Анисимов В.Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругого стержня переменной длины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 4. – С. 5–15. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.01

Anisimov V.N. Longitudinal resonance vibrations of viscoelastic rod with variable length. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 5-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.01

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI 10.15593/perm.mech/2017.4.01

УДК 534.11

ПРОДОЛЬНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

В.Н. Анисимов

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, Сызрань, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 13 июня 2017 г.
Принята: 1 декабря 2017 г.
Опубликована: 29 декабря 2017 г.

Ключевые слова:

колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, резонансные свойства.

АННОТАЦИЯ

Исследуются колебания стержня, сгорающего с одного конца. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками. Для описания колебаний использована классическая математическая модель, учитывающая вязкоупругость на основе структурной модели Фойгта. Введение безразмерных переменных позволило сократить число параметров, от которых зависит процесс колебаний, до двух. Параметры характеризуют скорость движения границы и вязкоупругие свойства стержня. Для решения применён метод Канторовича–Галёркина. В качестве динамических мод взяты собственные функции краевой задачи с неподвижной границей. Решение в случае, когда скорость движения границы равна нулю, является точным. При увеличении скорости движения границы погрешность решения увеличивается. Пренебрежение малыми величинами позволило получить сравнительно простое выражение для амплитуды резонансных колебаний. Выражение, полученное для амплитуды колебаний, содержит интегралы, не имеющие аналитического решения, поэтому они находились численно. Решение имеет модовую структуру, что позволяет анализировать резонансные свойства стержня. С помощью полученного решения проанализированы явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Для установившегося резонанса получено аналитическое выражение, описывающее увеличение амплитуды колебаний. Прохождение через резонанс проанализировано количественно. Представлены графики изменения амплитуды колебаний в резонансной области для первой динамической моды при различных значениях параметра, характеризующего вязкоупругость. Представлены также графики максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой динамической моде в зависимости от параметров, характеризующих вязкоупругость и скорость движения границы

© **Анисимов Валерий Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: anisimov170159@mail.ru

Valeriy N. Anisimov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: anisimov170159@mail.ru

LONGITUDINAL RESONANCE VIBRATIONS OF THE VISCOELASTIC ROD WITH A VARIABLE LENGTH

V.N. Anisimov

Syzran' Branch of Samara State Technical University, Syzran, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 13 June 2017
Accepted: 1 December 2017
Published: 29 December 2017

Keywords:
fluctuations of objects with moving boundaries, boundary problems, mathematical models, resonance properties.

ABSTRACT

Fluctuations of the core which is burning at one end are investigated in the paper. The research object belongs to a wide range of fluctuating one-dimensional objects with moving boundaries and loadings. The classical mathematical model considering viscoelasticity on the basis of the structural model of Foigt is used for the description of fluctuations. By introducing the dimensionless variables it became possible to reduce the number of parameters (which affect the process of fluctuations) to two. The parameters characterize the speed of the border's motion and viscoelastic properties of the core. The method of Kantorovich-Galerkin is applied for the solution. Eigen functions of the boundary problem with a motionless border are taken as dynamic modes. The solution when the speed of the border's motion is equal to zero is precise. The error of the solution increases, when the speed of the border's motion increases. By neglecting the small values, it became possible to obtain quite a simple expression for the amplitude of resonant fluctuations. The expression obtained for the amplitude of fluctuations contains the integrals having no analytical solution, therefore they were obtained numerically. The solution has a mode structure that allows analyzing the resonant properties of the core. The obtained solution made it possible to analyze the phenomena of the established resonance and the process of passing through the resonance. The analytical expression describing the increase in amplitude of fluctuations is obtained for the established resonance. The passing through the resonance is analyzed quantitatively. The graphs of the amplitude of fluctuations changing in the resonant area for the first dynamic mode at various values of the parameter characterizing the viscoelasticity are presented. Also the graphs of the maximum amplitude of fluctuations are provided when passing through the resonance at the first dynamic mode, depending on the parameters which characterize the viscoelasticity and speed of the border's motion. The results of numerical calculations are processed by means of the least squares method. The expressions for the maximum deformations of the core when passing through the resonance at the first and second dynamic mode are obtained. The gained expression allows depending on the speed of the border's motion, the coefficient of viscoelasticity and strength of the core's material which make it possible to estimate the core durability.

Введение

В статье исследуются резонансные свойства стержня, сгорающего с одного конца. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами [1–20, 24–26, 30–32, 34, 35] и нагрузками [27–29, 33]. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [2, 10], гибкие звенья передач [1], балки [3, 16], лентопротяжные механизмы [12], конвейеры [14, 16] и т.д. Наличие условий на движущихся границах делает неприемлемыми для решения известные методы математической физики, пригодные для задач с фиксированными границами. Точные решения получены только для волнового уравнения при ограниченном числе законов движения границ [4, 6]. Для решения в основном используются приближённые методы [2, 20]. Сложность получаемых решений объясняет тот факт, что только в ограниченном числе работ приводятся количественные результаты. В основной массе работ вязкоупругие свойства колеблющегося объекта не учитываются**.** Для описания колебаний использована классическая математическая модель [2, 19]. При решении использовался метод Канторовича–Галёркина [3, 5, 7, 21]. В отличие от асимптотических методов [2, 20] решение имеет модовую структуру, что позволяет анализировать резонансные свойства стержня. Пренебрежение малыми величинами позволило получить сравнительно простое выражение для амплитуды резонансных колебаний. С помощью полученного выражения проанализированы явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Результаты анализа представлены в виде графиков. Решение произведено в безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные количественные результаты для анализа колебаний технических объектов.

1. Постановка задачи

Схема объекта изучения изображена на рис. 1. Для модели введены следующие обозначения: ρ – объёмная плотность материала стержня; S – площадь поперечного сечения; E – модуль упругости; μ – коэффициент, характеризующий свойство вязкоупругости материала стержня на основе структурной модели Фойгта; $l(t)$ – длина стержня, находящегося в недеформированном состоянии, в момент времени t.

Обозначим $Z(x,t)$ – смещение точки стержня с координатой x в момент времени t. Математическая модель, описывающая продольные колебания стержня, имеет вид [2]

$$\rho Z_{tt}(x,t) - EZ_{xx}(x,t) - \mu Z_{xxt}(x,t) = 0; \quad (1)$$

$$Z(0,t) = 0; \quad (2)$$

$$ESZ_x\left(l(t),t\right) = P_0\left(1 + A\cos W_0(t)\right). \quad (3)$$

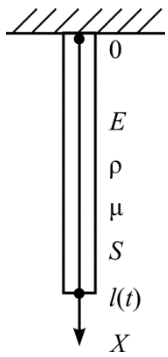

Рис. 1.Схема объекта изучения
Fig. 1. Scheme of the studied object

В настоящее время актуальной является проблема изучения динамических свойств стержней из вязкоупругих материалов [22, 23]. Рассматриваемая модель может быть использована для описания колебаний стержня твердого топлива, сгорающего с одного конца. В этом случае P_0 – средняя реактивная сила, а составляющая $AP_0\cos W_0(t)$ характеризует слабые возмущения гармонического характера, связанные с пульсационной составляющей тяги внутрикамерного процесса. Малый коэффициент A показывает, во сколько раз амплитуда возмущений больше P_0; $W_0(t)$ – монотонно возрастающая функция.

Закон движения границы примем равномерным: $l(t) = -v_0 t + l(0)$. Здесь $l(0)$ – первоначальная длина стержня; v_0 – скорость движения границы.

Введём безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{l(0)};\ \tau = \frac{a}{l(0)}t;\ Z\left(x,t\right) = \frac{P_0}{ES}l(0)\left(U\left(\xi,\tau\right) + \xi\right);\ a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

В результате задача (1)–(3) примет следующий вид:

$$U_{\tau\tau}\left(\xi,\tau\right) - U_{\xi\xi}\left(\xi,\tau\right) - \varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}\left(\xi,\tau\right) = 0;$$

$$U(0,t) = 0;$$

$$U_\xi\left(L\left(\varepsilon_0\tau\right),\tau\right) = A\cos W(\tau),$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{a\rho l(0)};\ \varepsilon_0 = \frac{v_0}{a};\ \frac{1}{l(0)} l(t) = L(\varepsilon_0\tau) = 1 - \varepsilon_0\tau;\ W(\tau) = W_0\left(\frac{l(0)}{a}\tau\right).$$

Здесь ε_0, ε_1 – малые параметры. Параметр ε_1 характеризует малость сил внутреннего трения по сравнению с упругими силами. Параметр ε_0 характеризует малую скорость движения границы по сравнению со скоростью звука в стержне.

Деформации стерня определяются следующим выражением:

$$Z_x(x,t) = \frac{P_0}{ES}\left(U_\xi(\xi,\tau) + 1\right). \tag{4}$$

Чтобы преобразовать граничные условия к однородному виду, введём новую функцию

$$U(\xi,\tau) = V(\xi,\tau) + A\xi\cos W(\tau),$$

где $V(\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[V(\xi,\tau) + A\xi\cos W(\tau)\right]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) - \varepsilon_1 V_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = 0 \tag{5}$$

и граничным условиям

$$V(0,t) = 0\ ; V_\xi\left(L(\varepsilon_0\tau),\tau\right) = 0. \tag{6}$$

2. Решение задачи

Решение будем производить с точностью до членов второго порядка малости порядка малости. Для решения задачи (5), (6) будем использовать метод Канторовича-Галеркина [5]. Решение будем искать в виде

$$V(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)\, X_n(\xi,\varepsilon_0\tau), \tag{7}$$

где

$$X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) = \sin\left(\omega_n(\varepsilon_0\tau)\xi\right), \tag{8}$$

$$\omega_n(\varepsilon_0\tau) = \frac{\pi n - \pi/2}{L(\varepsilon_0\tau)}.$$

Заметим, что функции (8) при $\varepsilon_0 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$ являются собственными формами колебаний. В этом случае метод Канторовича–Галёркина дает точное решение. При увеличении ε_0 точность уменьшается. Статья посвящена анализу резонансных явлений, наблюдаемых на одной из собственных частот. Амплитуда колебаний на резонансной частоте многократно увеличивается. Амплитуда колебаний на нерезонансных частотах соизмерима с возмущающими воздействиями. При этом нерезонансными членами ряда (7) можно пренебречь и рассматривать решение только на одной резонансной моде.

После подстановки члена с порядковым номером *n* ряда (7) в уравнение (5) получим

$$\left[f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) + A\xi\cos W(\tau)\right]_{\tau\tau} + \omega_n^2(\varepsilon_0\tau) f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) +$$
$$+ \varepsilon_1\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)\, f_n'(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) = 0.$$

При наблюдении резонансных явлений $W(\tau)=\Omega\tau+\theta(\varepsilon_0\tau)$, где $\theta(\varepsilon_0\tau)$ – функция медленного времени [2], а Ω – усреднённая частота внешнего воздействия. Пренебрегая членом порядка ε_0^2, получим

$$\left(\cos W(\tau)\right)'' = -\left(W'(\tau)\right)^2 \cos W(\tau). \tag{9}$$

Согласно методу Канторовича–Галёркина, умножим полученное уравнение на $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)$ и проинтегрируем по $d\xi$ в интервале от нуля до $L(\varepsilon_0\tau)$. Учитывая (9), с точностью до членов второго порядка малости получим следующее уравнение для определения функций $f_n(\tau)$:

$$f_n''(\tau)+2R_n(\varepsilon_0\tau)f_n'(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)f_n(\tau)=P_n(\varepsilon_0\tau)\cos W(\tau), \tag{10}$$

где

$$R_n(\tau)=-\frac{\varepsilon_0 L'(\varepsilon_0\tau)}{2L(\varepsilon_0\tau)}+\frac{\varepsilon_1\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2L^2(\varepsilon_0\tau)},$$

$$P_n(\varepsilon_0\tau)=\frac{2A(-1)^{n+1}L(\varepsilon_0\tau)}{\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(W'(\tau)\right)^2.$$

Если ввести в уравнение (10) новую функцию

$$f_n(\tau)=C_n(\tau)y_n(\tau), \tag{11}$$

где

$$C_n(\tau)=\exp\left(-\int_0^\tau R_n(\varsigma)\,d\varsigma\right)=\sqrt{L(\varepsilon_0\tau)}\exp\left(-\frac{\varepsilon_1\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)^2\tau}{2L(\varepsilon_0\tau)}\right),$$

то оно не будет содержать члена с первой производной:

$$y_n''(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau)=D_n(\tau)\cos W(\tau). \tag{12}$$

Здесь

$$D_n(\tau)=\frac{2A(-1)^{n+1}\sqrt{L(\varepsilon_0\tau)}}{\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(W'(\tau)\right)^2\exp\left(\frac{\varepsilon_1\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)^2\tau}{2L(\varepsilon_0\tau)}\right).$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (12), с точностью до членов второго порядка малости имеют вид

$$y_{n1}(\tau)=a_n(\varepsilon_0\tau)\cos\left(w_n(\tau)\right);\ \ y_{n2}(\tau)=a_n(\varepsilon_0\tau)\sin\left(\left(w_n\tau\right)\right),$$

где

$$w_n(\tau)=\int\omega_n(\varepsilon_0\tau)\,d\tau=-\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(1-\varepsilon_0\tau\right);\ \ a_n(\varepsilon_0\tau)=\frac{1}{\sqrt{\omega_n(\varepsilon_0\tau)}}.$$

Решение уравнения (12) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$f_n(\tau) = -C_n(\tau)a_n(\varepsilon_0\tau)\sin(w_n(\tau))\int_0^\tau \frac{D_n(\varsigma)\cos(w_n(\varsigma))\cos(W(\varsigma))}{\omega_n(\varepsilon_0\varsigma)a_n(\varepsilon_0\tau)}d\varsigma -$$

$$-C_n(\tau)a_n(\varepsilon_0\tau)\cos(w_n(\tau))\int_0^\tau \frac{D_n(\varsigma)\sin(w_n(\varsigma))\cos(W(\varsigma))}{\omega_n(\varepsilon_0\varsigma)a_n(\varepsilon_0\tau)}d\varsigma\ .$$

Пренебрегая нерезонансными членами, как это сделано в работе [5], получим следующее выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$A_n^2(\tau) = A^2E_n^2(\tau)\left(\left(\int_0^\tau F_n(\zeta)\cos(\Phi_\text{n}(\zeta))d\zeta\right)^2 + \left(\int_0^\tau F_n(\zeta)\sin(\Phi_\text{n}(\zeta))d\zeta\right)^2\right). \qquad (13)$$

Функции, входящие в выражение (13), определяются следующими выражениями:

$$E_n^2(\tau) = \frac{L^2(\varepsilon_0\tau)}{\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right)^6}\exp\left(-\frac{\varepsilon_1\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right)^2\tau}{L(\varepsilon_0\tau)}\right);$$

$$F_n(\zeta) = A(-1)^{n+1}L(\varepsilon_0\tau)\exp\left(\frac{\varepsilon_1\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right)^2\tau}{2L(\varepsilon_0\tau)}\right)(W'(\tau))^2;$$

$$\Phi_n(\zeta) = -\frac{\pi n - \frac{\pi}{2}}{\varepsilon_0}\ln(L(\varepsilon_0\tau)) - W(\tau).$$

Амплитуда колебаний для деформаций $V_\xi(\xi,\tau)$ имеет вид

$$B_n(\tau) = \frac{1}{A}\omega_n(\varepsilon_0\tau)A_n(\tau). \qquad (14)$$

Величина $B_n(\tau)$ показывает, во сколько раз амплитуда колебаний деформаций превосходит интенсивность внешнего возмущения A.

3. Анализ решения

С помощью выражения (14) были проанализированы резонансные свойства объекта. В системах с движущимися границами наблюдаются два вида резонансных явлений: установившийся резонанс и прохождение через резонанс. Установившийся резонанс это явление резкого увеличения амплитуды колебаний, когда изменение частоты внешней силы и одной из собственных частот согласованы таким образом, что создаются наилучшие условия для увеличения амплитуды. Установившийся резонанс наблюдается, если $\Phi_n(\zeta) = 0,$ т.е.

$$W(\tau) = -\frac{\pi n - \frac{\pi}{2}}{\varepsilon_0}\ln(L(\varepsilon_0\tau)). \qquad (15)$$

Изменение амплитуды колебаний при этом будет описываться следующим выражением:

$$A_n(\tau) = E_n(\tau)\int_0^{\tau} F_n(\varsigma)\,d\varsigma.$$

Явление прохождения через резонанс наблюдается при внешнем возмущении постоянной частоты $W(\tau)=\Omega\tau$. Это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты. На рис. 2 представлен процесс увеличения амплитуды колебаний в резонансной области на первой динамической моде при $\varepsilon_0 = 0{,}0001$. Возмущающая частота Ω подбиралась таким образом, чтобы прохождение через резонанс начиналось при $\tau = 0$.

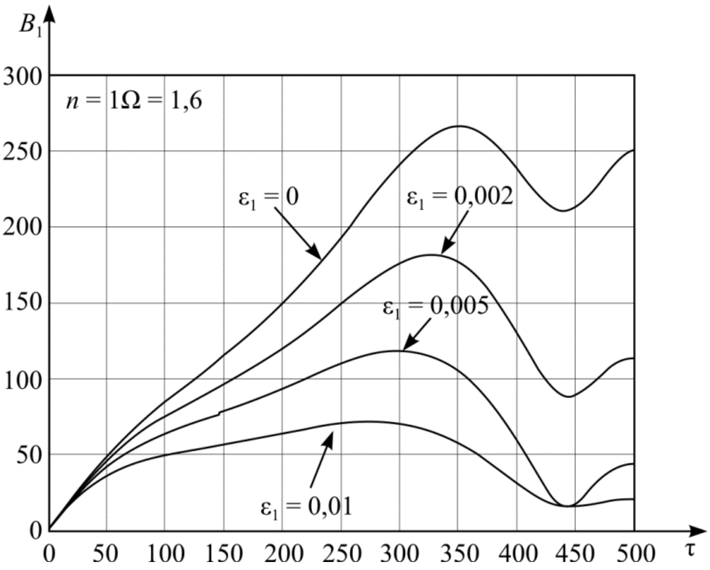

Рис. 2. Процесс увеличения амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой динамической моде

Fig. 2. Increase of the amplitude of fluctuations when passing through the resonance at the first dynamic mode

Выражение (14) было численно проанализировано на максимум. На рис. 3 изображена зависимость максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой динамической моде от ε_0 и ε_1.

Оценим погрешность метода Канторовича–Галёркина. Рассматриваемая задача без учета вязкоупругости $(\varepsilon_1 = 0)$ в работе [6] была решена точным методом. Там было получено следующее выражение для функции $W(\tau)$, при которой возникает установившийся резонанс:

$$W(\tau) = -\frac{\pi n - \dfrac{\pi}{2}}{\ln\left(\dfrac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}\right)}\ln\left(L(\varepsilon_0\tau)\right).$$

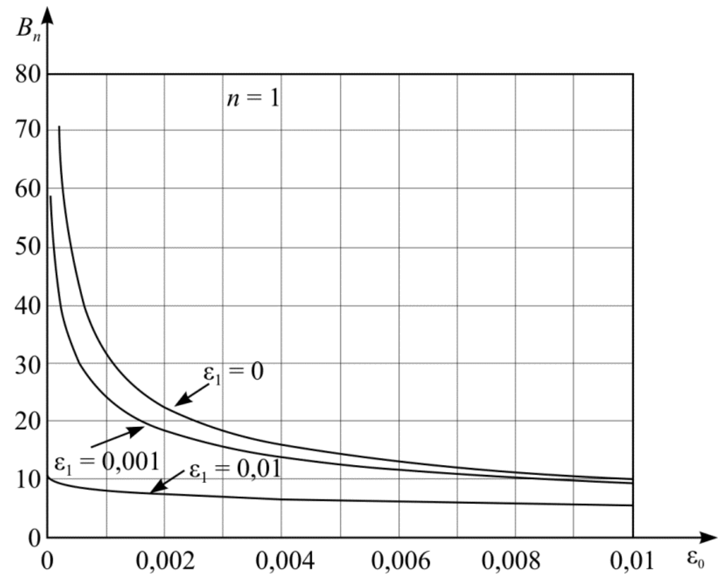

Рис. 3. Зависимость максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой динамической моде
Fig. 3. Dependence of the maximum amplitude of fluctuations when passing through the resonance at the first dynamic mode

Сравнением данного выражения с выражением (15) при различных значениях ε_0 установлено, что относительная погрешность $W(\tau)$ в равномерном приближении не превосходит 5 % при $\varepsilon_0 < 0{,}37$.

Заключение

Таким образом, в отличие от асимптотических методов, использование метода Канторовича–Галёркина позволило получить решение, имеющее модовую структуру. Это актуально при анализе резонансных свойств объекта. Пренебрежение малыми членами дало возможность получить сравнительно простое выражение для амплитуды колебаний.

Библиографический список

1. Самарин Ю.П., Анисимов В.Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – № 12. – С. 17–21.
2. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – Киев: Наукова думка, 1971. – 270 с.
3. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – № 1. – С. 159–161.
4. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича–Галёркина // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – № 1 (18). – С. 149–158.
6. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – № 3 (28). – С. 145–151.
7. Ding Hu, Chen Li-Qun. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams // J. Sound and Vibr. – 2010. – No. 17. – P. 3484–3494.

8. Kotera Tadashi Vibration of a string with time-varying length // Bulleten Japan Sosietyof Mechanical Engineers. – 1978. – Vol. 21. – No. 162. – P. 1677–1684.

9. Zhu W.D., Zheng N.A. Exact response of a translatingstring with arbitrarily varying length under general excitation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 75. – No. 3. – P. 519–525.

10. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamicsand control // Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust. – 2006. – No. 1. – P. 66–78.

11. Nonlinear vibration analysis of an axially moving drill string system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well / S.M. Sahebkar, M.R. Ghazavi, S.E. Khadem, M.H. Ghayesh // Mech. and Mach. Theory. – 2011. – No. 5. – P. 743–760.

12. Boyle John. M. (Jr), Bhushan Bharat. Vibration modeling of magnetic tape with vibro-impact of tape-guide contact // J. Sound and Vibr. – 2006. – No. 3. – P. 632–655.

13. Zhang P., Zhu C.M., Zhang L.J. Analyses of longitudinal vibration and energetic on flexible hoisting systems with arbitrarily varying length // Journal of Shanghai Jiao-Tong University. – 2008. – No. 42 (3). – P. 481–488.

14. Nguyen Q.C., Hong K.S. Transverse vibration control of axially moving membranes by regulation of axial velocity // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2012. – No. 20 (4). – P. 1124–1131.

15. Zhang Y.H. Longitudinal vibration modeling and control a flexible transporter system with arbitrarily varying cable lengths // Journal of Vibration and Control. – 2005. – No. 11. – P. 431–456.

16. Chen S.H., Huang J.L. On internal resonance of nonlinearvibration of axially moving beams // Acta Mechanica Sinica. – 2005. – Vol. 37. – No. 1. – P. 57–63.

17. Nguyen Q.C., Hong K.S. Transverse vibration control of axially moving membranes by regulation of axial velocity // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2012. – No. 20 (4). – P. 1124–1131.

18. Тихонов В.С., Абрамов А.А. Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке // Вестн. МГУ. Сер. 1. – 1993. – № 5. – С. 45–48.

19. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ-мат. науки. – 2015. – Т. 19, № 2. – С. 382–397.

20. Кечеджиян Л.О., Пинчук Н.А., Столяр А.М. Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. – 2008. – № 1. – С. 22–27.

21. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. – СПб.: Лань, 2002. – 640 с.

22. Янкин А.С. Влияние частот бигармонического (двухчастотного) нагружения на динамическое поведение полимерных композитов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 273–292.

23. Янкин С.В., Словиков С.В., Бульбович Р.В. Определение динамических механических свойств низкомодульных вязкоупругих композитов при бигармоническом законе нагружения // Механика композитных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 141–151.

24. Lei X.-Y. Effects of abrupt changes in track foundation stiffness on track vibration under moving loads // Zhendong Gongcheng Xuebao=Journal of Vibration Engineering. – 2006. – Vol. 19. – No. 2. – P. 195–199.

25. Brake M.R., Wickert J.A. Frictional vibration transmission from a laterally moving surface to a traveling beam // J. Sound and Vibr. – 2008. – Vol. 310. – No. 3. – P. 663–675.

26. Рагульский К.И. Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов // Динамика машин. – М.: Наука, 1971. – С. 169–177.

27. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 6. – С. 14–18.

28. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Машиностроение и инженерное образование. – 2014. – № 2 (39). – С. 37–40.

29. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестн. науч.-техн. развития. – 2013. – № 6 (70). – С. 18–29.

30. Анисимов В.Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъёмной установки // Изв. Самар. науч. центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18, № 4–1. – С. 128–133.

31. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26. – Вып. 3. – С. 77–80.

32. Bergamaski S., Sinopoli A. On the flexural vibration of arms with variable length. On exact solution // Mech. Res. Commun. – 1983. – Vol. 10. – No. 6. – P. 342–344.

33. Фирсанов В.В. Динамическое состояние системы балок с переменными параметрами при действии подвижной нагрузки // Вестн. Моск. авиац. ин-та. – 2009. – № 3. – P. 138–144.

34. Николаи Е.Л. О поперечных колебаниях участка струны, длина которого равномерно изменяется: тр. по механике. – М.: Гостехиздат, 1955. – С. 328–331.

35. Литвинов В.Л. Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестн. науч.-техн. развития. 2015. – № 4 (92).

References

1. Samarin Yu.P., Anisimov V.N. Vynuzhdennye poperechnye kolebaniia gibkogo zvena pri razgone [Forced transverse vibrations of the flexible link at dispersal]. *Izvestia Vuzov. Mashinostroenie*, 1986, no. 12, pp. 17-21

2. Goroshko O.A., Savin G.N. Vvedenie v mekhaniku deformiruemykh odnomernykh tel peremennoi dliny[Introductionin mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length]. *Kiev, NaukovaDumka*, 1971, 270 p.

3. Lezhnyva A.A. Izgibnye kolebaniia balki peremennoi dliny [Bending vibration of beamof variable length]. *Izv. Acad. Nauk SSSR. Mechanic of solidstate*, 1970, no. 1, pp. 159-161

4. Vesnitskii A.I. Volny v sistemakh s dvizhushchimisia granitsami [Vaves in systems with moving boundaries and loads]. *Moscow, Fizmatlit*, 2001. pp. 320

5. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Issledovanie rezonansnykh svoistv mekhanicheskikh ob"ektov pri pomoshchi metoda Kantorovicha-Galerkina [Investigation of resonance characteristics of mechanical objects with moving borders by application of the Kantorovich-Galerkin method]. *Vestnik samarskogo gosudarstvennogotekhnicheskogo univiversiteta. Ser. Fiz.-Mt. Nauki*, 2009, no. 1(18), pp. 149-158

6. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. Ob odnom metode polucheniia tochnogo resheniia volnovogo uravneniia, opisyvaiushch ego kolebaniia sistem s dvizhushchimisia granitsami [On a method of analytical soluthion of wave equation describing the oscillation system with moving boundaries]. *Vestnik samarskogo gosudarstvennogotekhnicheskogo univiversiteta. Ser. Fiz.-Mt. Nauki*, 2012, no. 3(28), pp. 145-151

7. Ding Hu, Chen Li-Qun. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axiallymoving beams. *J. Sound and Vibr*., 2010, no. 17, pp. 3484-3494.

8. Kotera Tadashi Vibration of a string with time-varying length. *Bulleten Japan Sosietyof Mechanical Engineer*s, 1978, vol. 21, no. 162, pp. 1677-1684.

9. Zhu W.D., Zheng N.A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation. *Trans. ASME. J. Appl.Mech*., 2008, vol. 75, no. 3. pp. 519-525

10. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamic sand control. *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust*., 2006, no. 1, pp. 66-78.

11. Sahebkar S.M., Ghazavi M.R., Khadem S.E.,Ghayesh M.H. Nonlinear vibration analysis of an axially moving drill string system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well. *Mech. and Mach.Theory*, 2011, no. 5, pp. 743-760.

12. Boyle John. M. (Jr), Bhushan Bharat.Vibration modeling of magnetic tape with vibro-impact of tapeguide contact. *J. Sound and Vibr*., 2006, no. 3, pp. 632-655.

13. Zhang P., Zhu C.M., Zhang L.J. Analyses of longitudinal vibration and energetic on flexible hoisting systems with arbitrarily varying length// *Journal of Shanghai Jiao-Tong University*, 2008, no. 42(3), pp. 481-488.

14. Nguyen Q.C., Hong K.S. Transverse vibration control of axially moving membranes by regulation of axial velocity. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, no. 20(4), pp. 1124-1131.

15. Zhang Y.H. Longitudinal vibration modeling and control a flexible transporter system with arbitrarily varying cable lengths. *Journal of Vibration and Control*, 2005, no. 11, pp. 431-456.

16. Chen S.H., Huang J.L. On internal resonance of nonlinear vibration of axially moving beams. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, vol. 37, no. 1. pp. 57-63

17. Nguyen Q.C., Hong K.S. Transverse vibration control of axially moving membranes by regulation of axial velocity. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, no. 20(4), pp. 1124-1131.

18. Tikhonov V.S., Abramov A.A. Transverse Poperechnye kolebaniia gibkoi niti peremennoi dliny v potoke [Vibrations of a Flexible String with Tame-Varying Length in Flow], *Vestnik moskovskogo universiteta. Ser 1.Matematika, Mechanica*,1993, no. 5, pp. 45-48

19. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Matematicheskie modeli prodol'no-poperechnykh kolebanii ob"ektov s dvizhushchimisia granitsami [Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders]. *Vestnik samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2015, vol. 19, no.2, pp. 382-397

20. Kechedgiyan L.O., Pinchuk N.A., Stolyar A.M. Ob odnoi zadache matematicheskoi fiziki s podvizhnoi granitsei [A problem of mathematical physics with moving boundary]. *Vest.Vuzov North-Kaukaz. Region.Natural Sciences*, 2008, no. 1, pp. 22-27.

21. Myshkis A.D. Matematika dlia tekhnicheskikh vuzov [Mathematic for technical university] *Saint Petersburg, Lan*, 2002, 640 p.

22. Yankin A.C., Slovikov S.V., Bul'bovich R.V. Determination of the dynamic mechanical properties of low-modulus viskoelastic composites at the biharmonic law of loading. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2013, vol. 4, iss. 2, pp. 139-150.

23. Yankin A.C., Slovikov S.V., Bul'bovich R.V. Determination of the dynamic mechanical properties of low-modulus viskoelastic composites at the biharmonic law of loading. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2013, vol. 4, iss. 2, pp. 139-150.

24. Lei X.-Y. Effects of abrupt changes in track foundation stiffness on track vibration under moving loads. *Zhendong Gongcheng Xuebao Journal of Vibration Engineering*. 2006,vol. 19, no.2, pp. 195-199

25. Brake M.R., Wickert J.A. Frictional vibration transmission from a laterally moving surface to a traveling beam. *J. Sound and Vibr*., 2008, vol. 310, no.3. pp 663-675. DOI: 10.1016/j. jsv.2007.04.029

26. Ragulsky K.I. Voprosy dinamiki pretsizionnykh lentoprotiazhnykh mekhanizmov [Questions of dynamics of precision tape drive mechanisms]. *Moscow, Science: Dynamics of cars*, 1971, pp 169-177.

27. Erofeyev V.I., Lisenkova E.E. Vozbuzhdenie voln nagruzkoi, dvizhushcheisia po povrezhdennoi gibkoi odnomernoi napravliaiushchei, lezhashchei na uprugom osnovanii [Excitement of waves the loading moving on the damaged flexible one-dimensional guide lying on the elastic basis]. *Problems of mechanical engineering and reliability of cars*. 2016, no. 6, pp 14-18.

28. Erofeyev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Generatsiia voln istochnikom, dvizhushchimsia po deformiruemoi napravliaiushchei, lezhashchei na uprugo-inertsionnom osnovanii [Generation of waves the source moving on the deformable guide lying on the elastic and inertial basis]. *Mechanical engineering and engineering education*. 2014, no. 2 (39), pp. 37-40.

29. Erofeyev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova of E.E. Issledovanie volnovykh protsessov v odnomernoi sisteme, lezhashchei na uprugo-inertsionnom osnovanii, s dvizhushcheisia nagruzkoi [Research of wave processes in the one-dimensional system lying on the elastic and inertial basis with moving loading]. *The Messenger of scientific and technical development*, 2013, no. 6 (70), pp. 18-29.

30. Anisimov V.N. Prodol'nye rezonansnye kolebaniia viazkouprugogo kanata gruzopod"emnoi ustanovki [Longitudinal resonant fluctuations of a viscoelastic rope of load-lifting installation]. *News of the Samara scientific center of the Russian Academy of Sciences*, 2016, vol. 18, no. 4-1, pp. 128-133.

31. Samarin Yu.P. Ob odnoi nelineinoi zadache dlia volnovogo uravneniia v odnomernom prostranstve [About one nonlinear task for the wave equation in one-dimensional space of]. *Applied mathematics and mechanics*, 1964, vol. 26, pp. 77-80.

32. Bergamaski S., Sinopoli A. On the flexural vibration of arms with variable length. On exact solution. *Mech. Res. Commun*., 1983, vol. 10, no. 6, pp. 342-344.

33. Firsanov V.V. Dinamicheskoe sostoianie sistemy balok s peremennymi parametrami pri deistvii podvizhnoi nagruzki [A dynamic condition of system of beams with variable parameters at action of mobile loading]. *Bulletin of the Moscow aviation institute*, 2009, no. 3, pp. 138-144.

34. Nikolay E.L. O poperechnykh kolebaniiakh uchastka struny, dlina kotorogo ravnomerno izmeniaetsia: Trudy po mekhanike [About cross fluctuations of the site of a string which length evenly changes: Works on mechanics of]. *Moscow, Gostekhizdat*, 1955, pp. 328-331.

35. Litvinov V.L. Poperechnye kolebaniia viazkouprugogo kanata, lezhashchego na uprugom osnovanii, s uchetom vliianiia sil soprotivleniia sredy [Cross fluctuations of the viscoelastic rope lying on the elastic basis taking into account influence of forces of resistance of the environment]. *The Messenger of scientific and technical development*. 2015, no. 4 (92), pp. 15-21.