вычисленные с весами z^l , $(R+z)^{-1} z^l$ и $(R+z)^{-2} z^l$ соответственно.

Согласно второму соотношению (15), нормальные напряжения $\sigma_{33}^{(\pm)}$ известны из силовых граничных условий, заданных на лицевых поверхностях оболочки $z = \pm h$ (на рис. 1, a изображен случай $\sigma_{33}^{(+)} = 0$ и $\sigma_{33}^{(-)} = -p$). Напомним, что по предположению касательные напряжения на лицевых поверхностях отсутствуют ($\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$, $i = 1, 2$). На основании исследований, проведенных в [1], напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно линейно аппроксимировать по поперечной координате z :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \\ &+ \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, |z| \leq h, t \geq t_0. \end{aligned} \quad (16)$$

На основании третьего и четвертого равенств (15) при учете (16) вычислим в соотношениях (13) следующие сомножители:

$$\begin{aligned} l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \\ &= \frac{h^l}{2} [(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \\ &+ \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l)], \\ l \bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \\ &= \frac{l}{2h} (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_l(h) - \Psi_l(-h)) + \\ &+ \frac{l}{2} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h)), \quad 0 \leq l \leq K+1, \end{aligned} \quad (17)$$

где функция $\Psi_l(z)$ определена в (6).

Для однозначного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия. Если на торцевой поверхности оболочки ($x_1 = 0$ и/или $x_1 = L$) заданы силовые граничные условия, то в приближении Кармана при учете (4) имеем [1, 8, 32]

$$n_1 (\sigma_{11} - \sigma_{13} \partial_1 w) = p_1(t, \mathbf{r}), \quad (18)$$

$$n_1 [\sigma_{21} - (R+z)^{-1} \sigma_{13} \partial_2 w] = p_2(t, \mathbf{r});$$

$$n_1 [\sigma_{13} + \sigma_{11} \partial_1 w + (R+z)^{-1} \sigma_{12} \partial_2 w] = p_3(t, \mathbf{r}), \quad (19)$$

$$x_1 = 0 \text{ и/или } x_1 = L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где $n_1 = 1$ при $x_1 = L$ и $n_1 = -1$ при $x_1 = 0$.

Если на торцевой поверхности оболочки заданы кинематические граничные условия (см. (4) и (5)), то имеем

$$w(t, \mathbf{x}) = U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad x_1 = 0$$

$$\text{и/или } x_1 = L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad t \geq t_0; \quad (20)$$

$$U_j(t, \mathbf{r}) = U_{*j}(t, \mathbf{r}), \quad x_1 = 0$$

$$\text{и/или } x_1 = L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

Здесь p_i – заданные на торцевой поверхности оболочки внешние распределенные нагрузки, действующие в направлениях x_i ($i = \overline{1, 3}$); U_{*3} – заданный на кромке прогиб; U_{*j} – заданные на торцевой поверхности перемещения в тангенциальных направлениях x_j ($j = 1, 2$).

При $t = t_0$ необходимо использовать начальные условия (см. (4), (5))

$$w(t_0, \mathbf{x}) = U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (22)$$

$$U_j(t_0, \mathbf{r}) = U_{0j}(\mathbf{r}), \quad \dot{U}_j(t_0, \mathbf{r}) = V_{0j}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h, \quad j = 1, 2, \quad (23)$$

где U_{0i} , V_{0i} ($i = \overline{1, 3}$) – заданные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек оболочки.

Для получения граничных условий, записанных в силовых факторах (см. (13) и (14)), вновь воспользуемся методом взвешенных невязок, т.е. проинтегрируем равенство (19) по толщине оболочки, а условия (18) проинтегрируем по z с весами z^l , тогда, используя обозначения (15), будем иметь

$$n_1 (M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w) = P_1^{(l)}(t, \mathbf{x}),$$

$$n_1 (M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w) = P_2^{(l)}(t, \mathbf{x}) \quad (0 \leq l \leq K+1), \quad (24)$$

$$n_1 (M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w) = P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}),$$

$$x_1 = 0 \quad \text{и/или} \quad x_1 = L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad t \geq t_0,$$

где

$$P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad j = \overline{1, 3}, \quad x_1 = 0$$

$$\text{и/или } x_1 = L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad |z| \leq h; \quad (25)$$

$P_i^{(l)}$, $P_3^{(0)}$ – заданные на кромках силовые факторы. Согласно (25), $P_i^{(0)}$ и $P_3^{(0)}$ можно приближенно трактовать как усилия, действующие в направлениях x_i и x_3 , а $P_1^{(l)}$ и $P_2^{(l)}$ – заданные изгибающий и крутящий моменты; остальные величины в правых частях равенств (24) – заданные математические моменты высших порядков.

Так как разложения тангенциальных перемещений (5) (при учете обозначений (6)) по переменной z являются конечными, кинематические граничные условия (21) и начальные условия (23) в общем случае нельзя удовлетворить в каждой точке \mathbf{r} оболочки (см. (23)) или

ее торцевых поверхностей – кромок (см. (21)) – при произвольном задании функций U_{*j} , U_{0j} и V_{0j} ($j = 1, 2$) от переменной z . В силу этого обстоятельства для сведения задачи к двумерной также применим к равенствам (21) и (23) метод взвешенных невязок, т.е. проинтегрируем их по толщине цилиндрической оболочки с весами z^l . Учитывая при этом последнее обозначение (15), получим

$$u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad x_1 = 0$$

$$\text{и/или } x_1 = L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad t \geq t_0, \quad (26)$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1;$$

$$u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad (27)$$

где

$$u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) z^l dz,$$

$$u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) z^l dz, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) z^l dz, \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1;$$

$u_{*i}^{(l)}$, $u_{0i}^{(l)}$ и $v_{0i}^{(l)}$ – известные функции указанных аргументов.

Таким образом, для однозначного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи в каждой точке области G при $t = t_0$ необходимо задать начальные условия (22) и (27) при учете (28), а на кромках оболочки ($x_1 = 0$ и/или $x_1 = L$) – силовые граничные условия (24) или кинематические граничные условия (20) и (26) при учете обозначений (25) и (28). Возможно задание и смешанных из (20), (24) и (26) граничных условий, например, в случае шарнирного опирания кромок оболочки.

Определим связь между использованными выше кинематическими переменными w , u_i , $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$) и $u_i^{(l)}$, $i = 1, 2$, $0 \leq l \leq K+1$ (см. (15)). Для этого проинтегрируем выражения (5) по толщине оболочки с весами z^l ($0 \leq l \leq K+1$), тогда при учете обозначений (15) получим матричные соотношения

$$\mathbf{C}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{w}_i \partial_i w, \quad i = 1, 2, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{u}_i = \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(K)}, u_i^{(K+1)}\}^T, \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \{u_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(K-1)}, \varepsilon_{i3}^{(K)}\}^T;$$

$\mathbf{C}_i = (c_{jl}^{(i)})$ – $(K+2) \times (K+2)$ -матрицы, $\mathbf{w}_i = \{w_j^{(i)}\}$ – $(K+2)$ -компонентные векторы-столбцы, элементы которых вычисляются так:

$$\begin{aligned}
 c_{l+1,1}^{(i)} &= a_l^{(i)}, \quad c_{l+1,k+2}^{(i)} = b_k^{(i)}, \quad w_{l+1}^{(i)} = c_l^{(i)}, \\
 a_l^{(1)} &\equiv \int_{-h}^h z^l dz, \quad a_l^{(2)} \equiv \frac{1}{R} \int_{-h}^h (R+z) z^l dz, \\
 b_k^{(i)} &\equiv \int_{-h}^h f_i^{(k)}(z) z^l dz, \quad c_l^{(1)} \equiv \int_{-h}^h z^{l+1} dz = a_{l+1}^{(1)}, \\
 c_l^{(2)} &\equiv - \int_{-h}^h z^l dz = -a_l^{(1)}, \quad i = 1, 2, \\
 0 \leq l &\leq K+1, \quad 0 \leq k \leq K.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Согласно обозначениям (6), интегралы в (31) являются табличными [34], поэтому могут быть вычислены аналитически или численно с любой наперед заданной точностью. Из равенств (31) следует, что компоненты матриц C_i и векторов-столбцов w_i необходимо вычислить только один раз, поэтому уравнения (29) целесообразно преобразовать к виду

$$\varepsilon_i = C_i^{-1} u_i + \bar{w}_i \partial_i w, \quad i = 1, 2, \tag{32}$$

где

$$\bar{w}_i = C_i^{-1} w_i, \quad i = 1, 2; \tag{33}$$

C_i^{-1} – матрицы, обратные матрицам C_i .

Если в данный момент времени из каких-то соображений известны значения функций w и $u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq K+1$), то из матричных соотношений (32) при учете (30), (31) и (33) можно вычислить значения функций u_i , $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ($i = 1, 2$, $0 \leq k \leq K$), которые характеризуют осредненные деформации композиции (3) и (7) и тангенциальные перемещения (5) точек цилиндрической оболочки.

2. Метод расчета

Численное решение исследуемой задачи построим на основе алгоритма шагов по времени [9, 22, 26–31]. Согласно этому значения неизвестных функций определяем в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Предполагаем, что при $t = t_m$ уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned}
 w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)m}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \\
 \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\
 \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(s)m}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(s)}(t_m, \mathbf{r}), \\
 X_j^m(\mathbf{r}) &\equiv X_j(t_m, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}, \\
 m = n-1, n, \quad 0 \leq l &\leq K+1, \quad 0 \leq s \leq N, \\
 \mathbf{x} \in G, \quad |z| &\leq h,
 \end{aligned} \tag{34}$$

где $\sigma_{ij}^{(s)}$ – тензор напряжений в s -м компоненте композиции оболочки ($s = 0$ – связующее, $s = 1, 2, \dots, N$ – волокна s -го семейства).

Используя формулы (15) при учете соотношений (17) и (34), при $t = t_n$ можем определить все внутренние силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, $\bar{M}_{ij}^{(l)}$ и $\bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$, входящие в правые части уравнений (13), (14) и в силовые граничные условия (24).

Аппроксимируем производные по времени t центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне [9, 22, 26, 27]. Это позволяет построить явную схему численного интегрирования рассматриваемой задачи. После такой дискретизации конечно-разностные аналоги уравнений (13) и (14) при учете обозначений, аналогичных (34), примут вид

$$\begin{aligned}
 &\frac{2hp}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) = \\
 &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)n} + M_{11}^{(0)n} \partial_1 w^n + \bar{M}_{12}^{(0)n} \partial_2 w^n \right) + \\
 &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)n} + \bar{M}_{21}^{(0)n} \partial_1 w^n + \bar{\bar{M}}_{22}^{(0)n} \partial_2 w^n \right) - \\
 &\quad - \bar{M}_{22}^{(0)n} + \sigma_{33}^{(+)n} - \sigma_{33}^{(-)n} + X_3^{(0)n}, \\
 &\frac{\rho}{\tau^2} \left(u_1^{(l)n+1} - 2u_1^{(l)n} + u_1^{(l)n-1} \right) = \partial_1 \left(M_{11}^{(l)n} - M_{13}^{(l)n} \partial_1 w^n \right) + \\
 &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)n} - \bar{M}_{23}^{(l)n} \partial_1 w^n \right) - l M_{13}^{(l-1)n} + l M_{33}^{(l-1)n} \partial_1 w^n - \\
 &\quad - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)n} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)n} \right] \partial_1 w^n + X_1^{(l)n}, \\
 &\frac{\rho}{\tau^2} \left(u_2^{(l)n+1} - 2u_2^{(l)n} + u_2^{(l)n-1} \right) = \partial_1 \left(M_{21}^{(l)n} - \bar{M}_{13}^{(l)n} \partial_2 w^n \right) + \\
 &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)n} - \bar{M}_{23}^{(l)n} \partial_2 w^n \right) - l M_{23}^{(l-1)n} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)n} \partial_2 w^n - \\
 &\quad - h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)n} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)n} \right] \partial_2 w^n + \\
 &\quad + \bar{M}_{23}^{(l)n} + X_2^{(l)n}, \quad 0 \leq l \leq K+1, \\
 &\mathbf{x} \in G, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{35}
 \end{aligned}$$

Согласно (15), (17) и (34) правые части в (35) известны. Добавив к уравнениям (35) необходимые граничные условия (20), (24) и (26) при учете (25) и (28), можно вычислить по явной схеме значения функций w^{n+1} и $u_i^{(l)n+1}$ ($i = 1, 2$, $0 \leq l \leq K+1$) в следующий момент времени t_{n+1} . Затем по формулам (32) при учете (30), (31) и (33) можно определить функции u_i и $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ($i = 1, 2$, $0 \leq k \leq K$). После этого на основании равенств (3) и (7) при $t = t_{n+1}$ вычисляются осредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} в каждой точке цилиндрической оболочки. Дальнейшее решение исследуемой задачи стро-

ится совершенно так же, как и в работах [22, 27] (см. равенства (49)–(51) в [27]).

Структура левых частей равенств (35) указывает на то, что для начала расчета по построенной явной схеме нужно знать не только значения функций $\overset{0}{w}$ и $u_i^{(l)}$ (известные из начальных условий (22) и (27) при учете (28) и (34)), но и $\overset{1}{w}$, $u_i^{(l)}$ (см. уравнения (35) при $n=1$). Эти величины определим по формуле Тейлора при учете начальных условий (22), (27) и уравнений движения (13), (14) в момент времени t_0 [22, 27]:

$$\begin{aligned} \overset{1}{w}(\mathbf{x}) &= \overset{0}{w}(\mathbf{x}) + \tau \overset{0}{\dot{w}}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \overset{0}{\ddot{w}}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ u_i^{(l)}(\mathbf{x}) &= u_i^{(l)}(\mathbf{x}) + \tau \overset{0}{\dot{u}_i^{(l)}}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \overset{0}{\ddot{u}_i^{(l)}}(\mathbf{x}) + \\ &+ O(\tau^3) \approx 0, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad \mathbf{x} \in G. \end{aligned} \quad (36)$$

Приближенные равенства в соотношениях (36) выполняются с точностью порядка τ^3 в случае естественного состояния конструкции, когда в начальный момент времени t_0 оболочка покоится ($U_{0i} \equiv 0$, $V_{0i} \equiv 0$; см. (22) и (23)), а внешние нагрузки отсутствуют ($\sigma_{33}^{(\pm)}(t_0, \mathbf{x}) \equiv 0$, $X_i(t_0, \mathbf{r}) \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$; см. (13)–(15)).

Так как для замкнутой круговой цилиндрической оболочки область G (см. (3)) является прямоугольной, аппроксимируя в соотношениях (24) и (35) производные $\partial_i(\cdot)$ по пространственным переменным x_i их конечно-разностными аналогами от известных (см. (15) и (34)) в текущий момент времени t_n сеточных функций, получим явную численную схему «крест» [9, 22, 26, 27].

Необходимые условия устойчивости схемы «крест» для тонкостенных конструкций определены в [9] и для рассматриваемой армированной оболочки определяются неравенствами (60) из [27].

3. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретных примеров исследуем динамическое упругопластическое деформирование цилиндрических оболочек радиусом $R = 1$ м, разной толщины $2h$ и длины L . Оболочки жестко закреплены на обеих кромках: $U_{*3} \equiv 0$ и $u_{*i}^{(l)} \equiv 0$, $i = 1, 2$, $0 \leq l \leq K+1$, $x_1 = 0$ и $x_1 = L$ (см. (20), (26) и рис. 1, б) и нагружаются равномерным давлением со стороны внутренней лицевой поверхности по следующему закону (см. (13), (14), (16), (17) и (35)) [28]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(+)} &\equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \\ &= \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (38)$$

t_{\max} – время, при котором давление $p(t)$ достигает максимума $p = p_{\max} > 0$; t_{\min} – время, при котором $p(t)$ становится пренебрежимо малым по сравнению с p_{\max} (так, соотношение (38) получено при условии $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$). В расчетах примем $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс, что соответствует давлению, порожденному воздушной взрывной волной [28]. Объемные нагрузки не учитываем, т.е. $X_i \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$ (см. (10), (11) и (15)).

В начальный момент времени $t_0 = 0$ конструкции покоятся и находятся в естественном состоянии: $U_{0i} \equiv 0$ и $V_{0i} \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$ (см. (22) и (27) при учете (28)). Согласно (37) при $t = t_0 = 0$ внешняя нагрузка отсутствует, а значит, выполняются приближенные равенства (36).

Оболочки выполнены из эпоксидного связующего, отвержденного ароматическим амином, и армированы двумя ($N = 2$) семействами стекловолокон марки S-994. Структура армирования является однородной, причем волокна разных семейств уложены продольно-симметрично ($\psi_1 = -\psi_2 = \psi = \text{const}$) с одинаковыми плотностями армирования ($\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$). Рассматриваются композиции с суммарной плотностью армирования $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 0,3$. Упругопластическое поведение материалов компонентов композиции на стадии активного нагружения характеризуется идеализированной диаграммой с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E_m \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(m)} = \sigma_s^{(m)} / E_m, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(m)} + E_s^{(m)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(m)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(m)}, \quad 0 \leq m \leq N, \end{cases}$$

где σ и ε – напряжение и осевая деформация при растяжении и сжатии материала; E_m и $E_s^{(m)}$ – модули упругости и линейного упрочнения материала m -го компонента композиции; $\sigma_s^{(m)}$ и $\varepsilon_s^{(m)}$ – условный предел текучести и соответствующая осевая деформация того же материала. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции цилиндрических оболочек указаны в таблице, где ν – коэффициент Пуассона, a – скорость звука. (Характеристики эпоксидного связующего рассчитаны по экспериментальной диаграмме деформирования, приведенной на с. 108 в [24]; характеристики стекловолокон определены по табличным данным, приведенным на с. 235 в [23].)

При заданных условиях закрепления, нагружения и армирования цилиндрических оболочек они деформируются осесимметрично, т.е. решения рассматриваемых ниже задач не зависят от окружной координаты x_2 .

Физико-механические характеристики материалов фаз композиции цилиндрических оболочек [23, 24]
 Materials physical and mechanical characteristics of composition phases of cylindrical shells [23, 24]

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	a , м/с
Эпоксисвязующее	1210	0,33	20	2,8	1,114	1521,2
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	5868,9

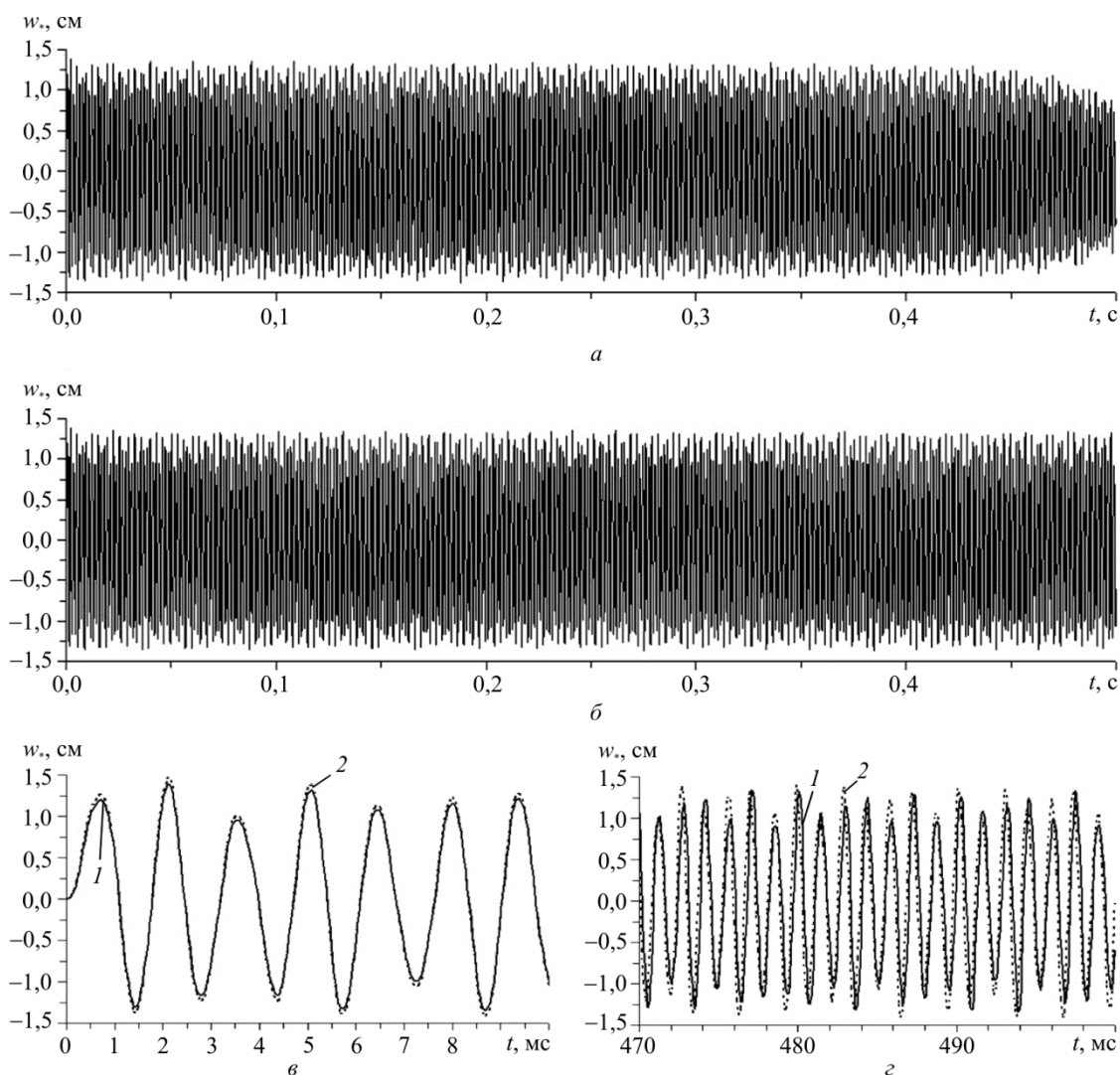


Рис. 2. Осцилляции точек центрального сечения относительно толстой короткой цилиндрической КМ-оболочки в поперечном направлении: расчет по теории Редди при $\chi = 1$ (а); расчет по уточненной теории ($K = 6$) при $\chi = 1$ (б); расчет при $K = 6$, $\chi = 1$ и $\chi = 2$ в окрестности начального момента времени (в); то же в окрестности момента времени $t = 500$ мс (г)

Fig. 2. Oscillations of points of central section of relative thick short cylindrical shell in transverse direction: computation according to Freddy theory at $\chi = 1$ (a); computation according to refined theory ($K = 6$) at $\chi = 1$ (b); computation in neighborhood of initial time at $K = 6$, $\chi = 1$ and $\chi = 2$ (c); same in neighborhood of time $t = 500$ ms (d)

Для удобства дальнейшего изложения введем параметр переключения χ такой, что при $\chi = 1$ в расчетах учитывается изменение метрики по толщине оболочки, а при $\chi = 2$ это изменение не учитывается, т.е. в соотношениях (7), (10), (11), (15) и (17) для тонких оболочек принимается приближенное равенство $R + z \approx R$.

На рис. 2 и 3 изображены поперечные осцилляции точек центральных сечений ($w_*(t) = w(t, L/2)$) цилиндрических оболочек, армированных в окружном направлении ($\psi = \pi/2$), имеющих разную длину L и разную относительную толщину $2h/R$. Расчеты проводи-

лись по разным теориям при разных значениях параметра χ .

На рис. 2 представлены зависимости $w_*(t)$, полученные для короткой ($L = R = 1$ м), относительно толстой ($2h = 10$ см, $2h/R = 1/10$) оболочки при максимальном уровне нагрузки $p_{\max} = 30$ МПа (см. (37)). На рис. 2, а осцилляции рассчитаны по теории Редди ($K = 0$), а на рис. 2, б – по уточненной теории ($K = 6$; см. (3)); в обоих случаях $\chi = 1$. Сравнение зависимостей $w_*(t)$, приведенных на рис. 2, а, б, свидетельствует

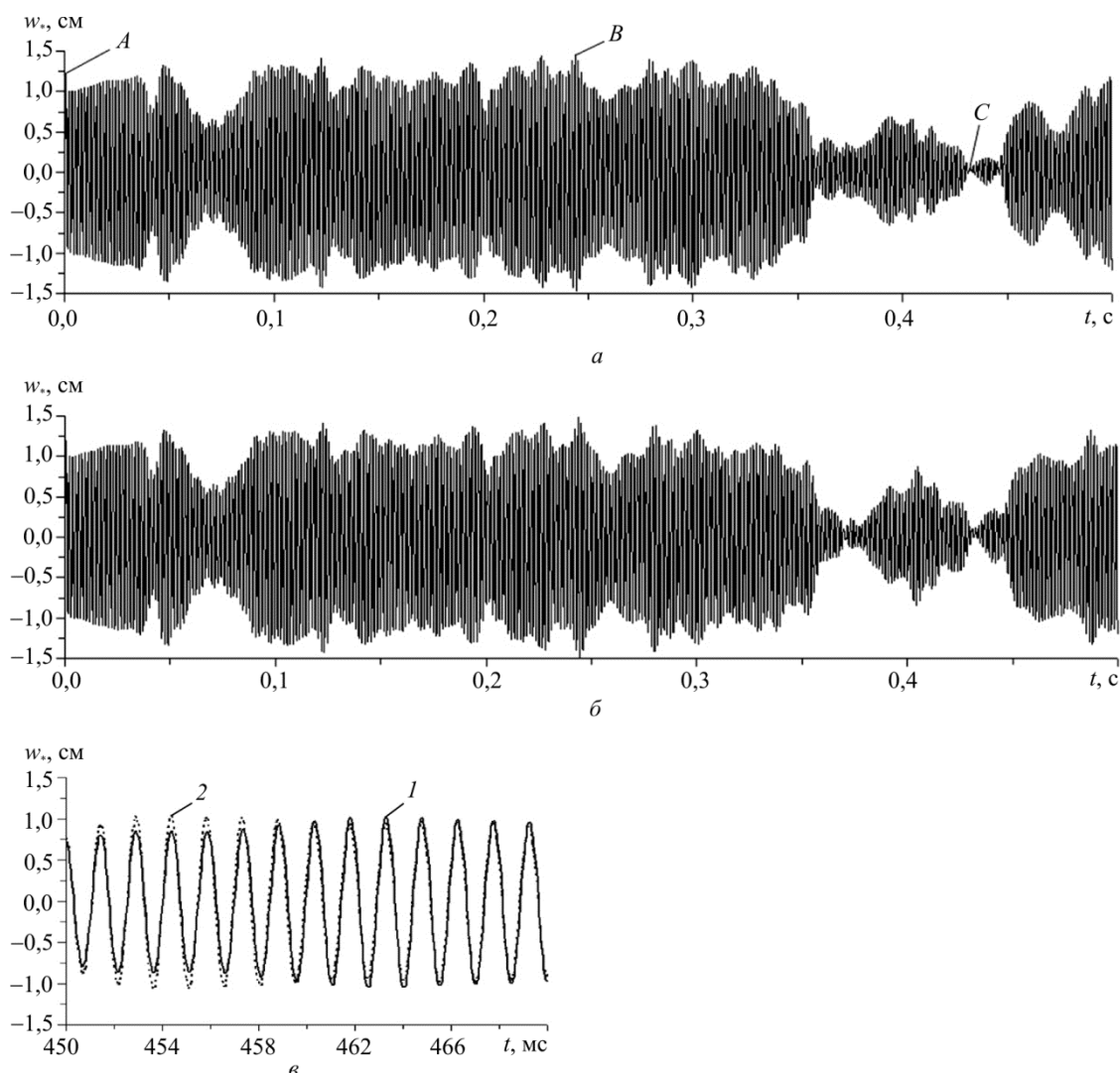


Рис. 3. Осцилляции точек центрального сечения весьма тонкой длинной цилиндрической КМ-оболочки в поперечном направлении: расчет по теории Редди при $\chi = 2$ (а); расчет по уточненной теории ($K = 5$) при $\chi = 1$ (б); расчет при $K = 5$, $\chi = 1$ и $\chi = 2$ в окрестности момента времени $t = 450$ мс (в)

Fig. 3. Oscillations of points of the central section of a very thin, long cylindrical shell in a transverse direction: computation according to the Reddy theory at $\chi = 2$ (a); computation according to refined theory ($K = 5$) at $\chi = 1$ (b); computation in neighborhood of time $t = 450$ ms at $K = 5$, $\chi = 1$ and $\chi = 2$ (c)

о том, что прогиб, рассчитанный по традиционной неклассической теории Редди (см. рис. 2, а), в окрестности момента времени $t \approx 0,5$ с существенно отличается от расчетного прогиба, полученного по уточненной теории (см. рис. 2, б). Следовательно, на временных интервалах порядка одной секунды и более широко используемая в расчетной практике теория Редди в силу своего низкого порядка точности может приводить к результатам, которые для относительно толстых, упругопластически деформируемых армированных цилиндрических оболочек значительно отличаются от результатов расчетов, выполненных по уточненным теориям (при $K \geq 1$).

На рис. 2, в, г приведены зависимости $w_*(t)$, полученные для той же оболочки по уточненной теории ($K = 6$), но при разных значениях параметра χ . На рис. 2, в изображены осцилляции, рассчитанные в окрестности

начального момента времени ($t \approx 0$), а на рис. 2, г – в окрестности момента времени $t = 0,5$ с. Номера кривых на этих рисунках равны значениям параметра χ , т.е. сплошные кривые 1 на рис. 2, в, г являются частями кривой, изображенной на рис. 2, б, а пунктирные кривые 2 на рис. 2, в, г рассчитаны без учета изменения метрики по толщине оболочки. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что неучет изменения метрики по поперечной координате относительно толстой цилиндрической оболочки приводит к завышению ее расчетной податливости, причем в окрестности начального момента времени (рис. 2, в) это завышение составляет чуть более 5 %, а в окрестности момента времени $t = 0,5$ с оно достигает уже 30 % (рис. 2, г). Следовательно, неучет изменения метрики по толщине относительно толстой армированной цилиндрической оболочки при ее упру-

гопластическом деформировании может приводить к существенному завышению расчетной податливости такой конструкции, причем с увеличением расчетного интервала времени зависимости, полученные при $\chi = 1$ и $\chi = 2$, различаются все больше.

На рис. 3 изображены зависимости $w_*(t)$, соответствующие длинной ($L = 4$ м), весьма тонкой ($2h = 1$ см, $2h/R = 1/100$) оболочке и рассчитанные при $p_{\max} = 3$ МПа. На рис. 3, а представлены результаты расчета, выполненного по теории Редди при $\chi = 2$, а на рис. 3, б, в – по уточненной теории ($K = 5$), причем зависимость $w_*(t)$ на рис. 3, б получена при $\chi = 1$, а номера кривых на рис. 3, в имеют тот же смысл, что и на рис. 2, в, г. Сравнение кривых, изображенных на рис. 3, а, б, при $t > 0,3$ с свидетельствует о том, что даже для весьма тонкой армированной цилиндрической оболочки, деформируемой упругопластически, расчет ее податливости по теории Редди (см. рис. 3, а) с течением времени приводит к значительному отклонению от результатов расчетов, выполненных по уточненным теориям (см. рис. 3, б). Следовательно, динамический расчет даже весьма тонких армированных оболочек при их упругопластическом деформировании целесообразно проводить по уточненным теориям изгиба (при $K \geq 1$).

Сопоставление кривых 1 и 2, изображенных на рис. 3, в, показывает, что в окрестности момента времени $t = 454$ мс прогиб центрального сечения оболочки, рассчитанный при $\chi = 2$ (пунктирная кривая 2), может существенно отличаться от аналогичной расчетной величины, полученной при $\chi = 1$ (сплошная линия 1). Следовательно, даже в случае весьма тонкой армированной цилиндрической оболочки, деформируемой упругопластически, при исследовании ее динамического поведения необходимо учитывать изменение ее метрики по толщине конструкции, если расчетный интервал времени имеет протяженность порядка одной секунды и более.

Для объяснения причины, почему динамические расчеты, выполненные в рамках теории Редди и уточненной теории (см. рис. 3, а, б при $t > 0,3$ с), на временных интервалах порядка одной секунды и более значительно различаются даже для весьма тонких цилиндрических оболочек, рассмотрим зависимости $w(t, x_1)$ в некоторые характерные моменты времени t . На рис. 4 изображены эпюры прогибов $w(x_1)$, определенные при $t = 0,6$ мс (кривые 1–3), $t = 243,7$ мс (линии 1'–3') и $t = 435,3$ мс (кривые 1''–3''). Расчеты проводились при тех же условиях, что и для рис. 3. Кривые 3, 3' и 3'' получены по теории Редди при $\chi = 2$ (результаты этого же расчета представлены и на рис. 3, а). Кривые 1, 1', 1'' и 2, 2', 2'' определены по уточненной

теории ($K = 5$) при $\chi = 1$ и $\chi = 2$ соответственно (результаты этих же расчетов продемонстрированы на рис. 3, б, в). Так как структура армирования, закрепление и нагружение конструкции симметричны относительно сечения $x_1 = L/2$, зависимости $w(x_1)$ являются также симметричными относительно центрального сечения ($w(x_1) = w(L - x_1)$, $0 \leq x_1 \leq L/2$), поэтому на рис. 4 приведены только левые половины эпюр $w(x_1)$. Точки А, В, С на рис. 4 соответствуют точкам А, В, С на рис. 3, а. Это дает возможность получить наглядное представление о моментах времени t , в которые рассчитаны зависимости $w(x_1)$, изображенные на рис. 4.

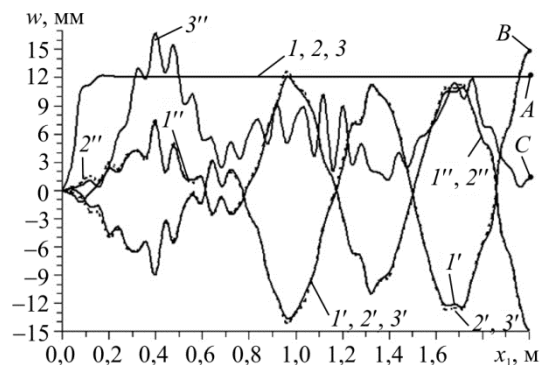


Рис. 4. Эпюры прогибов весьма тонкой длинной цилиндрической КМ-оболочки, рассчитанные в разные моменты времени по уточненной теории ($K = 5$) и теории Редди при $\chi = 1$ и $\chi = 2$

Fig. 4. Deflections of a very thin, long cylindrical shell at different time according to refined theory ($K = 5$) and the Reddy theory at $\chi = 1$ and $\chi = 2$

Кривые 1–3 на рис. 4 соответствуют моменту времени t , когда достигается первый локальный максимум на кривых, приведенных на рис. 3, а, б. Поведение кривых 1–3 на рис. 4 показывает, что в окрестности начального момента времени ($t = 0,6$ мс) в длинной цилиндрической оболочке почти всюду реализуется безмоментное напряженное состояние (см. горизонтальный участок на кривых 1–3, имеющий значительную протяженность). Поэтому-то в окрестности начального момента времени уточненные теории и теория Редди для тонких оболочек приводят к практически неразличимым результатам. Кроме того, отметим, что при квазистатическом нагружении тонкой длинной цилиндрической оболочки внутренним давлением зависимости $w(x_1)$ получаются качественно аналогичными кривым 1–3 на рис. 4. Следовательно, в случае квазистатического нагружения тонких длинных армированных цилиндрических оболочек их упругопластическое поведение можно вполне адекватно рассчитывать на основе традиционной неклассической теории Редди.

При динамическом же нагружении такой оболочки сформировавшееся в ней в окрестности начального момента времени, почти всюду безмоментное напряженное

состояние с течением времени «распадается», после чего доминирующим становится изгибное состояние. Об этом свидетельствует сопоставление поведения кривых 1–3 с остальными зависимостями, приведенными на рис. 4. Следовательно, с течением времени тонкая оболочка начинает испытывать все более интенсивное сдвиговое деформирование в поперечном направлении (а не только в узких зонах краевых эффектов, как это имеет место в случае, соответствующем кривым 1–3). Именно поэтому при $t > 0,3$ с после многократных осцилляций весьма тонкой цилиндрической оболочки наблюдается значительное различие в прогибах, рассчитанных по теории Редди и по уточненной теории (ср. кривые на рис. 3, а, б при $t > 0,3$ с, а также кривые 1'', 2'' и 3'' на рис. 4). По-видимому, это же обстоятельство является причиной того, что с увеличением расчетного интервала времени результаты, полученные по уточненной теории при $\chi = 1$ и $\chi = 2$, начинают значительно различаться (ср. кривые 1 и 2 на рис. 3, в при $t = 454$ мс).

Сопоставление локальных максимумов и минимумов на кривых, изображенных на рис. 3, а, б, а также на кривых 1–3 и 1'–3' на рис. 4 свидетельствует о том, что максимальный по модулю прогиб в тонкой цилиндрической оболочке может возникнуть после нескольких десятков свободных колебаний такой конструкции (ср. ординаты точек А и В на рис. 3, а и рис. 4) [1].

Выше рассматривались цилиндрические оболочки с окружным армированием ($\psi = \pi/2$). Дополнительно были проведены расчеты для оболочек прежней геометрии, армированных спирально ($\psi_1 = -\psi_2 = \psi = \text{const}$; см. рис. 1, б) с тем же расходом арматуры ($\omega_1 = \omega_2 = 0,15$). Для оценки податливости перекрестно армированных конструкций использовалась величина

$$w_m(\psi) = \max_{t, x_1} |w(t, x_1; \psi)|, \quad (39)$$

$$0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \psi \leq \pi/2.$$

Эти расчеты показали, что для относительно толстых и коротких оболочек ($2h = 10$ см, $R = L = 1$ м) и для весьма тонких длинных цилиндрических оболочек ($2h = 1$ см, $R = 1$ м, $L = 4$ м) зависимости (39) являются монотонно убывающими, а значит, с точки зрения минимизации податливости таких конструкций армирование в окружном направлении ($\psi = \pi/2$) является наилучшим, т.е. результаты расчетов, представленных на рис. 2–4, относятся к оптимально армированным оболочкам. При этом было выяснено, что в случаях неоптимального армирования таких цилиндрических оболочек ($0 \leq \psi < \pi/2$) различие решений, полученных по уточненной теории и теории Редди, становятся существенно большими, чем в случаях оптимальной укладки волокон ($\psi = \pi/2$). Кроме того, было обнаружено, что для относительно толстой ($2h = 10$ см, $L = 1$ м, $2h/L = 1/10$),

но весьма короткой оболочки ($R = 3$ м, $L/R = 1/3$) зависимость (39) является монотонно возрастающей, поэтому в данном случае наилучшей с точки зрения минимизации податливости конструкции является структура продольного армирования ($\psi = 0$). Качественно такое же поведение имеют зависимости (39) и в случае квазистатического нагружения рассматриваемых оболочек, но значения w_m при этом примерно на 40 % меньше аналогичных величин, полученных при динамическом нагружении таких же конструкций. Все полученные результаты переносятся и на оболочки, жестко закрепленные на одной кромке и свободные от закрепления на другой кромке (см. рис. 1, а), с той лишь разницей, что частота колебаний таких конструкций много меньше, чем в случае закрепления обеих кромок (см. рис. 1, б).

При проведении всех расчетов вдоль оболочек вводилась регулярная сетка с шагом $\Delta x_1 = L/100 \geq 1$ см, а шаг по времени τ был равен 1 мкс. При этом получается отношение $\Delta x_1 / \tau \geq 10$ км/с. Кроме того, для рассматриваемых толщин оболочек имеем $2h / \tau \geq 10$ км/с. Эти отношения значительно превышают значения a , приведенные в таблице для материалов компонентов композиции. Следовательно, согласно [27], необходимые условия устойчивости используемой схемы «крест» во всех случаях выполняются со значительным запасом.

Заключение

Анализ упругопластического деформирования гибких армированных цилиндрических оболочек показал, что, как и в случае пологих волокнистых оболочек [22], использование традиционной неклассической теории Редди, учитывающей в первом приближении искривление поперечной нормали тонкостенной конструкции, не гарантирует получения адекватных результатов расчетов податливости не только для относительно толстых и весьма коротких цилиндрических КМ-оболочек (как при квазистатическом, так и динамическом нагружении), но и для весьма тонких и длинных армированных оболочек при интенсивном динамическом нагружении, так как при расчетных интервалах времени порядка одной секунды и более прогибы таких конструкций, рассчитанные по теории Редди и уточненным теориям, предложенным в настоящей работе, становятся существенно различными. Еще большее различие наблюдается при сравнении деформированных состояний в компонентах композиции, определенных по этим теориям. Кроме того, в динамических расчетах даже весьма тонких цилиндрических КМ-оболочек необходимо учитывать изменение метрики по толщине конструкции. В случаях квазистатического нагружения тонких и длинных цилиндрических КМ-оболочек их упругопластическое деформирование с приемлемой для практических приложений точностью можно определять по теории Редди без учета изменения метрики по их толщине.

Таким образом, при проведении динамических расчетов упругопластически деформируемых армированных цилиндрических оболочек целесообразно использовать теории повышенной точности, например, предложенные в настоящей работе, а также учитывать изменение метрики по толщине таких конструкций.

Как и в упругом случае [1], в силу геометрической нелинейности рассматриваемой задачи максимальный

прогиб в тонкой, упругопластически деформируемой цилиндрической КМ-оболочке может возникнуть после нескольких десятков свободных осцилляций в поперечном направлении, а не только в окрестности начального момента времени, когда действует интенсивная кратковременная динамическая нагрузка, как это традиционно принято считать [9, 28].

Библиографический список

1. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
2. Прикладные задачи механики цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов, В.П. Георгиевский, А.Я. Недбай, В.А. Андрушин. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
3. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers of Mechanical Eng.* – 2013. – Vol. 8. – No. 2. – P. 187–200.
4. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 3rd ed. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
5. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. // *Compos. Struct.* – 2001. – Vol. 53. – No. 1. – P. 21–42.
6. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites.* – 2001. – Part A 32. – P. 901–910.
7. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
9. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
10. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004.
11. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quarterly of Applied Mathematics.* – 1955. – Vol. 13. – No. 2. – P. 169–176.
12. Mindlin R.D., Bleich H.H. Response of an elastic cylindrical shells to a transverse step shock wave // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* – 1953. – Vol. 20. – No. 2. – P. 189–195.
13. Whitney J., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. of Sound and Vibration.* – 1973. – Vol. 30. – No. 1. – P. 85–97.
14. Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M. A higher-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* – 1977. – Vol. 44. – P. 669–676.
15. Muc A., Muc-Wierzgoń M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells // *Compos. Struct.* – 2012. – Vol. 94. – No. 4. – P. 1461–1470.
16. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 336 с.
17. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
18. Шкутин Л.И. Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 139 с.
19. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
20. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ.* – 1994. – № 2. – С. 33–42.
21. Пикуль В.В. Механика оболочек. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
22. Янковский А.П. Уточненная модель упругопластического изгибного деформирования гибких армированных пологих оболочек, построенная на основе явной схемы типа «крест» // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2017. – Т. 10, № 3. – С. 276–292.
23. Композиционные материалы: справ. / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
24. Справочник по композитным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
25. Maćko W., Kowalewski Z.L. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates // *Appl. Mech. Mater.* – 2011. – Vol. 82. – P. 166–171.
26. Янковский А.П. Моделирование динамики армированных пологих оболочек из нелинейно-упругих материалов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2017. – № 2. – С. 226–245.
27. Янковский А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 279–297.
28. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers & Structures.* – 1987. – Vol. 26. – No. 1/2. – P. 1–15.
29. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.
30. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading // *Composites.* – 2004. – Part B 35. – P. 673–683.
31. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* – 2011. – Vol. 46. – P. 807–817.
32. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
33. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
34. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798 с.

References

1. Bogdanovich A.E., Nelineinye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. *Riga, Zinatne*, 1987, 295 p.
2. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. *Moskva, Fizmatlit*, 2014, 408 p.
3. Gill, S.K., Gupta, M., Satsangi, P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Frontiers of Mechanical Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187-200.
4. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 3rd ed. *Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group*, 2012, 686 p.
5. Mouritz, A.P., Gellert, E., Burchill, P., Challis, K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21-42.
6. Bannister, M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective, *Composites*, 2001, part A 32, pp. 901-910.
7. Grigorenko Ya.M. Izotropnye i anizotropnye sloistye obolochki vrashchenia peremennoy zhestkosti [Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable rigidity]. *Kiev, Naukova dumka*, 1973, 228 p.
8. Ambarcumian S.A. Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]. *Moskva, Nauka*, 1974, 446 p.
9. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. *Nizhniy Novgorod, Publ Nizhniy Novgorod State University*, 2002, 400 p.
10. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed. *Boca Raton, CRC Press*, 2004.
11. Reissner, E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169-176.
12. Mindlin, R.D., Bleich, H.H. Response of an elastic cylindrical shells to a transverse step shock wave, *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1953, vol. 20, no. 2, pp. 189-195.
13. Whitney, J., Sun, C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *J. of Sound and Vibration*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85-97.
14. Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M. A higher-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, pp. 669-676.
15. Muc, A., Muc-Wierzgoń, M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells, *Compos. Struct.*, 2012, Vol. 94, No. 4, pp. 1461-1470.
16. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. Nelineinoe deformirovanie i ustoychivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]. *Moskva, Knizhnyi dom "LIBROKOM"*, 2012, 336 p.
17. Andreev A.N. Uprugost' i termouprugost' sloistyykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotoryye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. *Saarbrucken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing*, 2013, 93 p.
18. Shkutin L.I. Nelineinye deformacii i katastrofy tonkikh tel [Nonlinear deformations and accidents of thin bodies]. *Novosibirsk, SB RAS Publ.*, 2014, 139 p.
19. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. Mnogosloynnye anisotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost' i kolebaniya [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]. *Novosibirsk, Nauka Publ.*, 2001, 287 p.
20. Kulikov, G.M. Termouprugost' gibkikh mnogoslownnykh anizotropnykh obolochek [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]. *Izvestia RAN. MTT – News RAS. Mechanics of Solids*, 1994, No. 2, pp. 33-42.
21. Pikul' V.V. Mekhanika obolochek [Mechanics of shells]. *Vladivostok, Dal'nauka*, 2009, 536 p.
22. Yankovskii, A.P. Utochnennaya model' uprugoplasticheskogo izgibnogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh pologikh obolochek, postroennaya na osnove yavnoi skhemy tipa "krest" [A refined model of elastic-plastic bending deformation of flexible reinforced shallow shells based on explicit "cross" scheme]. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 276-292.
23. Karpinos D.M. Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]. *Kiev, Naukova dumka*, 1985, 592 p.
24. Lubin G. Handbook of composites. *New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc.*, 1982, 442 p.
25. Mačko, W., Kowalewski, Z.L. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates, *Appl. Mech. Mater.*, 2011, vol. 82, pp. 166-171.
26. Yankovskii A.P. Modeling of the dynamics of reinforced shallow shells made of nonlinear elastic materials. PNRPU Mechanics Bulletin, 2017, no. 2, pp. 226-245. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.13
27. Yankovskii, A.P. Applying the Explicit Time Central Difference Method for Numerical Simulation of the Dynamic Behavior of Elastoplastic Flexible Reinforced Plates, *Journal of Mechanics and Technical Physics*, 2017, vol. 58, no. 7, pp. 1223-1241.
28. Houlston, R., DesRochers, C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1-15.
29. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. *Oxford, Butterworth-Heinemann*, 2000, 707 p.
30. Librescu, L., Oh, S.-Y., Hohe, J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading. *Composites*, 2004, part B 35, pp. 673-683.
31. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 807-817.
32. Novozhilov V.V. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. *Leningrad: Sudpromgiz*, 1958, 371 p.
33. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Niashin Yu.I. Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, applications]. *Moskva, Nauka*, 1986, 232 p.
34. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady [Integrals and sequences]. *Moskva, Nauka*, 1981, 798 p.