



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.10

УДК 539.3/6:531.662:539.4

ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ ПРОСТОЙ ФОРМЫ УДАРОМ О ЖЕСТКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Г.А. Гурьянов, Б. М. Абдеев, Е.А. Клименко

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,
Усть-Каменогорск, Казахстан

О СТАТЬЕ

Получена: 14 февраля 2018 г.
Принята: 23 марта 2018 г.
Опубликована: 30 марта 2018 г.

Ключевые слова:

помол, удар, разрушение, частица, измельчение, напряжение, силовой импульс, измельчитель, прочность, модель разрушения, материал, энергия деформации.

АННОТАЦИЯ

Сложность явлений, происходящих при измельчении и разрушении твердых тел, затрудняет теоретическое описание этого процесса. В связи с этим представляется актуальным установление взаимосвязей между параметрами, определяющими показатели процесса измельчения, выявление степени их влияния друг на друга, создание и анализ модели процесса измельчения с учетом определяющих его параметров измельчителя и физико-механических свойств материала и на этой основе совершенствование формализованных методов расчета и обоснования рациональных параметров измельчителей, обеспечивающих эффективность их применения при эксплуатации.

На основе анализа состояния реального материала большой группой ученых был создан ряд теорий, объясняющих условия и механизмы разрушения в твердых материалах. Однако практическое применение существующих теорий для расчета процессов измельчения довольно затруднительно.

Поэтому до сих пор существует необходимость разработки новой простой и удобной для практического применения теории. Авторами предлагается новый способ теоретического описания процесса разрушения материалов. На основе упрощенной энергетической гипотезы и прикладной технической теории распространения волн в упругой сплошной среде было получено новое уточненное решение фундаментальной динамической задачи механики упругодеформируемого твердого тела о продольном соударении бруса постоянного произвольного поперечного сечения, моделирующего частицу материала, с абсолютно жесткой поверхностью, моделирующей рабочий орган измельчителя, учитывающее параметр времени и линейный размер движущегося стержневого элемента (частицы). Разработанная уточненная механико-математическая модель, доведенная до практически применимых расчетных аналитических зависимостей и проиллюстрированная характерными численными примерами, позволяет количественно оценивать прочность частицы твердого вещества в процессе ее разрушения и измельчения, дает возможность осуществить комплексный подход к описанию динамического процесса разрушения частиц материала путем регулирования и подбора оптимальных физико-геометрических характеристик, обеспечивающих требуемое качество измельчения, а также прогнозировать протекающие разрушения частицы в зависимости от параметров этого процесса.

© ПНИПУ

© Гурьянов Георгий Александрович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: gguryanov@mail.ru
Абдеев Борис Масгутович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: m.abdeeva@mail.ru
Клименко Евгений Александрович – старший преподаватель, e-mail: klm221@mail.ru

Georgiy A. Guryanov – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: gguryanov@mail.ru
Boris M. Abdeev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: m.abdeeva@mail.ru
Yevgeniy A. Klimenko – Senior Lecturer, e-mail: klm221@mail.ru



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

APPLIED GRINDING MODEL OF A SOLID PARTICLE WITH A SIMPLE SHAPE ON IMPACT WITH A HARD SURFACE

G.A. Guryanov, B.M. Abdeev, Ye.A. Klimenko

D. Serikbaev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

ARTICLE INFO

Received: 14 February 2018
Accepted: 23 March 2018
Published: 30 March 2018

Keywords:

grind, impact, destruction, particle, crushing, tension, power impulse, crusher, strength, grinding model, material, deformation energy.

ABSTRACT

The complexity of phenomena caused by grinding and fracturing of solid particles makes it difficult to provide the theoretical description of this process. In this case, it is important to establish relationships between the parameters that determine the characteristics of the grinding process, determine the degree of their influence on each other, create and analyze the grinding process model taking into account crusher's parameters, physical and mechanical properties of the material. Consequently, the improvement of formal calculation methods and justification of rational parameters of crushers ensure the effectiveness of their use during operation.

By analyzing real materials' state, a large group of scientists have created a number of theories explaining fracture conditions and mechanisms in solid materials. However, it is quite difficult to apply the existing theories for calculation of grinding processes.

Therefore, there is a need to develop a new simple and convenient theory for practical application. Authors offer a new method aimed at theoretical description of a material's fracture. Based on the simplified energy hypothesis and applied technical theory of wave spreading in elastic continuous medium, we have obtained a new refined solution of the fundamental dynamic mechanical problem of an elastically deformable rigid body about a longitudinal collision of a beam having a constant arbitrary cross section (simulating the material's particle) with an absolutely rigid surface (simulating the working body of the crusher), taking into account the time parameter and linear dimension of the moving rod element (particle).

The developed refined mechanical and mathematical model, which has been reduced to applicable calculated analytical dependencies and illustrated by typical numerical examples, allows to quantify the strength of the solid particle under destruction and grinding, makes it possible to implement a comprehensive descriptive approach regarding the dynamic process of material particles' grinding by regulating and selecting the optimal physical and geometric characteristics, which provide the required grinding quality and predict the particles' grinding process depending on the process parameters.

© PNRPU

При измельчении материалов преимущественно распространены механические способы воздействия, отличающиеся относительной простотой осуществления [1, 2]. Процессы тонкого измельчения, осуществляемые механическими способами, имеют большое значение в современном производстве.

Правильный выбор основных параметров измельчителей может основываться только на глубоком знании процесса измельчения, на четком представлении о взаимосвязях между свойствами измельчаемого материала и геометрическими, кинематическими и энергетическими параметрами измельчителей, на максимальном их согласовании еще на стадии проектирования.

В то же время трудности в разработке математической модели процесса измельчения и расчетного метода ее решения обусловлены наличием различных по своей природе процессов, протекающих в измельчителе, и влиянием на эти процессы большого числа взаимосвязанных факторов, осложняющих разработку детерминированных методов расчета:

- неопределенность формы контакта и характера распределения напряжения, а следовательно, условий и момента разрушения куска материала;
- природа упруго-хрупкого разрушения;
- случайный характер параметров внешнего воздействия;

- свойства материалов;
- геометрия камеры измельчителя.

Сложность явлений, происходящих при измельчении и разрушении твердых тел, затрудняет детальное описание этого процесса. В связи с этим установление взаимосвязи параметров, определяющих технологические и эксплуатационные показатели процесса измельчения, выявление степени их взаимного влияния, создание и анализ модели процесса измельчения с учетом определяющих его параметров измельчителя и физико-механических свойств материала и совершенствование на этой основе формализованных методов расчета и обоснования рациональных параметров измельчителей, обеспечивающих эффективность их применения при эксплуатации, представляется актуальным.

Частицы материала разрушаются в результате превышения внешними усилиями пределов прочности (предел временного сопротивления) материала на сжатие, растяжение, изгиб и сдвиг. Широко используется способ измельчения, основанный на образовании в частицах остаточной деформации путем удара или динамического воздействия.

На основе анализа состояния реального материала был создан ряд теорий, объясняющих условия разрушения в твердых материалах.

Теоретической основой формирования механизма разрушения явился известный в механике принцип минимальной энергии, рассмотренный А.А. Гриффитсом, по которому равновесное состояние деформированного тела соответствует минимуму потенциальной энергии системы. Фундаментальная закономерность Гриффитса получила поддержку и была в дальнейшем развита в последующих исследованиях ряда других ученых. Исследователи Р. Риттингер, В.Л. Кирпичев, Ф. Кик, Ф. Бонд, Г. Румпф, В.В. Кафаров, А.Д. Лесин, Е. Орован, Г.Р. Ирвин, Г.И. Баренблатт, П.А. Ребиндер и др. [3, 4, 5, 6], а позднее Г.С. Ходаков, Л.А. Шрейнер, Е.Д. Щукин, А.М. Фрумкин, В.Д. Кузнецов, В.В. Болдырев, Е.Г. Аввакумов, В.П. Жуков, В.Е. Мизонов, В.И. Колобердин и др. [7, 8] выдвинули и обосновали свои гипотезы механизма разрушения твердых частиц, в которых попытались частично разрешить недостатки и противоречия теории Гриффитса. Разработанные к настоящему времени гипотезы, отвечающие проблеме измельчения, раскрывают тот или иной фактор, который оказывает воздействие на явление разрушения твердых тел.

Можно выделить базовые теории (гипотезы), которые отражают макроскопический уровень разрушения твердых сред. В основе их лежат гипотезы П. Риттингера, В.А. Кирпичева – Ф. Кика, согласно которым энергия (работа), затраченная на разрушение (измельчение) прямо пропорциональна макроскопическим параметрам (удельная поверхность материала, объем, масса) [4]. Ф. Бонд предложил определять работу, затрачиваемую на измельчение, как величину, пропорциональную среднегеометрической из объема и поверхностей разрушаемой частицы [4].

Гипотезы Риттингера, Кирпичева–Кика, Бонда, Ребиндера, которые известны в литературе как теоретические законы измельчения и на которых основывается ряд других, удовлетворительно отражают качественную сторону процесса измельчения, но для количественных расчетов, когда требуется определить абсолютное значение работы, практически не используются. Происходит это преимущественно потому, что предложенные гипотезы содержат в себе ряд важных коэффициентов пропорциональности ($\kappa_s, \kappa_v, \varepsilon, K, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_0$ и т.д.), определение которых вызывает существенные трудности для каждого измельчаемого материала. Кроме того, они скрыто содержат в себе уже затраченную на измельчение работу.

Интерес в области определения энергии, затраченной на измельчение, представляет теория профессора В.И. Баловнева [9, 10]. Он утверждает, что сопротивление измельчению зависит не только от природы сил, действующих на материал, но и от вероятности их появления в разрушаемом материале. Все силы здесь подразделены на четыре группы: 1) P_1 – объемные силы; 2) P_2 – поверхностные силы; 3) P_3 – линейные силы; 4) P_4 – точечные силы. Однако эта закономерность также не дает точной оценки энергии, затраченной на измельчение, поскольку, как и ранее, возникают сложности в определении сил и коэффициентов.

В. Кармазин и Р. Татур предложили более общее решение задачи о расходе энергии. Согласно их гипотезе процесс разрушения есть непрерывное сжатие частицы от исходного размера D до конечного размера d при одновременном уменьшении площади поперечного сечения образца от S_0 до S . При измельчении, для достижения требуемого размера d частиц материала, необходимо неоднократное воздействие на материал с размером D . Количество воздействий n определяется на основании рассмотренного в ряде работ допущения, которое применялось на протяжении всех исследований в области измельчения [11, 12, 13, 14], а именно, при измельчении частиц материала с размером D до размера d , то есть со степенью $i = D/d$, получается i^3 частиц.

К настоящему времени различными исследователями проведен системный анализ и создана основа структуры процесса измельчения.

Предел упругости хрупкого материала находится в практически равном соотношении с пределом его прочности, и энергия воздействия, разрушающая частицу, накапливается в виде энергии упругих напряжений [15]. В процессе измельчения материалов каждая частица среды подвержена нагружению внешним силовым воздействием. Каждая частица имеет выступающие части, которые при приложении усилий сжатия первыми воспринимают предельные нагрузки. С нарастанием усилий выступающие части дробятся на мелкие частицы, образуя конус разрушения и новую поверхность на теле частицы, с помощью которой обеспечиваются захват и устойчивое положение частицы относительно рабочего органа. При последующем росте усилий сжатия деформации и напряжения возникают в объеме основного тела частицы, где развиваются упругие деформации, происходит накопление поля напряжений, уплотнение вакансий, образование контактных зон и трещин. При этом наибольшие напряжения появляются в местах соприкосновения разрушаемой частицы с рабочим органом [16, 17, 18, 19]. Это приводит к зарождению, росту, развитию, слиянию и размножению микротрещин, что приводит к разрушению частицы.

Кроме вновь образованной поверхности, которую принимают основной гипотезой в механизме тонкого измельчения твердых частиц, необходимо также принимать во внимание размер измельчаемой частицы. Разрушающее усилие с уменьшением размера частицы возрастает в силу снижения вероятности появления неоднородностей и количества трещинообразований на поверхности частицы [15, 18, 20, 21].

На расход энергии при разрушении значительное влияние оказывает крупность исходного материала и характер протекания деформаций. Минимум затрат обеспечивается, когда упругая деформация, предельная для зерна заданного минимального размера, распространяется со скоростью, превышающей скорость образования отдельных трещин в объеме разрушаемой частицы, то есть при высоких скоростях нагружения [12, 13, 22, 23, 24].

Между механизмом разрушения частиц и затрачиваемой энергией существует взаимосвязь. Основной задачей при измельчении материалов является установление рациональной взаимосвязи между затрачиваемой энергией и характеристиками крупности материала для выбранного способа и протекающего в измельчительном оборудовании механизма разрушения. Однако установление связи между энергетическими затратами на измельчение и характеристиками крупности материала возможно только в случае наличия возможности количественного определения параметров, характеризующих процесс измельчения.

Изученные за долгие годы вопросы теории измельчения материалов и рассмотренные выше гипотезы так или иначе находят свое отражение и лежат в основе проектируемого и внедряемого измельчительного оборудования, благодаря чему эти машины претерпевают изменения, повышающие их эффективность. Все вышеперечисленные, а также другие гипотезы измельчения в той или иной мере затрагивают определенный круг условий, необходимых для механического измельчения материала. В то же время практическое применение этих закономерностей для расчета и прогнозирования процессов измельчения затруднено и фактически ни одна из теорий, объясняющих механику измельчения, в силу своей сложности не позволяет практически рассчитывать и прогнозировать процесс измельчения во взаимосвязи с параметрами измельчителя.

Для оценки работы измельчительных машин по таким параметрам, как крупность частиц, которые могут быть разрушены в измельчителе, предел измельчения и другим, необходимо иметь адекватное математическое описание процесса разрушения частиц. Существующие в настоящее время методики расчета процесса тонкого измельчения, как правило, отличаются сложностью практического использования [9, 10, 26], кроме того, учет всех факторов, влияющих на протекание процесса разрушения частиц маловероятен, поэтому получение точной теории измельчения является сложной задачей [20, 25, 27, 28, 29, 30, 31] и для проведения практических расчетов и прогнозирования результата процесса измельчения, хотя бы и с определенными допущениями, необходимо иметь несложные в плане практического применения расчетно-теоретические зависимости.

Опираясь на классические гипотезы измельчения и приведенные выше положения можно высказать ряд исходных предпосылок к расчетно-теоретическому описанию процесса измельчения, преимущественно в его прикладном аспекте.

1) В процессе измельчения материалов каждая частица среды подвержена силовому воздействию, что создает в ее объеме напряженно-деформированное состояние. Разрушить частицу, не создав в ней деформации сдвига, растяжения, одноосного или двухосного сжатия, практически невозможно.

2) Принимая, что одноосное сжатие наиболее эффективно для разрушения вследствие больших возможностей для деформаций (при двухосном и, тем более,

трехосном сжатии, материал стремится не к разрушению, а к спрессовыванию), примем его как основное и желаемое состояние для процесса разрушения. Одноосное сжатие с высокой энергией нагружения легче всего обеспечить путем приложения к измельчаемым частицам ударной нагрузки.

3) Скорость распространения, а также величина напряжений в разрушаемом материале зависят от свойств материала. Как известно, распространение механических возмущений в материале (в том числе напряжений) определяется скоростью распространения упругих волн (скоростью распространения звука), поэтому распространение напряжений пропорционально корню квадратному из отношения модуля упругости E к плотности ρ материала (см. формулу (6)).

При этом величина предельных напряжений, при которых материал начинает разрушаться, по нашему мнению, может быть принята как обобщенная (осредненная) характеристика состояния его макро- и микроструктуры, например, как параметр, учитывающий наличие в материале трещин и других дефектов, влияющих на процесс разрушения, а также характеризующий другие физико-механические свойства материала, так как иным образом учесть все многообразие факторов и свойств материала, определяющих протекание процесса разрушения при практических расчетах, весьма затруднительно. При таком допущении расчет процесса измельчения можно рассмотреть с точки зрения линейной теории упругости, что, предположительно, позволит получить несложную и пригодную для практического использования расчетно-теоретическую модель измельчения.

4) Потенциальная энергия, приводящая к образованию трещин и разрушению частицы, накапливается в виде упругих напряжений в некотором объеме частицы при его деформации, причем наиболее благоприятные условия для образования трещин, как и наибольшие напряжения, создаются в слоях разрушаемой частицы, находящихся в контакте с рабочим органом.

5) Из такого подхода следует, что разрушится только такой объем материала, для которого хватит энергии разрушения E_p . Как правило, энергии E_p не хватает для разрушения всей частицы, то есть фактически разрушается только некоторая ее часть (рис. 1). Поэтому разрушение частицы материала сводится к некоторому процессу, который можно условно назвать «обкалыванием», при многократном взаимодействии с рабочим органом.

6) Таким образом, дальнейшая работа по расчетно-теоретическому описанию процесса измельчения и созданию прикладной теории измельчения заключается в получении достоверных зависимостей для определения объема материала, разрушающегося («обкалываемого») при одном взаимодействии с рабочим органом, что в дальнейшем позволит осуществлять практические расчеты для определения работы и мощности измельчения при проектировании измельчительных машин, которые в настоящее время чаще всего назначают на основе практических данных.

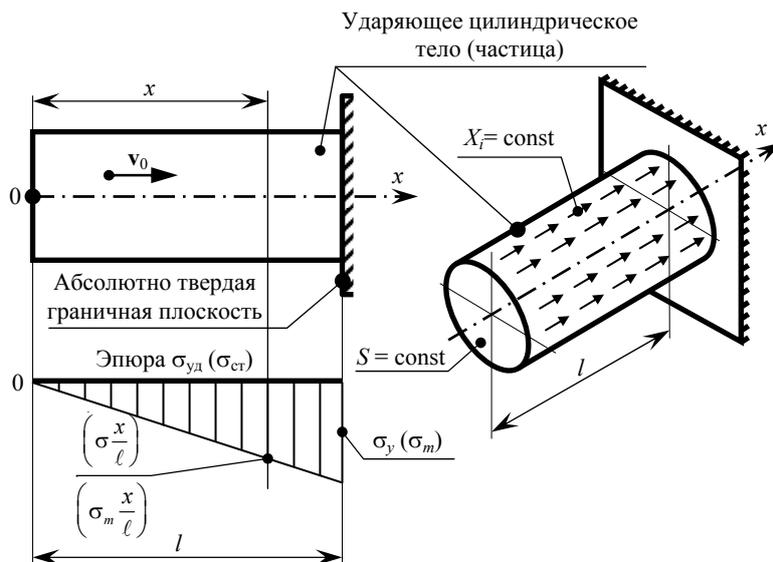


Рис. 1. Приближенное моделирование продольного удара бруса о неподвижную жесткую преграду [31, 34]
 Fig. 1. An approximate modeling of the longitudinal impact of the beam against the fixed rigid barrier [31, 34]

Например, приняв суммарный объем материала ΔV , разрушаемого в измельчителе, как сумму объемов V_i , поэтапно разрушаемых последовательными многократными воздействиями рабочего органа измельчителя, от суммарного объема разрушаемого материала ΔV можно затем перейти к определению работы и мощности, потребных для измельчения материала от начальной до требуемой крупности.

7) Сегодняшнее изучение процесса измельчения твердых тел все больше и больше связано с разнообразием скорости движения измельчающих тел, так как для получения требуемой дисперсности для каждого материала характерен определенный режим скоростей рабочих органов. Поэтому в разрабатываемой прикладной теории измельчения и зависимостях, описывающих механику измельчения, должны присутствовать скоростные характеристики.

Разработанная на основе вышеприведенных положений, а также на основе известных положений сопротивления материалов методика определения разрушаемого объема частицы материала в зависимости от параметров процесса (параметров измельчителя), а именно, скорости рабочего органа, позволит прогнозировать результат и производить расчет процесса измельчения, осуществлять подбор измельчительного оборудования.

Поэтому ниже, на основе доработанных известных подходов и моделей, предложен вариант упрощенной прикладной механико-математической модели, описывающей на основе приближенной расчетной схемы продольного сжимающего ударно-силового импульса разрушение частицы в виде бруса длиной l произвольного постоянного поперечного сечения площадью $S = const$ свободным прямым ударом при взаимодействии измельчаемого материала с абсолютно твердой неподвижной плоской поверхностью (см. рис. 1).

Известное решение в первом приближении данной задачи [31, 32, 33] базируется на упрощенной физико-математической модели Т. Юнга [34], в основу которой положены теорема об изменении кинетической энергии тела, имеющего скорость v_0 [31, 35], и следующие допущения (см. рис. 1):

- а) материал твердого вещества с плотностью ρ_m – однородный, сплошной, изотропный, линейно-упругий, подчиняется закону Гука;
- б) соблюдается гипотеза плоских сечений, а ударяющая поверхность $x = l$ бруса предполагается совершенно гладкой [31];
- в) удар является неупругим при коэффициенте восстановления $\kappa_b = 0$ [35];
- г) распределение статического $\sigma_{ст}(x)$ и динамического $\sigma_{уд}(x)$ нормальных напряжений вдоль оси бруса соответствует распределению собственного веса бруса постоянного поперечного профиля $S = const$ [31, 32, 36, 37]:

$$\sigma_{ст} = \sigma_{т} \frac{x}{l}; \quad \sigma_{уд} = \sigma_{л} \frac{x}{l}; \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

где $\sigma_{т}, \sigma_{л}$ – экстремальные значения $\sigma_{ст}$ и $\sigma_{уд}$;

д) деформации распространяются по стержню мгновенно;

е) физико-механические константы материала остаются неизменными в условиях динамического нагружения, что допустимо для скоростей удара $v_0 \leq 100$ м/с [37];

ж) в момент силового импульса все точки бруса испытывают одно и то же ускорение, откуда следует, что динамическое напряжение $\sigma_{уд}$ будет таким же, как будто ко всем бесконечно малым элементам движущегося тела были приложены равномерно распределенные по его объему силы инерции $X_i = const$ (см. рис. 1) [33];

з) кинетическая энергия K в момент удара с начальной скоростью v_0 целиком переходит в потенциальную

энергию U деформации стержня (см. рис. 1 и формулы (1)) [27, 31, 34]:

$$K = \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{\rho_m \cdot S \cdot \ell \cdot v_0^2}{2} = U = \int_0^\ell \frac{\sigma_{уд}^2}{2 \cdot E} S \cdot dx = \frac{S \cdot \sigma^2}{2 \cdot E \cdot \ell^2} \int_0^\ell x^2 \cdot dx = \frac{S \cdot \sigma^2 \cdot \ell}{6 \cdot E}, \quad (2)$$

$$\Rightarrow \sigma = v_0 \cdot \sqrt{3 \rho_m \cdot E}, \quad (3)$$

где m – масса движущегося тела (бруса); E – модуль упругости при сжатии.

Идеализированное решение (1)–(3) дает значительно завышенные результаты, поскольку в действительности часть кинетической энергии при ударе теряется. Соотношение (3) является чрезвычайно приближенным [27, 31] вследствие того, что наибольшее напряжение σ эпюры $\sigma_{уд}$ не зависит от размеров бруса и от продолжительности соударения, а связано только с физическими свойствами

материала. Например, для частицы из мрамора с пределом прочности на сжатие $\sigma_{вс} = 100 \dots 180$ МПа, модулем упругости $E = 0,56 \cdot 10^5$ МПа, плотностью $\rho_m = 2500$ кг/м³ [38] при начальной скорости соударения $v_0 = 50$ м/с расчет по формуле (3) дает значение $\sigma = 1024,7$ МПа, что намного больше $\sigma_{вс}^{(max)} = 180$ МПа.

Уточним упрощенную энергетическую модель [27, 34] (см. рис. 1) приближенной одномерной теорией продольного распространения волн в стержнях постоянного поперечного профиля $S = \text{const}$ [29, 31] при условии, что каждый элемент бруса испытывает простое (одноосное) сжатие-растяжение, отвечающее осевой упругой деформации (рис. 2).

$$\varepsilon = \varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (4)$$

где $u = u(x, t)$ – перемещение в направлении оси x , зависящее от переменной x и времени t : $0 \leq x \leq \ell$; $t \geq 0$.

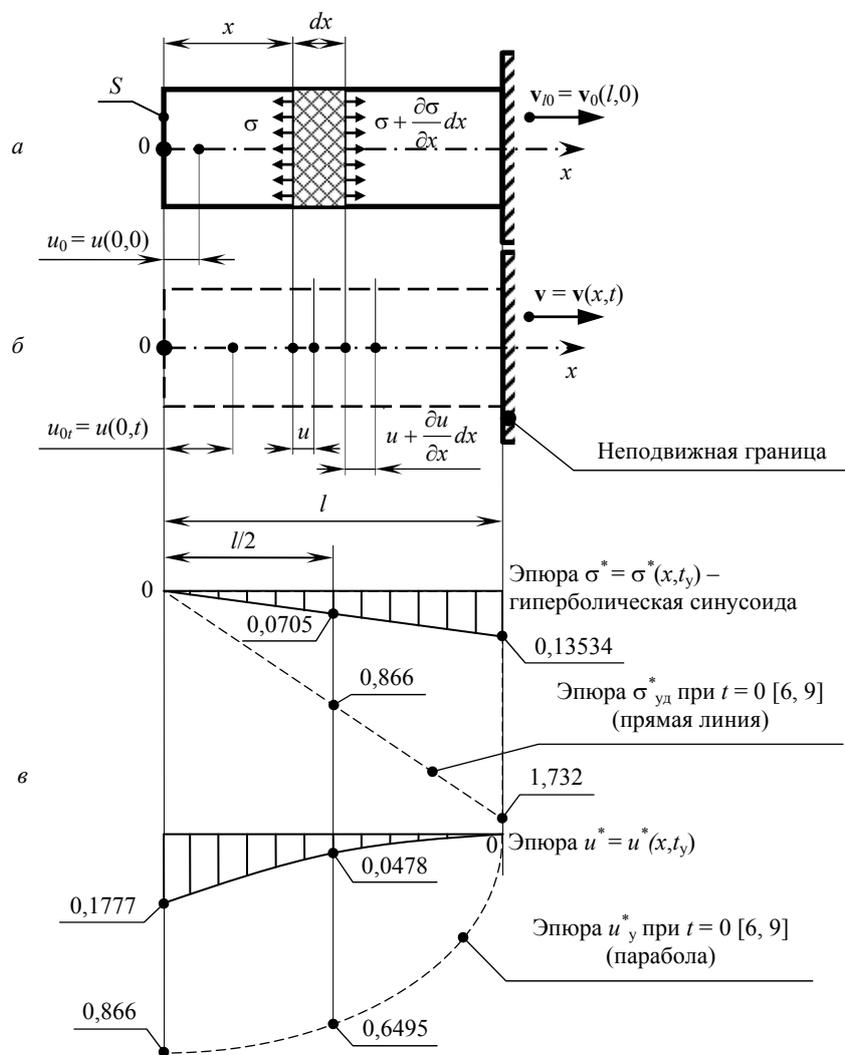


Рис. 2. Уточненные расчетные схемы колебательно-волнового процесса соударения измельчаемой частицы с абсолютно жесткой плоской поверхностью: а – начальный момент времени $t = 0$; б – перемещение u произвольного поперечного сечения при $t > 0$; в – характер эпюр σ и u , когда $t = t_y$ (пунктирные линии – элементарная модель [31, 34])

Fig. 2. Refined calculation schemes of the vibro-wave process of the grinding particle's impact against an absolutely rigid plane surface: а – initial time $t = 0$; б – u displacement of an arbitrary cross-section at $t > 0$; в – σ and u diagrams when $t = t_y$ (the dashed lines show the elementary model [31, 34])

Дифференциальное соотношение (4) представляет собой известную формулу Коши, связывающую параметры $\varepsilon(x,t)$ и $u(x,t)$ [29].

Рассматривая равновесие бесконечно малого участка dx бруса между сечениями x и $x+dx$ (рис. 2, а), получаем уравнение продольных колебаний в виде [29, 31, 39]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5)$$

где C – скорость распространения звуковой волны по направлению координаты x (т.е. в направлении действия удара):

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho_m}}. \quad (6)$$

Преобразовав равенство (5) путем его однократного дифференцирования по переменной x и учитывая, что по закону Гука $\sigma = \sigma(x,t) = E \cdot \varepsilon$, получим дифференциальное уравнение в частных производных [31] относительно функции нормального напряжения $\sigma = \sigma(x,t)$, характеризующего удельные внутренние усилия, т.е. напряженное состояние измельчаемой частицы:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Если считать неподвижную плоскость $x = l$ абсолютно твердой (см. рис. 2), то скорость частиц вещества на правом конце стержня $x = l$ в момент соударения ($t = 0$) будет равна v_0 , а начальное напряжение сжатия $\sigma_{l0} = \sigma(l,0)$, согласно формуле (279) из [29],

$$\sigma_{l0} = v_0 \sqrt{E \cdot \rho_m}. \quad (8)$$

Функцию сжимающего усилия $\sigma_{lt} \cdot S = S \cdot \sigma(l,t)$ в зависимости от времени t можно найти из уравнения движения бруса [29, 35]

$$m \cdot \frac{dv_{lt}}{dt} + S \cdot \sigma_{lt} = 0, \quad (9)$$

где m – масса тела; $v_{lt} = v(l,t)$ – скорость частиц на торце тела (бруса) [29],

$$v_{lt} = \sigma_{lt} \sqrt{\frac{1}{E \cdot \rho_m}}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_{lt}}{dt} + \frac{C}{\ell} \sigma_{lt} = 0,$$

откуда [29], руководствуясь [40] и (8),

$$\sigma_{lt} = \sigma_{l0} \cdot e^{-t \cdot \frac{C}{\ell}} = v_0 \cdot e^{-t \cdot \frac{C}{\ell}} \sqrt{E \cdot \rho_m}, \quad (11)$$

где аргумент t меняется в пределах $0 \leq t \leq t_y$, а теоретическая продолжительность соударения

$$t_y \leq \frac{2 \cdot \ell}{C}. \quad (12)$$

При максимальном времени контакта $t = t_{\max} = t_y = (2l)/C$ на основании (11),

$$\sigma_{lt_y} = \frac{v_0}{e^2} \cdot \sqrt{E \cdot \rho_m}, \quad (13)$$

а в предельном случае $t = 0$, аналогичном упрощенной модели (1)–(3),

$$\sigma_{l0} = \sigma_{l0}^{(\max)} = v_0 \sqrt{E \cdot \rho_m} > \sigma_{lt_y}, \quad (14)$$

что совпадает с идеализированным результатом (8), когда удар мгновенный. При этом приближенное решение (3) для силового параметра σ [31, 34] в 1,732 раза превышает соответствующее уточненное значение (14).

Проведя расчеты по формулам (13)–(14) при прежних исходных характеристиках материала (мрамора), будем иметь

$$\sigma_{lt_y} = 80,1 \text{ МПа} < \sigma_{\text{вс}}^{(\min)} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{l0} = 592 \text{ МПа} > \sigma_{\text{вс}}^{(\max)} = 180 \text{ МПа}.$$

Определяем скорость C звуковой волны и время удара t_y , используя соотношения (6), (12) и полагая длину частицы $l = 0,1$ мм:

$$C = 4688 \text{ м/с} \text{ и } t_y = 4,27 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

Из двух полученных значений σ_{lt_y} и σ_{l0} более точным и объективным следует считать предельный случай σ_{lt_y} , так как время соударения $t \leq t_y$ не может равняться нулю. Результаты расчета σ_{lt_y} также подтверждают некорректность приближенного решения (3).

Продолжая совершенствование приближенных моделей (см. рис. 1 и 2), решим полуобратным методом Сен-Венана [29, 30] основное модифицированное волновое уравнение (7) [31], используя полученную уточненную формулу (11) для краевого нормального напряжения $\sigma_{lt} = \sigma(l,t)$, возникающего на торцевой поверхности $x = l$ измельчаемой частицы в произвольный момент времени t , удовлетворяющий условиям $0 \leq t \leq t_y$ и (12) (см. рис. 2). Аппроксимируем по методу Фурье [30] искоемое внутреннее усилие $\sigma(x,t)$ произведением двух функциональных выражений:

$$\sigma = \sigma(x,t) = f \cdot sh\beta x, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (15)$$

где $\beta = \text{const}$ – пока неизвестная константа; $f = f(t)$ функция, зависящая только от переменной t ($0 \leq t \leq t_y$).

В результате подстановки (15) в (7) имеем после деления на $sh\beta x$ обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - C^2 \cdot \beta^2 \cdot f = 0,$$

общий интеграл которого записываем в виде суммы [40],

$$f = (C_1 \cdot e^{-C\beta t} + C_2 \cdot e^{C\beta t})sh\beta x,$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$ – произвольные постоянные; $e = 2,71828\dots$ – основание натурального логарифма.

Для реализации граничного соотношения (11) функции (15) следует принять $C_2 = 0, \beta = 1/l$, и тогда аналитическое выражение (15) преобразуется к окончательному виду

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(x, t) = C_1 \cdot e^{-t \frac{c}{\ell}} \cdot sh \frac{x}{\ell} = \\ &= v_0 \frac{sh \frac{x}{\ell}}{sh 1} e^{-t \frac{c}{\ell}} \sqrt{E \cdot \rho_m} = v_0 \frac{sh \frac{x}{\ell}}{sh 1} e^{-t \frac{c}{\ell}} \cdot C \cdot \rho_m, \end{aligned} \quad (16)$$

где $sh 1 = 1,1752\dots$ – гиперболический синус от 1, а постоянная интегрирования

$$C_1 = \frac{v_0}{sh 1} \sqrt{E \cdot \rho_m}.$$

Имея $\sigma(x, t)$, находим перемещение $u = u(x, t)$ из равенства (4) и закона Гука $\sigma = -E \cdot \varepsilon$ для волны сжатия ($\sigma < 0$), когда абсолютная деформация $u > 0$ и направлена в сторону сечения $x = l$ (см. рис. 2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sigma}{E} = -\frac{v_0}{E} \frac{sh \frac{x}{\ell}}{sh 1} e^{-t \frac{c}{\ell}} \sqrt{E \cdot \rho_m},$$

откуда после интегрирования

$$\begin{aligned} u &= -\frac{v_0}{E} e^{-t \frac{c}{\ell}} \frac{1}{sh 1} \sqrt{E \cdot \rho_m} \left(\ell \cdot ch \frac{x}{\ell} + C_3 \right) = \\ &= \frac{v_0 \cdot \ell}{E} e^{-t \frac{c}{\ell}} \sqrt{E \cdot \rho_m} \left(1 - \frac{ch \frac{x}{\ell}}{ch 1} \right) cth 1 = \\ &= 1,31305 \frac{v_0 \cdot \ell}{E} e^{-t \frac{c}{\ell}} \sqrt{E \cdot \rho_m} \left(1 - 0,648 \cdot ch \frac{x}{\ell} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где C_3 – константа, которую вычисляем из очевидного кинематического граничного условия $u(l, t) = 0$ при $x = l$ (см. рис. 2), откуда следует

$$C_3 = -\ell \cdot ch 1 = -1,5431\ell,$$

$ch 1 = 1,5431\dots, cth 1 = 1,31305$ – значения гиперболических функций.

На рис. 2, в даны безразмерные эпюры σ^* и u^* ,

$$\sigma^* = \sigma^*(x) = \sigma \left(v_0 \sqrt{E \cdot \rho_m} \right)^{-1} = \frac{0,13534}{sh 1} sh \frac{x}{\ell},$$

$$u^* = u^*(x) = u \left(\frac{v_0 \cdot \ell}{E} \sqrt{E \cdot \rho_m} \right)^{-1} = 0,1777 \cdot \left(1 - 0,648 ch \frac{x}{\ell} \right),$$

построенные согласно выведенным формулам (16), (17), соответствующим $t = t_y$ (см. рис. 2) с учетом периода соударения $t \leq t_y = (2l)/C$ в сопоставлении с приближенными функциями [27, 31, 34], адекватными моменту времени $t = 0$:

$$\sigma_{уд}^* = \sigma_{уд}^*(x) = 1,732 \left(v_0 \sqrt{E \cdot \rho_m} \right)^{-1} \sigma = 1,732 \frac{x}{\ell},$$

$$u_y^* = u_y^*(x) = u \left(\frac{v_0 \cdot \ell}{E} \sqrt{E \cdot \rho_m} \right)^{-1} = 0,866 \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2} \right).$$

Полученное уточненное соотношение (16), математически описывающее нормальное напряжение $\sigma(x, t)$, в отличие от приближенного и завышенного результата (3), зависит от времени t соударения и линейного размера l бруса (частицы) (см. рис. 2).

Для численной оценки и контроля прочности твердого вещества в процессе его измельчения (разрушения) необходимо использовать краевое условие (11) общего выражения (16), из которого видно, что с увеличением длины l частицы повышается наибольшее сжимающее напряжение $\sigma^*(l) = \max$ по площади S контакта.

На основе зависимостей (6), (12) и полученной формулы (16) рассмотрим пример практической оценки несущей способности модели частицы из мрамора в форме бруса при ее измельчении импульсным прямым ударом о недеформируемую плоскость. Исходными параметрами являются: $\sigma_{вс} = \sigma_{вс}^{(max)} = 180$ МПа; $E = 0,56 \cdot 10^5$ МПа; $\rho_m = 2500$ кг/м³; $v_0 = 50$ м/с; начальный размер частицы $l_0 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м и расчетное (фактическое) время соударения t_p (с), принимаемое меньше предельной продолжительности контакта t_y (по (12)), так как теоретическая величина t_y тождественна прохождению упругой волны сжатия-растяжения, вызванной ударом, в двух направлениях по всей длине l_0 стержневого элемента (см. рис. 2).

Во-первых, определим величину разрушенной в результате ударного воздействия части частицы мрамора, которая при постоянной площади сечения $S = \text{const}$ (см. рис. 2) будет характеризоваться в основном длиной разрушенной части. Представляем алгоритм решения этой задачи.

1) Вычисление скорости звука согласно (6): $C = 4688$ м/с.

2) Определение граничного времени соударения в соответствии с (12): $t_y = 4,27 \cdot 10^{-8}$ с.

3) Назначение фактического периода t_p удара: $t_p = 10^{-8}$ с $< t_y$.

4) Графоаналитическое исследование функции напряжения $\sigma = \sigma(l, t_p)$ в зависимости от переменной $l \leq l_0 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м = 0,1 мм с использованием формулы (16), где $x = l, t = t_p = 10^{-8}$ с:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(l, t_p) = v_0 \cdot e^{-t_p \frac{c}{\ell}} \sqrt{E \cdot \rho_m} = \\ &= 50 e^{-\frac{4688 \cdot 10^{-8}}{\ell}} \sqrt{2500 \cdot 0,56 \cdot 10^{11}} = 592 e^{-\frac{4688 \cdot 10^{-8}}{\ell}}, \end{aligned} \quad (18)$$

График функциональной зависимости (18), изображен на рис. 3.

5) Определение минимальной длины l_m частицы, до которой она не будет разрушаться (предел измельчения), с использованием условия прочности

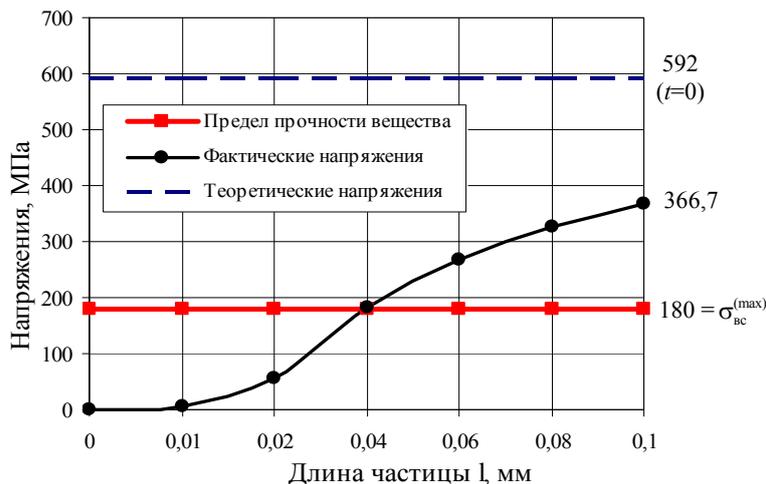


Рис. 3. Графическая иллюстрация функциональной формулы (18) для мрамора при $t_p = 10^{-8}$ с
 Fig. 3. Graphical illustration of the functional formula (18) for marble at $t_p = 10^{-8}$ s

$$\sigma = \sigma(\ell_m, t_p) = 592e^{-\frac{4688 \cdot 10^{-8}}{\ell_m}} = \sigma_{вс}^{(max)} = 180 \text{ МПа (Н/мм}^2\text{)},$$

откуда следует

$$\ell \leq \ell_m = \frac{4688 \cdot 10^{-8}}{\ln\left(\frac{592}{180}\right)} \approx 0,039 \text{ мм.}$$

Тогда теоретическая длина l_p разрушенного участка частицы

$$\ell_p = \ell_0 - \ell_m = 0,1 - 0,039 = 0,061 \text{ мм.}$$

Соответствующая точка $\sigma(\ell_m)=180$ МПа показана на кривой $\sigma(l)$ (см. рис. 3). На этом же рисунке пунктирная горизонтальная прямая соответствует завышенному напряжению $\sigma_{уд} = \sigma(l,0) = 592$ МПа, адекватному времени $t = 0$ при мгновенном ударе, согласно упрощенной модели, описанной в [29], когда $\sigma_{уд}$ не зависит от параметров l и t .

Таким образом, при исходном размере частицы твердого вещества $l_0 = 0,1$ мм область ее разрушения (см. рис. 3) (на примере мрамора) охватывает диапазон $l_p = 0,061 \text{ мм} \leq \leq l_0 = 0,1 \text{ мм}$, тогда как размер $l < l_m = 0,039$ мм характеризует неизмельчаемое состояние материала в случае известной скорости удара v_0 , т.е. частицы, имеющие размер $l < l_m = 0,039$ мм при данном значении v_0 , измельчаться не будут.

Во-вторых, возможна и обратная задача, в которой необходимо найти минимальную скорость соударения v_{0m} для измельчения частицы мрамора длиной $l_0 = 0,1$ мм при уже известных физико-механических постоянных материала и характеристиках удара C , t_y , t_p . Соответствующее решение получим из условия прочности $\sigma(l_0, t_p) = \sigma_{вс}^{(max)} = 180$ МПа (Н/мм²), то есть

$$\sigma = \sigma(\ell_0, t_p) = v_{0m} e^{-\frac{4688 \cdot 10^{-8}}{\ell_0}} \sqrt{E \cdot \rho_m} =$$

$$= \sigma_{вс}^{(max)} = 180 \text{ МПа (Н/мм}^2\text{)},$$

откуда находят наименьшую граничную скорость соударения v_{0m} , ниже которой материал (мрамор) не будет разрушаться,

$$v_0 \geq v_{0m} = \frac{\sigma_{вс}^{(max)} \cdot e^{\frac{4688 \cdot 10^{-8}}{\ell_0}}}{\sqrt{E \cdot \rho_m}} = \frac{180 \cdot 10^6 \cdot e^{0,1 \cdot 10^{-3}}}{\sqrt{2500 \cdot 0,56 \cdot 10^{11}}} = 24,31 \text{ м/с} < 100 \text{ м/с.}$$

Следует также отметить, что фиксированное время соударения $t_p = 10^{-8} < (1,66...4,27) \cdot 10^{-8}$ с удовлетворяет принятой предпосылке $t_p < t_y$ данной модели.

Аналогично можно рассмотреть примеры математической аппроксимации измельчения частиц и из других материалов.

Выводы

1. Доказана неприменимость с практической точки зрения известной упрощенной энергетической гипотезы (2) [31, 32, 33, 34], которая дает значительно завышенные напряжения (3).
2. Разработана уточненная теоретическая модель разрушения в результате продольного удара упругодеформируемого тела постоянного произвольного поперечного сечения по абсолютно жесткой границе полупространства с учетом параметра времени и линейного размера тела, доведенная до расчетных аналитических зависимостей (11), (16), (17).
3. Возможно осуществление комплексного подхода к описанию динамического процесса разрушения частиц материала путем регулирования и подбора оптимальных физико-геометрических характеристик v_0 , l_0 , t_p , обеспечивающих требуемое качество измельчения.
4. Необходима экспериментальная проверка представленной инженерной теории расчета для определения возможных корректировочных коэффициентов.

Библиографический список

1. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочно-сти твердых тел. – М.: Металлургия, 1971. – 263 с.
2. Баловнев В.И. Определение сопротивлений и энергии при измельчении материала // Строительные и дорожные машины. – 1988. – № 1. – С. 24–25.
3. Партон В.З. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 288 с.
4. Бонд Ф.С. Законы дробления // Труды Европейского совещания по измельчению – М.: Стройиздат, 1966. – С. 195–205.
5. Румпф Г. Об основных физических проблемах при измельчении // Труды Европейского совещания по измельчению. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 7–40.
6. Ребиндер П.А. Поверхностные явления в дисперсных системах // Коллоидная химия: избр. тр. – М.: Наука, 1978. – 368 с.
7. Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. – 307 с.
8. Ходаков Г.С. Тонкое измельчение строительных материалов. – М.: Стройиздат, 1972. – 240 с.
9. Баловнев В.И. Определение сопротивлений и энергии при измельчении материалов // Строительные и дорожные машины. – 1988. – № 1. – С. 24–25.
10. Баловнев В.И. Моделирование процессов взаимодействия со средой рабочих органов дорожно-строительных машин. – М.: Высш. шк., 1981. – 335 с.
11. Партон В.З. Механика разрушения. От теории к практике. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
12. Макклиттон Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов / пер. с англ.; под ред. Е.М. Морозова. – М.: Мир, 2000. – 443 с.
13. Лескин А.Д. Основные закономерности измельчения материалов // Современное измельчительное оборудование: обзор инф. – Вып. 3. – Сер. 7. Промышленность нерудных и неметаллурудных материалов. – М.: ВНИИОСМ, 2008. – С. 2–14.
14. Веригин Ю.А. Основные проблемы и направления приоритетных исследований в области приготовления и активации дисперсных сред. // Международная НТК «Интерстроймех-98»: сб. докл. / Гос. арх.-строит. акад. – Воронеж, 1998. – С. 85–91.
15. Веригин Ю.А. Разработка и создание аппаратов для приготовления стройматериалов на основе анализов процессов активации дисперсных сред: дис. ... д-ра техн. наук: 05.05.04. – М.: Изд-во МИСИ, 1990. – 322 с.
16. Анферов В.А. Определение основных параметров роторно-шаровой мельницы: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04 / МАДИ. – М., 1990. – 187 с.
17. Радостев Ю.Н. Определение основных параметров машин с пружинным рабочим органом для измельчения дорожно-строительных материалов: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04. – М.: Изд-во МАДИ, 1988. – 183 с.
18. Сартаков А.В. Моделирование и интенсификация рабочих процессов вибрационных измельчителей: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04. – Барнаул, 2004. – 177 с.
19. Потемкина С.П. Исследование и расчет оптимальных условий тонкого измельчения в аппаратах ударно-стирающего типа: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04. – Иркутск, 1997. – 109 с.
20. Дугин Ю.А. Моделирование вальцового измельчительного аппарата для определения основных параметров // Изв. Нижневолжского агроуниверситетского комплекса. – 2006. – № 3. – С. 55–58.
21. Сергеев К.Ф. Хрупкое разрушение твердых тел. – Владивосток, 1989. – 241 с.
22. Ружинский С.И. Внешние механические воздействия в технологии бетонов. – СПб., 2005. – 120 с.
23. Еремин Н.Ф. Процессы и аппараты в технологии строительных материалов. – М.: Высш. шк., 1986. – 286 с.
24. Андреев С.Е., Перов В.А., Зверевич В.В. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. – М.: Недра, 1980. – 416 с.
25. Лесин А.Д. Вибрационное измельчение материалов. Элементы теории и методика расчета основных параметров вибромельниц. – М.: Промстройиздат, 1957.
26. Гурьянов Г.А., Клименко Е.А. Об одном подходе к интенсификации процесса помола. // Вестн. Вост.-Казах. гос. техн. ун-та им. Д. Серикбаева. – 2013. – № 1 (59). – С. 27–35.
27. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций: избр. работы / под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
28. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний: учеб. пособие для студ. вузов. – М.: Высш. шк., 1975. – 248 с.
29. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М.И. Рейтмана; под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
30. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: учеб. пособие для мех.-мат. фак-тов ун-тов. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.
31. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1969. – 248 с.
32. Татур Г.К. Общий курс сопротивления материалов. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 464 с.
33. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
34. Yong Th. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts // London, printed for J. Johnson. – 1807. – Vol. 1. – XXIV. – P. 144.
35. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 596 с.
36. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
37. Инженерные методы исследования ударных процессов / Г.С. Батуев, Ю.В. Голубков, А.К. Ефремов, А.А. Федосов. – М.: Машиностроение, 1969. – 251 с.
38. Писаренко Г.С., Яковлев А.Г., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975. – 704 с.
39. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике (для инженеров и студентов вузов). – М.: Наука, 1979. – 944 с.
40. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. С.В. Фомина. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
41. New vibroscreen with additional feed elements / A. Kim, M. Doudkin, A. Vavilov, G. Guryanov // Archives of Civil and Mechanical Engineering / Scientific Magazine. – 2017. – No. 17. – P. 786–794.

References

1. Ekobori T. Fizika i mekhanika razrusheniia i prochnosti tverdykh tel [Physics and Mechanics of Destruction and Strength of Solids], Moscow, Metallurgiya, 1971, 263 p.
2. Balovnev V.I. Opredelenie soprotivlenii i energii pri izmel'chenii materiala [Determination of resistance and energy when grinding material]. *Stroitel'nye i dorozhnye mashiny*, 1988, no. 1, pp. 24-25.
3. Parton V.Z. Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniia [Mechanics of elastoplastic fracture]. Moscow, Nauka, 1974, 288 p.
4. Bond F.S. Zakony drobleniia [Laws of crushing]. Moscow, Stroizdat, *Trudy Evropeiskogo soveshchaniia po izmel'cheniiu*, 1966, pp. 195-205.

5. Rumpf G. Ob osnovnykh fizicheskikh problemakh pri izmel'chenii [On the main physical problems in grinding]. *Moscow, Stroizdat, Trudy Evropeiskogo soveshchaniia po izmel'cheniiu*, 1966, pp. 7-40.
6. Rebinder P.A. Poverkhnostnye iavleniia v dispersnykh sistemakh. Kolloidnaia khimiia: izbrannye trudy [Surface phenomena in disperse systems. Colloid Chemistry: Selected Works]. *Moscow, Nauka*, 1978, 368 p.
7. Khodakov G.S. Fizika izmel'cheniia [Physics of grinding]. *Moscow, Nauka*, 1972, 307 p.
8. Khodakov G.S. Tonkoe izmel'chenie stroitel'nykh materialov [Fine grinding of building materials]. *Moscow, Stroizdat*, 1972, 240 p.
9. Balovnev V.I. Opredelenie soprotivlenii i energii pri izmel'chenii materialov [Determination of resistance and energy when grinding materials]. *Stroitel'nye i dorozhnye mashiny*, 1988, no. 1, pp. 24-25.
10. Balovnev V.I. Modelirovanie protsessov vzaimodeistviia so sredoi rabochikh organov dorozhno-stroitel'nykh mashin [Modeling the processes of interaction with the environment of working bodies of road-building machines]. *Moscow, Vysshaia shkola*, 1981, 335 p.
11. Parton V.Z. Mekhanika razrusheniia. Ot teorii k praktike [Mechanics of destruction. From theory to practice]. *Moscow, Nauka*, 1990, 240 p.
12. Makklinton F., Argon A. Deformatsiia i razrushenie materialov [Deformation and destruction of materials]. *Moscow, Mir*, 2000, 443 p.
13. Leskin A.D. Osnovnye zakonomernosti izmel'cheniia materialov [The main regularities of grinding materials]. *Moscow, VNIOSM, Sovremennoe izmel'chitel'noe oborudovanie: Obz. inf. – Vyp. 3, seriia 7. Promyshlennost' nerudnykh i nemetallorudnykh materialov*, 2008, pp. 2-14.
14. Verigin Iu.A. Osnovnye problemy i napravleniia priortetnykh issledovaniia v oblasti prigotovleniia i aktivatsii dispersnykh sred [The main problems and directions of priority research in the field of preparation and activation of dispersed media]. *Sbornik dokladov Mezhdunarodnoi NTK «Interstroimekh-98». – Voronezh: Gos. arkhitekturno-stroitel'naia akademiia*, 1998, pp. 85-91.
15. Verigin Iu.A. Razrabotka i sozdanie apparatov dlia prigotovleniia stroimaterialov na osnove analizov protsessov aktivatsii dispersnykh sred: dis. ... dok. tekhn. nauk: 05.05.04 [Development and creation of apparatus for the preparation of building materials on the basis of analysis of the processes of activation of disperse media: dis. ... doc. technical sciences: 05.05.04]. *Moscow, Moskovskii inzhenerno-stroitel'nyi institut*, 1990, 322 p.
16. Anferov V.A. Opredelenie osnovnykh parametrov rotornosharovoi mel'nitsy: dis. kand. t. n.: 05.05.04 [Determination of the main parameters of the rotor-ball mill: dis. Cand. thp.: 05.05.04]. *Moscow, Moskovskii avtomobil'no-dorozhnyi gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet*, 1990, 187 p.
17. Radostev Iu.N. Opredelenie osnovnykh parametrov mashin s pruzhinnym rabochim organom dlia izmel'cheniia dorozhno-stroitel'nykh materialov: dis. kand. t. n.: 05.05.04 [Determination of the basic parameters of machines with a spring working organ for crushing road-building materials: dis. Cand. thp.: 05.05.04]. *Moscow, Moskovskii avtomobil'no-dorozhnyi gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet*, 1988 g. – 183 p.
18. Sartakov A.V. Modelirovanie i intensivatsiia rabochikh protsessov vibratsionnykh izmel'chitelei: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.05.04 [Modeling and intensification of working processes of vibratory shredders: dis. ... cand. those. Sciences: 05.05.04]. *Barnaul*, 2004, 177 p.
19. Potemkina S.P. Issledovanie i raschet optimal'nykh uslovii tonkogo izmel'cheniia v apparatakh udarno-istiraiushchego tipa: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.05.04 [Investigation and calculation of optimal conditions for fine grinding in shock-abrasive devices: dis. ... Cand. those. Sciences: 05.05.04]. *Irkutsk*, 1997, 109 p.
20. Dugin Iu.A. Modelirovanie val'tsovogo izmel'chitel'nogo apparata dlia opredeleniia osnovnykh parametrov [Modeling of a roller shredder for determining the main parameters]. *Izvestiia nizhnevolzhskogo agrouniversitetskogo kompleksa*, 2006, no. 3, pp. 55-58
21. Sergeev K.F. Khrupkoe razrushenie tverdykh tel [Brittle fracture of solids]. *Vladivostok*, 1989, 241 p.
22. Ruzhinskii S.I. Vneshnie mekhanicheskie vozdeistviia v tekhnologii betonov [External mechanical effects in concrete technology]. *Saint Petersburg*, 2005, 120 p.
23. Eremin N.F. Protsessy i apparaty v tekhnologii stroitel'nykh materialov [Processes and apparatus in the technology of building materials]. *Moscow, Vysshaia shkola*, 1986, 286 p.
24. Andreev S.E., Perov V.A., Zverevich V.V. Droblenie, izmel'chenie i grokhochenie poleznykh iskopaemykh [Crushing, grinding and screening of minerals]. *Moscow, Nedra*, 1980, 416 p.
25. Lesin A.D. Vibratsionnoe izmel'chenie materialov. Elementy teorii i metodika rascheta osnovnykh parametrov vibromel'nits [Vibration grinding of materials. Elements of the theory and methodology for calculating the basic parameters of vibratory mills]. *Moscow Promstroizdat*, 1957, 113 p.
26. Gur'ianov G.A., Klimenko E.A. Ob odnom podkhode k intensivatsii protsessa pomola [One approach to the intensification of the grinding process]. *Vestnik Vostochno-Kazakhstanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. D. Serikbaeva*, 2013, no. 1 (59), pp. 27-35.
27. Timoshenko S.P. Prochnost' i kolebaniia elementov konstruktssii [Strength and vibrations of structural elements]. *Moscow, Nauka*, 1975, 704 p.
28. Iablonskii A.A., Noreiko S.S. Kurs teorii kolebanii: Uchebnoe posobie dlia studentov vtuzov [Course of the theory of oscillations: A manual for students of technical colleges]. *Moscow, Vysshaia shkola*, 1975, 248 p.
29. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1975, 576 p.
30. Koshliakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki: Ucheb. posobie dlia mekh.-mat. fak-tov un-tov [Equations in partial derivatives of mathematical physics: Proc. allowance for fur. faculties un-tov]. *Moscow Vysshaia shkola*, 1970, 712 p.
31. Kil'chevskii N.A. Teoriia sudareniiia tverdykh tel [The theory of collision of solids]. *Kiev, Izdatelstvo «Naukova dumka»*, 1969, 248 p.
32. Tatur G.K. Obshchii kurs soprotivleniia materialov [General course of materials resistance]. *Minsk, Izdatelstvo «Vyssheishaia shkola»*, 1974, 464 p.
33. Beliaev N.M. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. *Moscow, Nauka*, 1965, 856 p.
34. Yong Th. A course of lectures on natural philosophy and the Mechanical arts. *London, printed for J. Johnson*, 1807, vol. 1, XXIV + 796 p. (sm. str. 144).
35. Voronkov I.M. Kurs teoreticheskoi mekhaniki [Course of Theoretical Mechanics]. *Moscow, Gosudarstvennoe izd-vo fiziko-matematicheskoi literatury*, 1961, 596 p.
36. Feodos'ev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. *Moscow, Nauka*, 1974, 560 p.
37. Batuev G.S., Golubkov Iu.V., Efremov A.K., Fedosov A.A. Inzhenernye metody issledovaniia udarnykh protsessov [Engineering methods for studying shock processes]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1969, 251 p.
38. Pisarenko G.S., Iakovlev A.G., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniiu materialov [Handbook on the resistance of materials]. *Kiev, Izd-vo «Naukova dumka»*, 1975, 704 p.
39. Iavorskii B.M., Detlaf A.A. Spravochnik po fizike / Dlia inzhenerov i studentov vuzov [Handbook of Physics / For engineers and university students]. *Moscow, Nauka*, 1979, 944 p.
40. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam [A Handbook of Ordinary Differential Equations]. *Moscow, Nauka*, 1976, 576 p.
41. Alina Kim, Mikhail Doudkin, Andrey Vavilov, Georgiy Guryanov New vibroscreen with additional feed elements. *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 20176, no. 1, pp. 786-794.