

Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах адгезионного расслоения композита // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 1. – С. 100–109. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.09

Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modeling generation of a new material surfaces in the processes of adhesive delamination of a composite. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no.1, pp. 100-109. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.09



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.09

УДК 539.375

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ НОВЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЦЕССАХ АДГЕЗИОННОГО РАССЛОЕНИЯ КОМПОЗИТА

**В.В. Глаголев, А.А. Маркин, А.А. Фурсаев**

Тульский государственный университет, Тула, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 27 ноября 2017 г.  
Принята: 15 марта 2018 г.  
Опубликована: 30 марта 2018 г.

#### Ключевые слова:

композит, характерный размер, процесс разрушения, простой процесс, вариационное уравнение, метод конечных элементов.

### АННОТАЦИЯ

Построена модель адгезионного расслоения композиционного материала. Расслоение рассматривается как термомеханический процесс, в котором напряженное состояние одной из границ адгезионного слоя изменяется до нуля при нарушении связей с соединяемым телом. В результате расслоения прекращается взаимодействие между частью композита, включающей адгезивный слой, и остальным телом. Получена система двух вариационных условий равновесности в скоростях, описывающая докритическое деформирование и процесс расслоения. Осреднение напряженно-деформированного состояния (НДС) адгезионного слоя позволяет избежать сингулярности в тупиковой точке образуемого математического разреза, и продвижение по границам слоя поверхности разрыва не приводит к ее образованию. При решении задачи докритического деформирования выделяется малая  $\delta$ -поверхность на границе адгезива, где достигнут критерий отслоения. Распределение нагрузки (узловых сил) на  $\delta$ -поверхности определяется путем повторного решения задачи докритического деформирования с известным из первоначального решения законом движения границы адгезивного слоя. Решается задача при простой разгрузке  $\delta$ -поверхности тела и сохранении внешней нагрузки, соответствующей началу процесса расслоения. В результате НДС тела в момент начала локальной разгрузки отличается от его состояния по окончании  $\delta$ -разгрузки. Для линейно-упругого материала проведено сравнение решений задачи в рамках данной модели и предложенной ранее модели когезионного расслоения, в которой предполагается полное разрушение связующего слоя. Установлено существенное различие граничных перемещений основных слоев композита в процессе его разрушения при увеличении поверхности разрыва контакта адгезионного слоя и основного материала.

© ПНИПУ

© Глаголев Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: vadim@tsu.tula.ru.

Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: markin-nikram@yandex.ru.

Фурсаев Артем Александрович – аспирант, e-mail: artemkajs@mail.ru.

Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vadim@tsu.tula.ru.

Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: markin-nikram@yandex.ru.

Artem A. Fursaev – PhD Student, e-mail: artemkajs@mail.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## MODELLING THE FORMATION OF NEW MATERIAL SURFACES DURING ADHESIVE DELAMINATION OF A COMPOSITE

V.V. Glagolev, A.A. Markin, A.A. Fursaev

Tula State University, Tula, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 27 November 2017  
Accepted: 15 March 2018  
Published: 30 March 2018

#### Keywords:

composite, characteristic size, process of destruction, simple process, variational equation, finite element method.

### ABSTRACT

The model of a composite material adhesive delamination is developed. The stress state of an adhesive bound varies to nil, when the bonds with the connected body are broken in the thermodynamic process which represents the delamination. The interaction between the part of the composite including the adhesive layer and the rest of the body is terminated as a result of delamination. We have obtained a system of two variational rate equations of the equilibrium flow of the process to describe the subcritical deformation and delamination. The averaging of the stress-strain state in the adhesive layer allows us to avoid singularity in the dead-end of the formed mathematical cut. The motion along the layer's bounds of the delamination surface does not lead to singularity uprising. When solving the problem of the subcritical deformation, we have distinguished a small  $\delta$ -surface on the bound of the adhesive, where the delamination criterion is reached. The load (node forces) distribution on the  $\delta$ -surface is determined by a repeated solving of the subcritical deformation problem. But the law of motion of the adhesive layer bound at a current stage is known from the initial solution. The problems about simple unloading of the  $\delta$ -surface of a body and keeping the external loading value on the level of the delamination start are solved. As a result, the body's stress strain in the beginning of the local unloading differs from its state, when  $\delta$ -unloading ends. For the linear elastic problem, we have performed a comparison between the results of the problem solving within the framework of the current model and the results for the model of a cohesive delamination, where a complete destruction of the cohesive layer is assumed. A substantial difference in boundary displacements of main composite layers during the destruction is established after the discontinuity surface's growth between the adhesive layer and primary material.

© PNRPU

### Введение

Расслоение композиционных материалов, соединенных посредством адгезива конечной толщины, определяется типом нарушения связи между компонентами. Рассматриваются модели адгезионного разрушения в случае, когда адгезив целиком отделяется от одного из связанных им материалов, или когезионного разрушения по массиву адгезива. Тип разрушения определяет критериальную базу для нахождения предельного состояния в случае решения задачи докритического деформирования. Для когезионного расслоения, если не пренебрегать толщиной адгезива, в процесс разрушения может быть вовлечен материальный объем конечной толщины, и в этом случае удобно использовать естественные для механики сплошной среды критерии, такие как критерий Ренкина или деформационный критерий по максимальным главным деформациям. Адгезионное разрушение рассматривается при достижении напряжений по границам слоя значений, равных предельным при отрыве или сдвиге. Кроме того, для смешанных мод нагружения в качестве критерия адгезионного разрушения используются квадратичные комбинации относительных напряжений в направлении отрыва и сдвига [1, 2] или сумма соответствующих энергий [2, 3]. Отметим, что в силу рассмотрения конечности толщины связующего компонента граничные напряжения могут отличаться от его внутренних напряжений вплоть

до сингулярных значений различных типов при прямом задании торцевой геометрии адгезива [4–8]

Однако в ряде случаев толщиной адгезива пренебрегают. При этом модель становится адекватной классическому представлению трещины в виде математического разреза, для которой сформированы подходы нахождения критического состояния. Так, широкое распространение получили когезионные элементы [9–14]. Физический смысл соответствующих постоянных в данных элементах будут определять не прочностные свойства материала, а свойства связи тело–адгезив. Рассматривают билинейный закон поведения когезионных сил, трапециидальный (трилинейный), параболический и экспоненциидальный [15]. Решение реальных задач строится, как правило, на билинейном законе распределения когезионных сил, где выделяются участки предразрушения и развития трещины [1–3, 16]. Здесь основным вопросом будет учет связей по разным границам адгезива и возможность рассматривать варианты, при которых прочность связей будет соответствовать прочности адгезива или связанных им тел. Отметим, что если адгезионные и прочностные свойства совпадают, то данная модель приводит к идентичным результатам для адгезионного и когезионного разрушения и в этом плане обобщение критериальной базы классической механики разрушения с энергетическим подходом имеет место [2, 3, 17, 18].

Одна из моделей, позволяющая учесть соответствующие прочностные свойства посредством промежу-

точного слоя без изгибной жесткости (мягкого слоя) конечной толщины, приведена в работах [19–22].

Вторым вопросом в моделировании «разрушения» является описание стадии формирования и эволюции новых материальных поверхностей. Здесь, как правило, решение задачи можно строить на основе метода конечных элементов: рассматривая процесс в элементе конечных размеров, применяя принцип «kill element» [23], при котором локальная матрица жесткости элемента умножается на число, близкое к нулю. Или разделяя узлы по границам элементов, вводя в рассмотрение когезионные элементы, в том числе и элементы нулевой толщины [24, 25]. В работе [26] приведен оптический метод исследования адгезионных материалов. В статье [27] дан обзор по конечно-элементным методам расчета тел, связанных адгезионным слоем, а в статьях [28–32] рассмотрены исследования по адгезионным материалам с различными механическими свойствами. Каждый из перечисленных подходов имеет свои недостатки. Так, принцип «kill element» из тела с геометрией без особых точек может приводить к конфигурации с особенностями, кроме того, при упругопластическом характере деформирования не учитывает перераспределение зон пластичности в окрестности области предразрушения. Использование когезионных элементов предполагает задание траектории разрушения априори, что возможно для ряда частных случаев, когда образование новых поверхностей не приводит к изменению выбранной траектории. Отметим, что применение того или иного принципа при образовании новых поверхностей не должно приводить к сингулярности, так как последующее решение задачи методом конечного элемента не будет иметь вычислительную сходимость.

В статье [33] рассмотрен вопрос когезионного разрушения слоя и образования новых материальных поверхностей в случае, когда прочностные свойства адгезионного слоя и его связей со связующими телами сопоставимы. В данной работе приведена постановка задачи докритической и посткритической стадии адгезионного разрушения. Расслоение происходит между поверхностями одного из несущих слоев композита и адгезионного слоя. Условием расслоения является достижение нормальных или касательных составляющих граничных напряжений критического значения. Процесс разделения границ несущего и адгезионного слоев описывается с помощью процедуры простой разгрузки при неизменной внешней нагрузке.

### 1. Постановка задачи докритического деформирования

На рис. 1 представлено тело, состоящее из трех частей, с различными материальными свойствами, где область под номером 3 ассоциируется с адгезионным слоем (AC) толщиной  $\delta_0$ , размер которой мал по сравнению с толщинами тел 1 и 2. Процесс нагружения

предполагаем квазистатическим и изотермическим. Условие равновесного протекания процесса [34] при малых деформациях и поворотах материальных волокон принимаем в виде

$$\iint_S \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds = \int_L \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  – поле скоростей;  $\mathbf{w} = 0,5(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$  – тензор деформации скорости;  $\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ;  $\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  – скорость внешней нагрузки на контуре  $L$ ;  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}$  – скорость тензора напряжений;  $t$  – подобный параметр времени;  $S = S_1 + S_2 + S_3$  – внутренняя область составного тела.

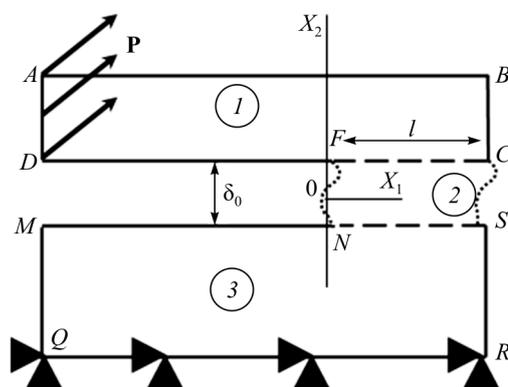


Рис. 1. Нагружение составного тела  
Fig. 1. Loading of a compound body

В области 3 средние по толщине  $\delta_0$  скорости напряжений определяем в виде  $\dot{\bar{\sigma}}_{21}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_{0/2}}^{\delta_{0/2}} \dot{\sigma}_{21}(x_1, x_2) dx_2$ ,  $\dot{\bar{\sigma}}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_{0/2}}^{\delta_{0/2}} \dot{\sigma}_{12}(x_1, x_2) dx_2$ ,  $\dot{\bar{\sigma}}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_{0/2}}^{\delta_{0/2}} \dot{\sigma}_{22}(x_1, x_2) dx_2$ ,  $\dot{\bar{\sigma}}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_{0/2}}^{\delta_{0/2}} \dot{\sigma}_{11}(x_1, x_2) dx_2$ , а средние скорости и скорости деформаций – через их граничные значения:

$$\begin{aligned} w_{22}(x_1) &= \left( \frac{v_2^+(x_1) - v_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \\ w_{11}(x_1) &= 0,5 \left( \frac{\partial v_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial \bar{v}_1(x_1)}{\partial x_2} &= \frac{v_1^+(x_1) - v_1^-(x_1)}{\delta_0}, \\ \frac{\partial \bar{v}_2(x_1)}{\partial x_1} &= 0,5 \left( \frac{\partial v_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \\ \bar{v}_1(x_1) &= 0,5(v_1^+(x_1) + v_1^-(x_1)), \\ \bar{v}_2(x_1) &= 0,5(v_2^+(x_1) + v_2^-(x_1)), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}^+$ ,  $\mathbf{v}^-$  – векторы скоростей верхней и нижней границы области 3.

Из выражений (3) приходим к представлению средней скорости сдвиговой деформации вдоль рассматриваемой области:

$$w_{21}(x_1) = 0,5 \left( \frac{v_1^+(x_1) - v_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left( \frac{\partial v_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right). \quad (5)$$

Принимаем, что векторы скоростей напряжений на сопряженных границах слоя 3 равны и противоположны векторам скоростей напряжений сопряженных границ тела. Кроме того, постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2:

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}(x_1, \delta_0/2); \mathbf{v}^- = \mathbf{v}(x_1, -\delta_0/2); x_1 \in [F, C]. \quad (6)$$

Запишем условие равновесного протекания процесса (1) для каждой части составного тела, представленного на рис. 1:

$$\iint_{S_1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds = \int_{L^1} \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl - \int_{L_{FC}} \dot{\mathbf{P}}^+ \cdot \delta \mathbf{v} dl, \quad (7)$$

$$\iint_{S_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds = \int_{L^2} \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl - \int_{L_{SN}} \dot{\mathbf{P}}^- \cdot \delta \mathbf{v} dl, \quad (8)$$

$$\iint_{S_3} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds = \int_{L_{CF}} \dot{\mathbf{P}}^+ \cdot \delta \mathbf{v}^+ dl + \int_{L_{NS}} \dot{\mathbf{P}}^- \cdot \delta \mathbf{v}^- dl, \quad (9)$$

где  $\dot{\mathbf{P}}^+ = \dot{\sigma}_{21}^+ \mathbf{e}_1 + \dot{\sigma}_{22}^+ \mathbf{e}_2$ ,  $\dot{\mathbf{P}}^- = -\dot{\sigma}_{21}^- \mathbf{e}_1 - \dot{\sigma}_{22}^- \mathbf{e}_2$  – векторы скоростей напряжений, действующие по верхней и нижней границе AC;  $\dot{\sigma}_{21}^+, \dot{\sigma}_{22}^+, \dot{\sigma}_{21}^-, \dot{\sigma}_{22}^-$  – скорости граничных напряжений AC;  $L^1, L^2$  – внешние контуры тел 1 и 2 без учета границ с AC. Торцы слоя считаем свободными от напряжений.

Дополнительную мощность внутренних напряжений в AC выразим посредством средних характеристик НДС, полагая  $\mathbf{w}(x_1, x_2) = \bar{\mathbf{w}}(x_1)$ :

$$\iint_{S_3} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds = \delta_0 \int_{x_1^F}^{x_1^C} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \bar{\mathbf{w}} dx_1 = \delta_0 \int_{L^1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \bar{\mathbf{w}} dx_1. \quad (10)$$

Из (9) и (10) с учетом (2) и (5) получаем вариационное условие равновесия AC:

$$\begin{aligned} & 0,5\delta_0 \int_{L^1} \dot{\sigma}_{11} \delta \left( \frac{\partial v_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 + \\ & + \int_{L^2} \dot{\sigma}_{22} \delta (v_2^+(x_1) - v_2^-(x_1)) dx_1 + \\ & + \delta_0 \int_{L^1} \dot{\sigma}_{21} \delta \left( \frac{v_1^+(x_1) - v_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left( \frac{\partial v_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right) dx_1 = \\ & = \int_{L^2} \dot{\sigma}_{22}^+ \delta v_2^+ dx_1 + \int_{L^1} \dot{\sigma}_{21}^+ \delta v_1^+ dx_1 - \\ & - \int_{L^2} \dot{\sigma}_{22}^- \delta v_2^- dx_1 - \int_{L^1} \dot{\sigma}_{21}^- \delta v_1^- dx_1. \end{aligned} \quad (11)$$

При отсутствии торцевых нагрузок на AC, интегрируя по частям, имеем

$$\int_{L^1} \dot{\sigma}_{11} \delta \left( \frac{\partial v_i^+(x_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 = - \int_{L^1} \frac{\partial \dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \delta v_i^+(x_1) dx_1, \quad (12)$$

$$\int_{L^2} \dot{\sigma}_{21} \delta \left( \frac{\partial v_i^+(x_1)}{\partial x_1} \right) dx_1 = - \int_{L^2} \frac{\partial \dot{\sigma}_{21}}{\partial x_1} \delta v_i^+(x_1) dx_1, \quad (13)$$

где  $i=1,2$ .

Из (11) с учетом (12) и (13), приравнявая слагаемые при одинаковых вариациях, приходим к представлениям граничных напряжений AC:

$$\dot{\sigma}_{21}^+ = \dot{\sigma}_{21}^- - 0,5\delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \quad \dot{\sigma}_{22}^+ = \dot{\sigma}_{22}^- - 0,5\delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{21}}{\partial x_1}, \quad (14)$$

$$\dot{\sigma}_{21}^- = \dot{\sigma}_{21}^+ + 0,5\delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \quad \dot{\sigma}_{22}^- = \dot{\sigma}_{22}^+ + 0,5\delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{21}}{\partial x_1}. \quad (15)$$

Подставив (14) в (7), а (15) в (8) и выполнив преобразования, обратные (12), (13), приходим к вариационным уравнениям равновесия для тела 1:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds + \int_{L^1} \dot{\sigma}_{22} \delta v_2^+ dx_1 + \int_{L^1} \dot{\sigma}_{21} \delta v_1^+ dx_1 + \\ & + 0,5\delta_0 \left( \int_{L^1} \dot{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta v_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{L^1} \dot{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta v_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L^1} \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl \end{aligned} \quad (16)$$

и тела 2:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds - \int_{L^2} \dot{\sigma}_{22} \delta v_2^- dx_1 - \int_{L^2} \dot{\sigma}_{21} \delta v_1^- dx_1 + \\ & + 0,5\delta_0 \left( \int_{L^2} \dot{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta v_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{L^2} \dot{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta v_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L^2} \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) необходимо замкнуть конкретными определяющими соотношениями, связывающими скорости напряжений со скоростями деформаций. Поведение материала тел 1 и 2 при активном нагружении ( $\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0$ ) определяем следующими физическими соотношениями:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G^{(i)} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}, \quad (18)$$

$$\dot{p} = 3K^{(i)} \dot{\theta}, \quad (19)$$

где  $i=1,2$ ;  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  – скорость девиатора тензора напряжений;  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}$  – девиаторная составляющая тензора деформаций скоростей;  $\dot{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{E}}$ ;  $K^{(i)}$  – модуль объемного сжатия;  $G^{(i)}$  – модуль сдвига  $G^{(i)} = G_e^{(i)}$  при  $T \leq T_p^{(i)}$ ,  $G^{(i)} = G_p^{(i)}$  при  $T > T_p^{(i)}$ ;  $T_p^{(i)}$  – предел текучести соответствующего материала;  $T$  – интенсивность касательных напряжений.

В состоянии разгрузки ( $\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \leq 0$ ) определяющие соотношения запишем в виде

$$\dot{\bar{\sigma}} = 2G_e^{(i)} \dot{\bar{w}}, \quad (20)$$

$$\dot{p} = 3K^{(i)} \dot{\theta}. \quad (21)$$

В материале слоя определяющие соотношения считаем справедливыми для средних по толщине слоя скоростных характеристик НДС:

$$\dot{\bar{\sigma}} = 2G^{(3)} \dot{\bar{w}}, \quad \sigma \cdot \dot{\sigma} > 0; \quad (22)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = 2G_e^{(3)} \dot{\bar{w}}, \quad \sigma \cdot \dot{\sigma} \leq 0; \quad (23)$$

$$\dot{p} = 3K^{(3)} \dot{\theta}, \quad (24)$$

где  $K^{(3)}$  – модуль объемного сжатия материала слоя;  $G^{(3)}$  – модуль сдвига материала слоя  $G^{(3)} = G_e^{(3)}$  при  $T \leq T_p^{(3)}$ ,  $G^{(3)} = G_p^{(3)}$  при  $T > T_p^{(3)}$ ;  $T_p^{(3)}$  – предел текучести материала слоя.

В результате подстановки в определяющие соотношения (22)–(24) выражений компонент средних деформаций скорости (2), (5) средние скорости напряжений определяются через граничные скорости и их производные. Таким образом, решение системы (16)–(21) сводится к определению поля скоростей  $\mathbf{v}(x_1, x_2)$  в телах 1 и 2 (см. рис. 1). В этом случае в уравнении (16) будут присутствовать скорости границы  $NS$  тела 2 (см. Рис. 1), а в уравнении (17) – скорости границы  $FC$  тела 1 (см. рис. 1).

После определения поля скоростей для нахождения поля перемещений и деформаций используем эволюционные соотношения

$$\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} dt, \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w} dt, \quad (26)$$

где  $\mathbf{u}(x_1, x_2)$  – поле перемещений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформации.

С учетом определяющих соотношений (18)–(21) находим поле напряжений в телах 1 и 2:

$$\sigma(t_1) = \sigma(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\sigma} dt, \quad (27)$$

а из (22)–(24), используя значения граничных скоростей слоя и связи (2), (5), определяем поле средних напряжений слоя:

$$\bar{\sigma}(t_1) = \bar{\sigma}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{\sigma}} dt. \quad (28)$$

Граничные напряжения по  $AC$  определяем согласно связям (14), (15).

Условия адгезионного разрушения формулируем на верхней и нижней границе  $AC$  для  $\delta$ -элементов разме-

ром  $\delta_0 \times \delta_0$  с использованием процедуры осреднения характеристик НДС:

$$\hat{\sigma}_{ij}^+ = \frac{1}{\delta_0} \int_{x_1^F}^{x_1^F + \delta_0} \sigma_{ij}^+ dx_1, \quad \hat{\sigma}_{ij}^- = \frac{1}{\delta_0} \int_{x_1^F}^{x_1^F + \delta_0} \sigma_{ij}^- dx_1. \quad (29)$$

Это является следствием основного физического допущения – разрушение охватывает частицу материала на характерном размере  $\delta_0$  [19,33,35]. Для адгезионного расслоения будем сравнивать граничные напряжения  $\hat{\sigma}_{22}^+$ ,  $\hat{\sigma}_{22}^-$  с адгезионной прочностью на отрыв, а граничные напряжения  $\hat{\sigma}_{21}^+$ ,  $\hat{\sigma}_{21}^-$  с адгезионной прочностью на сдвиг.

## 2. Постановка задачи адгезионного отслоения

При достижении среднего граничного напряжения (29) на верхней или нижней границе слоя на отрыв или сдвиг происходит адгезионное отслоение материала.

В момент предразрушения  $t_1$  мысленно разделим по границе слой и смежный ему материал по длине  $\delta_0$  и приложим к соответствующим новым поверхностям граничные векторы напряжений, соответствующие напряженному состоянию на границе. Без ограничения общности считаем, что разделение происходит по нижней границе слоя (рис. 2). При этом на образованные поверхности действуют векторы напряжений

$$\mathbf{P}^{NN_1} = \mathbf{P}^- = -\sigma_{21}^- e_1 - \sigma_{22}^- e_2, \quad (30)$$

$$\mathbf{P}^{NN_1} = -\mathbf{P}^- = \sigma_{21}^- e_1 + \sigma_{22}^- e_2. \quad (31)$$

Полагаем, что в течение интервала  $\Delta t$   $\delta$ -элемент потеряет связь с телом по границе, если нагрузка, действующая со стороны элемента слоя на тело, станет равна нулю. В этом случае в течение интервала времени  $\Delta t$  при неизменной внешней нагрузке  $\mathbf{P}$  необходимо разгрузить новые материальные поверхности. На интервале  $\Delta t$  полагаем распределение скоростей по толщине  $\delta$ -элемента однородным  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-$ . Считаем процесс разгрузки простым, зависящим от одного параметра  $\Delta t$  [33]. Это соответствует заданию скоростей внешних нагрузок на элемент слоя

$$\dot{\mathbf{P}}^{NN_1} = -\mathbf{P}^{NN_1} / \Delta t \quad (32)$$

и тело 2

$$\dot{\mathbf{P}}^{NN_1} = -\mathbf{P}^{NN_1} / \Delta t \quad (33)$$

при расслоении по нижней границе слоя.

Подставив (30) в (32), а (31) в (33), имеем

$$\dot{\mathbf{P}}^{NN_1} = \dot{\sigma}_{21}^- e_1 + \dot{\sigma}_{22}^- e_2, \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{NN_1} = -\dot{\sigma}_{21}^- e_1 - \dot{\sigma}_{22}^- e_2, \quad (35)$$

где  $\dot{\sigma}_{21}^- = \sigma_{21}^- / \Delta t$ ,  $\dot{\sigma}_{22}^- = \sigma_{22}^- / \Delta t$ .

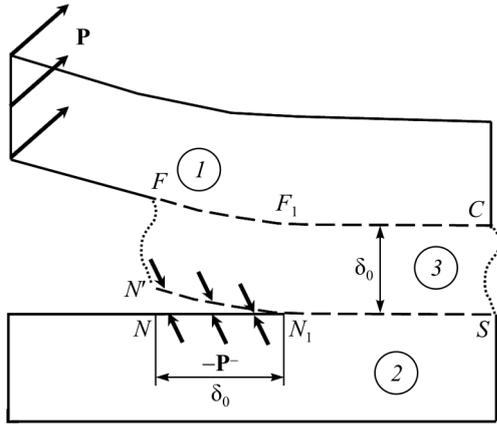


Рис. 2. Адгезионное отслоение  
Fig. 2. Adhesive delamination

Запишем условие равновесного протекания процесса расслоения для тел 1 и 2, представленных на рис. 2:

$$\iint_{S_1} \dot{\sigma} \cdot \delta w ds = - \int_{L_{FF_1}} \dot{P}^+ \cdot \delta v dl - \int_{L_{FC}} \dot{P}^+ \cdot \delta v dl, \quad (36)$$

$$\iint_{S_2} \dot{\sigma} \cdot \delta w ds = - \int_{L_{SN_1}} \dot{P}^- \cdot \delta v dl - \int_{L_{N_1N}} \dot{P}^- \cdot \delta v dl. \quad (37)$$

Так как граничное условие (34) задается на нижней границе слоя, определим соответствующее ей условие на участке  $FF_1$  тела 1 (см. рис. 2) согласно связи граничных напряжений слоя (14), (15). Вычитая попарно из (14) выражения (15) получаем

$$\dot{\sigma}_{21}^+ = \dot{\sigma}_{21}^- - \delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \quad (38)$$

$$\dot{\sigma}_{22}^+ = \dot{\sigma}_{22}^- - \delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{21}}{\partial x_1}. \quad (39)$$

Подставив (35), (36) в выражение  $\dot{P}^+ = \dot{\sigma}_{21}^+ e_1 + \dot{\sigma}_{22}^+ e_2$  и принимая во внимание связь  $\dot{P}^- = -\dot{\sigma}_{21}^- e_1 - \dot{\sigma}_{22}^- e_2$ , приходим к представлению

$$\dot{P}^+ = -\dot{P}^- - \delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1} e_1 - \delta_0 \frac{\partial \dot{\sigma}_{21}}{\partial x_1} e_2. \quad (40)$$

Подставив (37) в (33), (14) в (33), а (15) в (34) и выполнив преобразования, обратные (12), (13), приходим к вариационным уравнениям равновесности для тела 1

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} \dot{\sigma} \cdot \delta w ds + \int_{x_1^{F_1}}^{x_1^C} \dot{\sigma}_{22} \delta v_2^+ dx_1 + \int_{x_1^{F_1}}^{x_1^C} \dot{\sigma}_{21} \delta v_1^+ dx_1 + \\ & + 0,5 \delta_0 \left( \int_{x_1^{F_1}}^{x_1^C} \dot{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta v_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{x_1^{F_1}}^{x_1^C} \dot{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta v_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) + \\ & + \delta_0 \left( \int_{x_1^F}^{x_1^{F_1}} \dot{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta v_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{x_1^F}^{x_1^{F_1}} \dot{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta v_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{x_1^F}^{x_1^{F_1}} \dot{P}^- \cdot \delta v dx_1 \end{aligned} \quad (41)$$

и тела 2

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} \dot{\sigma} \cdot \delta w ds - \int_{x_1^{N_1}}^{x_1^S} \dot{\sigma}_{22} \delta v_2^- dx_1 - \int_{x_1^{N_1}}^{x_1^S} \dot{\sigma}_{21} \delta v_1^- dx_1 + \\ & + 0,5 \delta_0 \left( \int_{x_1^{N_1}}^{x_1^S} \dot{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta v_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{x_1^{N_1}}^{x_1^S} \dot{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta v_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \\ & = - \int_{x_1^N}^{x_1^{N_1}} \dot{P}^- \cdot \delta v dx_1. \end{aligned} \quad (42)$$

В уравнениях (41), (42) скорость внешней нагрузки  $\dot{P}^-$  находится из решения задачи докритического деформирования. Будем учитывать, что по нижней границе слоя и тела 2, на отслоившемся участке, нет условия жесткого сцепления:  $v^- \neq v(x_1, -\delta_0/2)$ ;  $x_1 \in [N, N_1]$ , а по верхней границе слоя и тела 1 имеет место жесткое сцепление границ:  $v^+ = v(x_1, \delta_0/2)$ ;  $x_1 \in [F, F_1]$ . В силу однородности поля скоростей по толщине слоя скорости деформаций определяются в нем по формулам (2) и (5) в виде

$$\begin{aligned} w_{11}(x_1) &= \frac{\partial v_1^+(x_1)}{\partial x_1}, \quad w_{22}(x_1) = 0, \\ w_{21}(x_1) &= 0,5 \frac{\partial v_2^+(x_1)}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставив в определяющие соотношения (22)–(24) выражения компонент средних деформаций скорости (2), (5) на участке слоя  $x_1 \in [F_1, C]$  и выражения (43) для участка  $x_1 \in [F, F_1]$ , средние скорости напряжений можно определить через граничные скорости и их производные. Таким образом, решение системы (41), (42), (18)–(24) сводится к определению поля скоростей  $v(x_1, x_2)$  в телах 1 и 2 (см. рис. 2). В этом случае в уравнении (41) будут присутствовать скорости границы  $N_1S$  тела 2 (см. рис. 2), а в уравнении (42) – скорости границы  $F_1C$  тела 1 (см. рис. 2).

Отметим, что в силу конечности поля напряжений в слое и его границах, а также отсутствия по границам слоя и сопрягаемых им тел геометрических особенностей представленная модель адгезионного расслоения не содержит сингулярности.

Для нахождения поля перемещений и деформаций используем эволюционные соотношения

$$u(t_1 + \Delta t) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} v dt, \quad (44)$$

$$\varepsilon(t_1 + \Delta t) = \varepsilon(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} w dt. \quad (45)$$

С учетом определяющих соотношений (18)–(21) находим поле напряжений в телах 1 и 2:

$$\sigma(t_1 + \Delta t) = \sigma(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \dot{\sigma} dt, \quad (46)$$

а из (22)–(24), используя значения граничных скоростей слоя и связи (43), определяем поле средних напряжений слоя:

$$\bar{\sigma}(t_1 + \Delta t) = \bar{\sigma}(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \dot{\bar{\sigma}} dt. \quad (47)$$

### 3. Метод дискретного решения задачи адгезионного расслоения

Решение задачи докритического деформирования (16)–(28) строим на основе метода конечного элемента с квадратичным распределением поля скоростей на элементе аналогично работе [19]. В этом случае поля скоростей напряжений и деформаций распределены по линейному закону в пределах каждого конечного элемента.

Каждый узел элемента характеризуется узловой скоростью  $\mathbf{v}^i$  и скоростью узловой силы  $\dot{\mathbf{F}}^i$ . Используя эволюционные соотношения

$$\mathbf{u}^i(t_1) = \mathbf{u}^i(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}^i dt, \quad (48)$$

$$\mathbf{F}^i(t_1) = \mathbf{F}^i(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{F}}^i dt, \quad (49)$$

в узлах определим узловые перемещения и узловые силы.

Основная проблема заключается в нахождении узловых сил  $\mathbf{F}^{-(j)}$ , соответствующих распределенной нагрузке (30) в момент предразрушения, и, следовательно, в формировании граничных условий для (38), (39). Дискретное решение (16)–(28) для докритического деформирования по границам сопряжения слоя на длине  $\delta_0$  в качестве неизвестных содержит вектор узловых скоростей  $\mathbf{v}^{+(i)}$ ,  $\mathbf{v}^{-(j)}$ , по которому из (25) может быть сформирован вектор перемещений  $\mathbf{u}^{+(i)}$ ,  $\mathbf{u}^{-(j)}$ .

Для определения узловых сил  $\mathbf{F}^{+(i)}$ ,  $\mathbf{F}^{-(j)}$  на границах сопряжения предлагается использовать процедуру повторного нагружения, состоящую в замене действия мысленно удаляемого элемента адгезионного слоя размером  $\delta_0 \times \delta_0$  заданием процесса изменения со «временем» узловых перемещений элемента при повторении закона внешнего воздействия на тело согласно работе [33].

Конечно-элементное решение повторного нагружения в узлах с заданным полем узловых скоростей  $\mathbf{v}^{+(i)}$ ,  $\mathbf{v}^{-(j)}$  в качестве неизвестных будет содержать вектор скоростей узловых сил  $\dot{\mathbf{F}}^{+(i)}$ ,  $\dot{\mathbf{F}}^{-(j)}$  по границам разрушаемого элемента. Таким образом, узловые силы, эквивалентные распределенной нагрузке (30) в момент предразрушения, будут определены.

После нахождения  $\mathbf{F}^{-(j)}$  решается задача (18)–(24), (41)–(44), соответствующая расслоению по нижней границе адгезива длиной  $\delta_0$ .

### 4. Результаты дискретного решения

В качестве примера расчета рассмотрим композиционный материал, представленный в работе [33], в состоянии плоской деформации, состоящий из двух элементов с материальными характеристиками, близкими к сплаву Д16:  $G = 2,8 \cdot 10^{10}$  Па;  $G_p = 5,2 \cdot 10^8$  Па;  $K = 6 \cdot 10^{10}$  Па;  $T_p = 3 \cdot 10^8$  Па – предел упругости;  $\sigma_k = 4,2 \cdot 10^8$  Па – предел прочности, связанных эпоксидной смолой со следующими свойствами:  $G = 1,3 \cdot 10^9$  Па;  $K = 1,7 \cdot 10^9$  Па;  $\sigma_k = 9 \cdot 10^7$  Па. Геометрические характеристики композита брались следующими:  $AD = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\delta_0 = FN = 10^{-3}$  м;  $MQ = 2 \cdot 10^{-2}$  м;  $AB = 10^{-1}$  м;  $DF = 5 \cdot 10^{-2}$  м. Скорость внешней нагрузки  $\dot{P} = 1$  Па/с направлена по углом  $\pi/4$  к оси  $OX_1$ .

Вычислительная сходимость решения предполагает разбиение участка границы, сопряженного с  $\delta$ -элементом, на четыре конечных элемента [19]. Посредством квадратичного закона распределения поля скоростей на конечном элементе девять узловых сил по нижней границе на длине  $\delta$  будут определять равновесие композита в момент предразрушения (см. рис. 2). Узловые силы, определяемые методом повторного нагружения [33], представлены в таблице. Силы в таблице отнесены к минимальному значению модуля их проекций. Нумерация узлов выбрана слева направо. Данный подход не требует введения дополнительных когезионных элементов в зоне предразрушения [24, 25], свойства которых не могут быть определены экспериментально.

Значения проекций безразмерных узловых сил  
The values of the projections of the dimensionless nodal forces

$F_1^-$	7,2	-1,6	-1	-2,3	-1,1	-2,3	-1,1	-2,2	-1,1
$F_2^-$	-5,6	7	3,7	6,9	3,3	6,4	3,1	5,9	2,9

Минимальный модуль проекций найденных узловых сил выбран в качестве параметра локальной разгрузки  $\Delta t$  для определения граничных условий (32) и (33).

На рис. 3 построены графики вертикальных перемещений нижней границы тела  $l$  при отслоении и когезионном разрушении, рассмотренном в работе [33]. Непрерывная линия соответствует когезионному разрушению слоя, а штриховая – отслоению по нижней границе слоя. Перемещения отнесены к значению перемещения  $u_2^+(0, \delta_0/2)$  на начало процесса когезионного разрушения. Безразмерная координата в направлении оси абсцисс определяется как  $x_1^b = x_1/\delta_0$ .

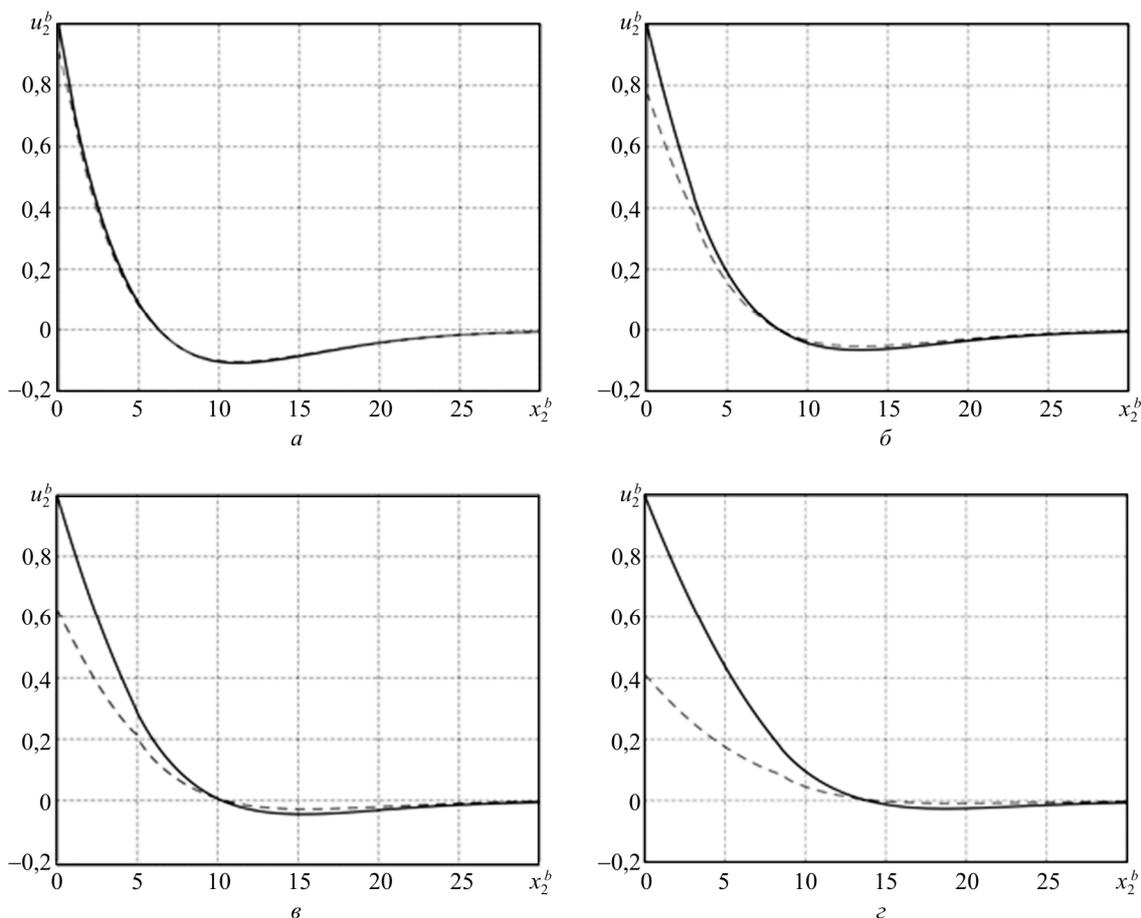


Рис. 3. Вертикальные перемещения при расслоении и когезионном разрушении. На рисунках сплошная линия показывает распределение перемещений при когезионном разрушении, пунктирная линия – распределение перемещений при адгезионном расслоении  
 Fig. 3. Vertical displacements during delamination and cohesive failure. In figures the solid line shows the distribution of displacements during the cohesive destruction of the layer and the dotted line shows the distribution of displacements during adhesive delamination

На рис. 3, а показано распределение перемещений при разрушении по длине  $\delta_0$ , на рис. 3, б – распределение перемещений при разрушении по длине  $3\delta_0$ , на рис. 3, в) – распределение перемещений при разрушении по длине  $5\delta_0$ , а на рис. 3, г) – распределение перемещений при разрушении по длине  $8\delta_0$  при упругом деформировании. Как видно из графиков, при увеличении границы расслоения разница между перемещениями становится существенной. Данный результат определяет дополнительная жесткость адгезионного слоя за счет напряжений растяжения, сжатия и сдвига. Учет слоя может играть существенную роль при сопоставимых толщинах адгезива и соединяемых материалов, а также в случае отслоения по длине, значительно превышающей толщину слоя.

#### Библиографический список

1. Morais A.B. de Cohesive zone beam modelling of mixed-mode I–II delamination // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2014. – Vol. 64 – P. 124–131. DOI: org/10.1016/j.compositesa.2014.05.004

Упругопластическое решение задачи качественно повторяет результат работы [33] по когезионному разрушению адгезива, а именно возможность перераспределения пластических зон и образования новых зон разрушения в результате локальной разгрузки.

#### Заключение

В работе предложен вариант описания дискретного разрушения по границе адгезионного слоя на основе гипотезы простой разгрузки. Для определения внутренних узловых сил, действующих на разрушаемый объем, использована процедура повторного нагружения с заданным полем узловых перемещений, найденным из решения задачи докритического деформирования. Результаты расчета по предложенной модели в рамках упругого поведения материала могут иметь существенное отличие от расчета по когезионному механизму разрушения слоя.

2. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model / M.J. Lee, T.M. Cho, W.S. Kim, B.C. Lee, J.J. Lee // Int. J. Adhes. Adhes. – 2010. – Vol. 30. – No 5. – P. 322–328. DOI: org/10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005

3. Morais A.B. de Simplified cohesive zone analysis of mixed-mode I-II delamination in composite beams // *Polymer Composites*. – 2013. – Vol. 34. – No 11. – P. 1901–1911. DOI: 10.1002/pc.22597
4. Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals // *Int. J. Adhes. Adhes.* – 1994. – Vol. 14. – No 4. – P. 261–267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6
5. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints // *Int. J. Adhes. Adhes.* – 2011. – Vol. 31. – No 4. – P. 248–264. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
6. Enhanced XFEM for crack deflection in multi-material joints / N. Stein, S. Dölling, K. Chalkiadaki, W. Becker, P. Weißgraberet // *Int. J. Fract.* – 2017. – Vol. 207. – No 2. – P. 193–210. DOI: org/10.1007/s10704-017-0228-9
7. Effect of adhesive type and thickness on the lap shear strength / L.F.M. Silva da, T.N.S.S. Rodrigues, M.A.V. Figueiredo, M.F.S.F. Moura de, J.A.G. Chousal // *J. Adhes.* – 2006. – Vol. 82. – No 11. – P. 1091–1115. DOI: 10.1080/00218460600948511
8. Modelling adhesive joints with cohesive zone models: effect of the cohesive law shape of the adhesive layer / R.D.S.G. Campilho, M.D. Banea, J.A.B.P. Neto, L.F.M. da Silva // *Int. J. Adhes. Adhes.* – 2013. – Vol. 44. – P. 48–56. DOI: org/10.1016/j.ijadhadh.2013.02.006
9. Bianchi F., Zhang X. A cohesive zone model for predicting delamination suppression in z-pinned laminates // *Composites Science and Technique*. – 2011. – Vol. 71. – No. 16. – P. 1898–1907. DOI: org/10.1016/j.compscitech.2011.09.004
10. Camanho P., Dávila C.G. Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials. – NASA/TM, 2002. – 211737.
11. Remmers J.J.C., Borst R. de Delamination buckling of fibre-metal laminates // *Composites Science and Technology* – 2001. – Vol. 61. – No 15. – P. 2207–2213. DOI: org/10.1016/S0266-3538(01)00114-2
12. A non-local fracture model for composite laminates and numerical simulations by using the FFT method / J. Li, S. Meng, X. Tian, F. Song, C. Jiang // *Composites: Part B: Engineering*. – 2012. – Vol. 43. – No. 3. – P. 961–971. DOI: org/10.1016/j.compositesb.2011.08.055
13. A continuum damage model for composite laminates: Part I – Constitutive model / P. Maimí, P.P. Camanho, J.A. Mayugo, C.G. Dávila // *Mechanics of Materials*. – 2007. – Vol. 39. – No. 10. – P. 897–908. DOI: org/10.1016/j.mechmat.2007.03.005
14. A continuum damage model for composite laminates: Part II – Computational implementation and validation / P. Maimí, P.P. Camanho, J.A. Mayugo, C.G. Dávila // *Mechanics of Materials*. – 2007. – Vol. 39. – No 10. – P. 909–919. DOI: org/10.1016/j.mechmat.2007.03.006
15. Park M., Frey K., Simon L. Modeling and analysis of composite bonded joints // *American Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. – 2017. – Vol. 2. – No. 1. – P. 1–7. DOI: 10.11648/j.ajmie.20170201.11
16. A cohesive zone model and scaling analysis for mixed-mode interfacial fracture / S. Jain, S.R. Na, K.M. Liechti, R.T. Bonnecaze // *International Journal of Solids and Structures*. – 2017. – Vol. 129. – P. 167–176. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.09.002
17. Sheinman I., Kardomateas G. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates // *International Journal of Solids and Structures*. – 1997. – Vol. 34. – No 4. – P. 451–459. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00018-2
18. Felger J., Stein N., Becker W. Mixed-mode fracture in open-hole composite plates of finite-width: An asymptotic coupled stress and energy approach // *International Journal of Solids and Structures*. – 2017. – Vol. 122–123. – P. 14–24. DOI: org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.039
19. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2016. – № 2. – С. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.03
20. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины // *Изв. РАН. МТТ*. – 2016. – № 5. – С. 22–35.
21. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Изгиб двуслойной балки с нежестким контактом между слоями // *Прикладная математика и механика*. – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 112–121.
22. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
23. ANSYS. User's Guide, Release 11.0. – Pennsylvania, USA: ANSYS Inc, 2006.
24. De Moura MFSF., Gonçalves JPM. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading. // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – Vol. 51. – No. 5. – P. 1123–1131. DOI: org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009
25. Finite element simulation of single carbon nanotube pull-outs from a cementitious nanocomposite material using an elastic-plastic-damage and cohesive surface models / Rashid K. Abu Al-Rub, Sun-Myung Kim, Khaldoon A. Bani-Hani, Nasser Al-Nuaimi, Ahmed Senouci // *Int. J. Theoretical and Applied Multiscale Mechanics*. – 2014. – Vol. 3. – No 1. – P. 31–57. DOI: 10.1504/IJTAMM.2014.069448
26. Zhang J., Xu W., Yao X.F. Load detection of functionally graded material based on coherent gradient sensing method // *Journal of Mechanics*. – 2016. – P. 1–12. DOI: org/10.1017/jmech.2016.114
27. Mackerle J. Finite element analysis and simulation of adhesive bonding, soldering and brazing—an addendum: a bibliography (1996–2002) // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. – 2002. – Vol. 10. – No. 6. – P. 637–671. DOI: org/10.1088/0965-0393/10/6/304
28. Baldan A. Adhesively-bonded joints and repairs in metallic alloys, polymers and composite materials: Adhesives, adhesion theories and surface pretreatment // *Journal of Materials Science*. – 2004. – Vol. 39. – No. 1. – P. 1–49. DOI: org/10.1023/B:JMASC.0000007726.58758.e4
29. Baldan A. Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance // *Journal of Materials Science*. – 2004. – Vol. 39. – No. 15. – P. 4729–4797. DOI: org/10.1023/B:JMASC.0000035317.87118.ab
30. An updated review of adhesively bonded joints in composite materials / S. Budhe, M.D. Banea, S. Barros, L.F.M. Silva // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2017. – Vol. 72 – P. 30–42. DOI: org/10.1016/j.ijadhadh.2016.10.010
31. Астапов Н.С., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной // *Физическая мезомеханика*. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 49–57.
32. Sun C. T., Jih C. J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1987. – Vol. 28. – No 1. – P. 13–20. https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90115-9
33. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах когезионного разрушения композита с адгезионным слоем // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2017. – № 2. – С. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03
34. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упруго-пластического деформирования. – М.: Физматлит, 2013. – 320 с.
35. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *ПИММ*. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 212–222.

## References

- de Morais A.B. Cohesive zone beam modelling of mixed-mode I–II delamination. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2014, vol. 64, pp. 124–131. DOI: 10.1016/j.compositesa.2014.05.004
- Lee M.J., Cho T.M., Kim W.S., Lee B.C., Lee J.J. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2010, vol. 30, no 5, pp. 322–328. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005
- de Morais A.B. Simplified cohesive zone analysis of mixed-mode I–II delamination in composite beams. *Polymer Composites*. 2013, vol. 34, no 11, pp. 1901–1911. DOI: 10.1002/pc.22597
- Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals. *Int. J. Adhes. Adhes.* 1994, vol. 14, no 4, pp. 261–267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6
- He X.A. review of finite element analysis of adhesively bonded joints. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2011, vol. 31, no 4, pp. 248–264. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
- Stein N., Dölling S., Chalkiadaki K., Becker W., Weißgraber P. Enhanced XFEM for crack deflection in multi-material joints. *Int. J. Fract.* 2017, vol. 207, no. 2, pp. 193–210 DOI: 10.1007/s10704-017-0228-9
- da Silva L.F.M., Rodrigues T.N.S.S., Figueiredo M.A.V., de Moura M.F.S.F., Chousal J.A.G. Effect of adhesive type and thickness on the lap shear strength. *J. Adhes.* 2006, vol. 82, no. 11, pp. 1091–1115. DOI: 10.1080/00218460600948511
- Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M. Modelling adhesive joints with cohesive zone models: effect of the cohesive law shape of the adhesive layer. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2013, vol. 44, pp. 48–56. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.02.006
- Bianchi F., Zhang X. A cohesive zone model for predicting delamination suppression in z-pinned laminates. *Composites Science and Technique*. 2011, vol. 71, no. 16, pp. 1898–1907. DOI: 10.1016/j.compscitech.2011.09.004
- Camanho P., Dávila C. G. Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials. NASA/TM-2002-211737.
- Remmers J.J.C., de Borst R. Delamination buckling of fibre–metal laminates. *Composites Science and Technology*. 2001, vol. 61, no. 15, pp. 2207–2213. DOI: 10.1016/S0266-3538(01)00114-2
- Li J., Meng S., Tian X., Song F., Jiang C. A non-local fracture model for composite laminates and numerical simulations by using the FFT method. *Composites: Part B: Engineering*. 2012, vol. 43, no 3, pp. 961–971. DOI: 10.1016/j.compositesb.2011.08.055
- Maimí P., Camanho P.P., Mayugo J.A., Dávila C.G. A continuum damage model for composite laminates: Part I – Constitutive model. *Mechanics of Materials*. 2007, vol. 39, no. 10, pp. 897–908. DOI: 10.1016/j.mechmat.2007.03.005
- Maimí P., Camanho P.P., Mayugo J.A., Dávila C.G. A continuum damage model for composite laminates: Part II – Computational implementation and validation. *Mechanics of Materials*. 2007, vol. 39, no. 10, pp. 909–919. DOI: 10.1016/j.mechmat.2007.03.006
- Park M., Frey K., Simon L. Modeling and analysis of composite bonded joints. *American Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. 2017, vol. 2, no. 1, pp. 1–7. DOI: 10.11648/j.ajmie.20170201.11
- Jain S., Na S.R., Liechti K.M., Bonczak R.T. A cohesive zone model and scaling analysis for mixed-mode interfacial fracture. *International Journal of Solids and Structures*. 2017, vol. 129, pp. 167–176. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.09.002
- Sheinman I., Kardomateas G. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*. 1997, vol. 34, no. 4, pp. 451–459. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00018-2
- Felger J., Stein N., Becker W. Mixed-mode fracture in open-hole composite plates of finite-width: An asymptotic coupled stress and energy approach. *International Journal of Solids and Structures*. 2017, vol. 122–123, pp. 14–24. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.05.039
- Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Separation process modeling of composite with adhesive layer. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016, no. 2, pp. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.03
- Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Generalized Timoshenko–Reissner model for a multilayer plate. *Mechanics of Solids*. 2016, vol. 51, no. 5, pp 527–537. DOI: 10.3103/S0025
- Morozov N.F., Tovstik P.E. Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between the layers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011, vol.75, no. 1, pp. 77–84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2011.04.012
- Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogosloynkh konstruksii* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
- ANSYS. User's Guide, Release 11.0. – Pennsylvania, USA: ANSYS Inc. – 2006.
- De Moura MFSF., Gonçalves JPM. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2014, vol. 51, no. 5, pp. 1123–1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009
- Rashid K. Abu Al-Rub, Sun-Myung Kim, Khaldoon A. Bani-Hani, Nasser Al-Nuaimi, Ahmed Senouci, Finite element simulation of single carbon nanotube pull-outs from a cementitious nanocomposite material using an elastic-plastic-damage and cohesive surface models. *Int. J. Theoretical and Applied Multiscale Mechanics*. 2014, vol. 3, no 1, pp. 31–57. DOI: 10.1504/IJTAMM.2014.069448
- Zhang J., Xu W., Yao X.F. Load detection of functionally graded material based on coherent gradient sensing method. *Journal of Mechanics*. pp. 1–12. DOI: 10.1017/jmech.2016.114.
- Mackerle J. Finite element analysis and simulation of adhesive bonding, soldering and brazing—an addendum: a bibliography (1996–2002). *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2002, vol. 10, no 6, pp. 637–671. DOI: 10.1088/0965-0393/10/6/304
- Baldan A. Adhesively-bonded joints and repairs in metallic alloys, polymers and composite materials: Adhesives, adhesion theories and surface pretreatment. *Journal of Materials Science*. 2004, vol. 39, no 1, pp. 1–49. DOI: 10.1023/B:JMISC.0000007726.58758.e4
- Baldan A. Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance. *Journal of Materials Science*. 2004, vol. 39, no 15, pp. 4729–4797. DOI: 10.1023/B:JMISC.0000035317.87118.ab
- Budhe S., Banea M.D., Barros S., Silva L.F.M. An updated review of adhesively bonded joints in composite materials. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2017, vol.72, pp. 30–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2016.10.010
- Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. Model' rassloeniia raznomodul'nogo bimateriala s treshchinoi [Separation model multimodulus bimaterial with crack]. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 49–57.
- Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. *Engineering Fracture Mechanics*. 1987, vol. 28, no 1, pp. 13–20. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90115-9
- Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modelling the generation of new material surfaces in a composite with an adhesion layer under cohesive destruction. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017, no.2, pp. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03
- Markin A.A., Sokolova M.Y. Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniia [Thermomechanics of Elastoplastic Deformation]. Moscow, FIZMATLIT, 2013, 320 p.
- Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1969, vol. 33, no. 2, pp. 201–210. DOI: 10.1016/0021-8928(69)90025-2