



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.11

УДК 539.3

## РАЗВИТИЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ СВЕРХМНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

И.С. Никитин, А.Д. Никитин, Б.А. Стратула

Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 20 октября 2020 г.  
Принята: 20 ноября 2020 г.  
Опубликована: 30 декабря 2020 г.

#### Ключевые слова:

усталостное разрушение,  
сверхмногоциклового усталость,  
пьезоэлектрическая установка,  
мультирежимная модель,  
уравнение повреждаемости,  
многоосный критерий.

### АННОТАЦИЯ

В работе дается описание метода испытаний металлических материалов с использованием пьезоэлектрических нагружающих элементов в области сверхмногоциклового усталости (СВМУ). Обсуждается схема и устройство высокочастотной усталостной установки. Для проведения экспериментов рассчитывается первая мода резонансных продольных колебаний, соответствующих собственным частотам цилиндрического корсетного образца. Приводятся результаты некоторых экспериментов по сверхмногоциклового усталостному разрушению образцов титанового сплава ВТ3-1 при различных коэффициентах асимметрии цикла. Проведено математическое моделирование процесса развития усталостных повреждений в области СВМУ. Для этого используется бимодальное представление усталостной кривой. Это представление содержит две ветви: левая ветвь соответствует классическим режимам малоциклового и многоциклового усталости, а правая ветвь описывает режим сверхмногоциклового усталости. На этой основе построена кинетическая модель, ассоциированная с известным критерием многоосного усталостного разрушения SWT, в котором заложен механизм, связанный с развитием микротрещин нормального отрыва. Данную кинетическую модель развития повреждаемости можно использовать для расчета различных режимов усталостного разрушения – от малоциклового до сверхмногоциклового усталости. На основе этой модели разработан численный метод решения эволюционного уравнения для функции повреждаемости. Усталостное разрушение материала в данной модели связано с деградацией его модулей упругости по мере роста функции повреждаемости. Проведены расчеты развития трещиноподобных зон усталостного разрушения титановых корсетных образцов при различных коэффициентах асимметрии циклического нагружения, использованных при испытаниях на пьезоэлектрической установке. Для проверки работоспособности модели проведено сравнение экспериментальных и расчетных усталостных кривых в области СВМУ.

© ПНИПУ

© Никитин Илья Степанович – д.ф.-м.н., директор, e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru).  
Никитин Александр Дмитриевич – к.т.н., с.н.с., e-mail: [nikitin\\_alex@bk.ru](mailto:nikitin_alex@bk.ru).  
Стратула Борис Андреевич – м.н.с., e-mail: [stratula@matway.net](mailto:stratula@matway.net).

Ilya S. Nikitin – Doctor of Physics and Mathematics, Director ICAD RAS, e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru).  
Aleksandr D. Nikitin – Csc in Technical Sciences, Senior Researcher ICAD RAS, e-mail: [nikitin\\_alex@bk.ru](mailto:nikitin_alex@bk.ru).  
Boris A. Stratula – Junior Researcher, e-mail: [stratula@matway.net](mailto:stratula@matway.net).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## DAMAGE DEVELOPMENT UNDER VERY-HIGH-CYCLE FATIGUE REGIME

I.S. Nikitin, A.D. Nikitin, B.A. Stratula

Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 20 October 2020  
Accepted: 20 November 2020  
Published: 30 December 2020

#### Keywords:

fatigue failure, very-high-cycle fatigue, piezoelectric machine, multi-regime model, damage equation, multiaxial fatigue criterion.

### ABSTRACT

A method of testing metallic materials using piezoelectric elements under very-high-cycle fatigue (VHCF) regime is described in the paper. The scheme and structure of a high-frequency fatigue machine are discussed. For the experiments, the first mode of resonant longitudinal vibrations is calculated, corresponding to the natural frequency of the cylindrical corset sample. The results of some experiments on very-high-cycle fatigue fracture of VT3-1 titanium alloy samples at various stress ratio coefficients are presented. Mathematical modeling of the process of fatigue damages development in VHCF is carried out. For this, a bimodal representation of the fatigue curve is used. This bimodal representation contains two branches: the left branch corresponds to the classical low-cycle and high-cycle fatigue modes, and the right branch describes the very-high-cycle fatigue regime. On this basis, a kinetic model was built, associated with the known criterion of multiaxial fatigue fracture SWT, which contains a mechanism associated with the development of normal opening microcracks. This kinetic model of damage development can be used to calculate various modes of fatigue failure from low-cycle to very-high-cycle fatigue. On the basis of this model, a numerical method of solving the evolutionary equation for the damage function has been developed. The fatigue fracture of the material in this model corresponds to the degradation of its elastic moduli due to an increase of the damage function. Calculations of the crack-like zones development for fatigue fracture in the titanium corset specimens at different stress ratio coefficients for cyclic loading, used in the tests on a piezoelectric machine, was fulfilled. To test the performance of the model, a comparison between the experimental and calculated fatigue curves in the region of the VHCF was carried out.

© PNRPU

### Введение

Проблема усталостного разрушения материалов стала активно изучаться во второй половине XIX в. Благодаря трудам А. Веллера было введено понятие «предел усталости» и разработаны инженерные требования, обеспечивающие безопасную эксплуатацию конструкции [1]. В конце 1980-х гг. японских исследователей заинтересовал вопрос о разрушении материалов под действием напряжений ниже «предела усталости». Испытания конструкционных сталей при долговечностях, значительно превышающих «классическую» базу, используемую при исследовании многоциклового усталости, показали, что даже при снижении амплитуды внешней нагрузки ниже «предела усталости» разрушение по-прежнему происходит, но требует большой циклической наработки [2]. Вскоре после установления факта разрушения материалов при циклических нагрузках ниже «предела усталости» аналогичные результаты были экспериментально подтверждены для высокопрочных сталей, чугуна, титановых и алюминиевых сплавов и ряда других металлических материалов [3–5]. На основании этих и многих других экспериментальных данных было показано существование новой области исследований – сверхмногоциклового усталости (СВМУ).

Особенностью сверхмногоциклового области является то, что, хотя материал подвержен нагрузкам, с макроскопической точки зрения лежащим в области

упругой деформации материала, разрушение наступает после нескольких сотен миллионов циклов. При этом часто наблюдается смена механизма зарождения усталостной трещины. Если в области многоциклового усталости зарождение усталостной трещины происходит на поверхности образца, то в случае сверхмногоциклового усталости очаг трещины формируется под его поверхностью [6]. Кривая усталости для стали в области СВМУ и характерная поверхность излома представлены на рис. 1, а, б соответственно.

Анализ существующих методик проведения усталостных исследований показывает неэффективность традиционных методов с использованием сервогидравлических и электромеханических машин при исследовании области СВМУ. Частота нагружения «классических» испытательных машин, как правило, ограничена значением порядка 100 Гц. Для сервогидравлических установок это значение еще ниже. Таким образом, для проведения одного эксперимента на одном образце при доведении базы испытаний до  $10^9$  циклов на «классических» установках потребуется от 115 дней (100 Гц) до почти года (35 Гц) непрерывных испытаний. При этом в случае увеличения базы до  $10^{10}$  циклов, один эксперимент будет длиться от 3 до 10 лет, такое исследование становится неоправданным. Поэтому для исследования области СВМУ в настоящее время используют специальные пьезоэлектрические испытательные комплексы, позволяющие проводить испытания при значительно более высоких частотах.

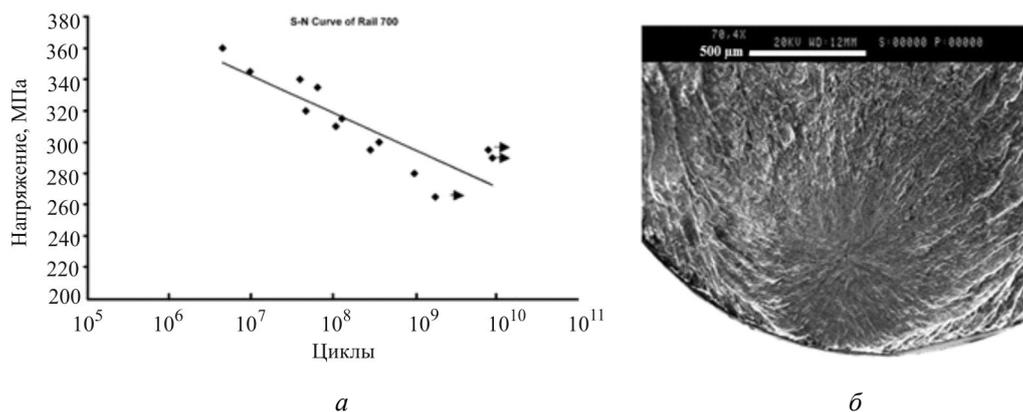


Рис. 1. Усталостная кривая для стали в области СВМУ (а) и характерная поверхность излома с подповерхностным зарождением трещины (б)

Fig. 1. Fatigue curve for steel in the area of VHCF (a) and a characteristic fracture surface with subsurface crack initiation (b)



Рис. 2. Схема и вид установки для усталостного тестирования

Fig. 2. Schematic and type of installation for fatigue testing

## 1. Экспериментальные исследования образцов из титанового сплава в области СВМУ

В данной работе исследуется усталостное поведение титанового деформируемого сплава ВТЗ-1, используемого для изготовления элементов газотурбинного двигателя. С целью получения основных усталостных характеристик были выбраны режимы «растяжение-сжатие» (коэффициент асимметрии  $R = -1$ ) и «растяжение-растяжение» ( $R = 0,1$ ) на цилиндрических образцах. Усталостная установка для проведения опытов на растяжение-сжатие цилиндрических образцов обладает следующими основными элементами: устройство управления и устройство нагружения, характерными для машин этого класса. Принципиальная схема установки приведена на рис. 2.

Установка состоит из силовой части и блока управления. К силовой части относится генератор высокой частоты (20 кГц), конвертер, который осуществляет преобразование электрического сигнала в механические вибрации той же частоты, волновод, предназначенный для увеличения амплитуды вибраций. Непосредственно к волноводу прикрепляется образец. Блок управления состоит из электронно-вычислительной машины и контроллера. На ЭВМ устанавливается специально разработанное программное обеспечение, выполненное на языке программирования Visual C++, позволяющее задавать и контролировать параметры высокочастотного нагружения. Программное обеспечение формирует управляющий сигнал для генератора высокой частоты.

Синусоидальный электрический сигнал с выходов генератора подается на вход пьезоэлектрического кон-

вертера. Конвертер преобразует электрический сигнал в механические вибрации той же частоты. Амплитуда вибраций рабочей части конвертора невелика. В зависимости от амплитуды подаваемого на вход напряжения она варьируется от 0,5 до 10 мк. С целью увеличения амплитуды вибраций применяются специально разработанные волноводы. Волноводы изготавливаются, как правило, из титановых сплавов, так как они обладают более высокой усталостной прочностью в сравнении с большинством исследуемых материалов и малым коэффициентом теплового расширения, что позволяет гарантировать постоянство частоты нагружения даже для опытов с повышенной температурой. В зависимости от формы волновода результирующие смещения могут достигать значений вплоть до 200 мк. Для различных видов испытаний (кручение, изгиб, растяжение-сжатие) применяются волноводы различных форм.

В зависимости от задач и типов проводимых исследований волноводы могут иметь различную геометрию, но общим требованием при проектировании каждого из них является сохранение резонансной частоты, в окрестности 20 кГц ( $\pm 0,5$  кГц). Связано это с тем, что основным принципом ультразвукового тестирования является использование резонансной частоты исследуемого образца в качестве частоты внешнего нагружения. Таким образом, увеличение частоты тестирования приводит к необходимости уменьшения линейных размеров образцов. Оценки показывают, что в случае прямого цилиндрического образца (без корсетного сужения рабочей части) при использовании частоты 92 кГц необходимо применять образцы длиной порядка 3 см, в то время как для проведения опытов с частотой 20 кГц линейные размеры могут достигать почти 13 см (в зависимости от материала). При использовании корсетных образцов необходимая резонансная длина оказывается меньше из-за увеличения жесткости элемента, что делает труднореализуемым применение высоких частот нагружения. С другой стороны, понижение частоты нагружения приводит к увеличению времени проведения исследования. Оптимальным решением является использование частоты 20 кГц, которая дает возможность существенно сократить затраты времени на проведение эксперимента и в то же время использовать образцы достаточно крупного размера. Таким образом, все силовые элементы – конвертер, волновод и образец – должны обладать одной резонансной частотой в окрестности 20 кГц.

Было построено аналитическое решение для резонансной длины цилиндрических образцов с корсетной рабочей частью [6]. В этом случае предполагается, что геометрия корсетной части описывается гиперболической функцией. Построение решения разбивается на две части – область постоянного сечения и рабочая область образца (корсетная часть). После получения аналитической оценки резонансной длины образца его геометрия дорабатывается с помощью пакетов программ, реализующих численный счет методом конечных элементов.

Таковыми программными продуктами могут быть ANSYS, ABAQUS и т.д. либо самостоятельно разработанные программы.

После построения геометрии создается конечно-элементная модель образца, которая затем используется для проведения модального анализа. После завершения модального анализа необходимо провести анализ полученных результатов. Из списка полученных собственных частот образца необходимо выбрать частоту, соответствующую первой моде продольных колебаний, максимально приближенной к значению 20 кГц. В случае незначительного отклонения собственной частоты продольных колебаний от 20 кГц геометрия образца принимается в исходном виде. В случае значительного отклонения необходимо провести оптимизацию геометрии образца. Программа автоматически производит подбор значений параметров геометрии, допускающих вариации, с целью получить частоту собственных продольных колебаний, максимально приближенную к 20 кГц. После проведения оптимизации разработчик выполняет построение новой модели и повторный модальный анализ.

Следующей стадией является исследование максимальных напряжений, действующих в образце при проведении эксперимента. Для этой цели используется модуль гармонического анализа. В установлении однозначной связи между величиной прикладываемых смещений и значением напряжений в центральной части и состоит сущность проведения калибровки образца. Как правило, эта зависимость является линейной.

Для проведения усталостных испытаний в режиме растяжение-сжатие титанового сплава ВТ3-1 были изготовлены три серии образцов, по 7 образцов в серии, с геометрией, представленной на рис. 3 и с коэффициентами асимметрии цикла  $R = -1$  и  $R = 0,1$ . Образцы на растяжение-растяжение обладают дополнительным отверстием с резьбой на втором конце образца.

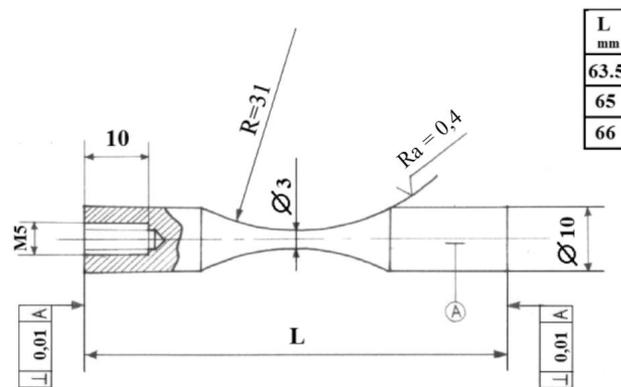


Рис. 3. Геометрия образцов для усталостных испытаний

Fig. 3. Geometry of fatigue test specimens

Все испытания были проведены с частотой нагружения, равной 20 кГц при нормальных условиях. Результаты исследований приведены на рис. 4 (белые кружки).

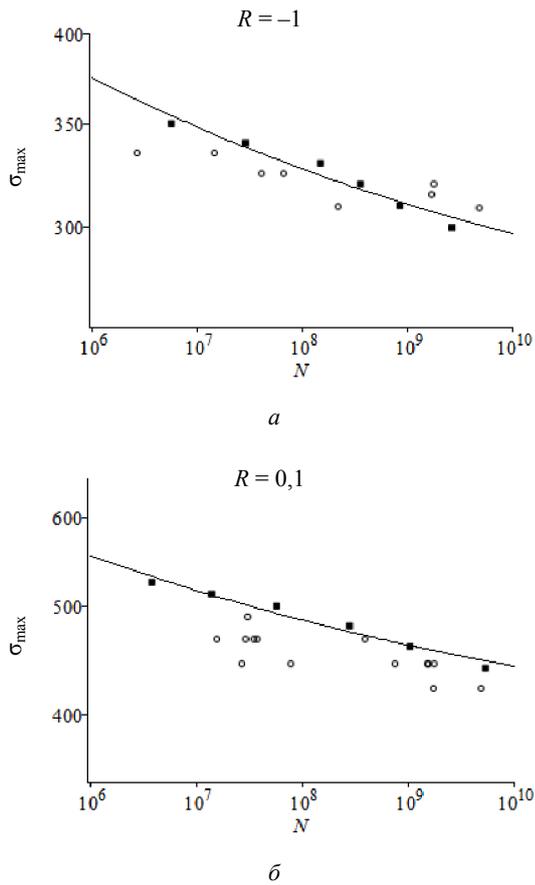


Рис. 4. Экспериментальные данные усталостных испытаний титанового сплава ВТ3-1 (белые кружки) и расчетные данные (черные квадраты): а – при  $R = -1$ ; б –  $R = 0,1$

Fig. 4. Experimental data of fatigue tests of titanium alloy VT3-1 (white circles) and calculated data (black squares): a at  $R = -1$ ; b –  $R = 0.1$

Предположительно в области долговечностей при переходе от многоциклового усталости к области сверхмногоциклового усталости материалу свойственно бифуркационное поведение, проявляющееся в возможности реализации различных механизмов разрушения материала при одном и том же уровне напряжений. Причиной такого поведения является процесс производства материала, допускающий образование в материале как физических, так и химических неоднородностей, которые наряду с естественным исчерпанием ресурса могут обуславливать зарождение трещины или, например, формирование критической плоскости в областях, не имеющих изначально существенных особенностей.

## 2. Кинетическое уравнение для повреждаемости

Основные способы построения моделей усталостного разрушения для случая многоосного циклического нагружения связаны с проведением испытаний образцов, обобщением закономерностей, установленных для одноосных нагружений и описываемых усталостными

$S-N$ -кривыми типа Веллера и соотношениями типа Баскина [7]. Большое количество критериев (stress-based criteria) основано на прямом обобщении  $S-N$ -кривых, построенных по результатам усталостных испытаний [8–15]. Обзоры по этой тематике даны в работах [16–18].

Для исследования процессов развития зон усталостных повреждений существует два подхода. Первый основан на классических представлениях механики разрушения и связывает условия развития усталостных трещин при увеличении числа циклов с амплитудами коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины. Основное уравнение было предложено Парисом [19], существует большое количество его модификаций [20, 21]. Пример расчета развития усталостной трещины в режиме СВМУ, основанный на этом подходе, приведен в [22].

Второй подход использует представления теории повреждаемости, восходящей к работам [23, 24] и развитой в [25, 26]. В приложении к задачам циклического нагружения и усталостного разрушения он применялся в [27, 28].

В [29] предложена мультирежимная модель развития усталостного разрушения, основанная на эволюционном уравнении для функции повреждаемости. Параметры модели определены для различных режимов усталостного разрушения – малоциклового и многоциклового усталости (МЦУ, МНЦУ), а также режима сверхмногоциклового усталости (СВМУ), соответствующего высокочастотному низкоамплитудному нагружению.

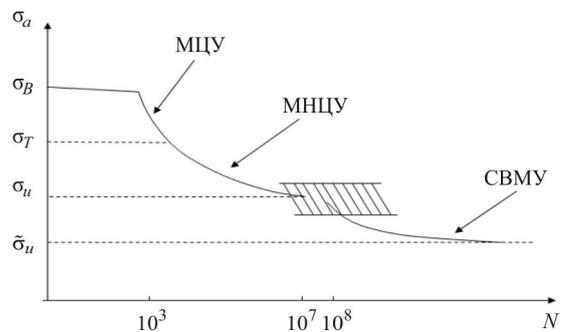


Рис. 5. Бимодальная усталостная кривая

Fig. 5. Bimodal fatigue curve

Для выделения различных режимов усталостного разрушения используется схема мультирежимной амплитудной усталостной кривой, представленная на рис. 5. Вплоть до значения  $N \sim 10^3$  реализуется режим повторно-статического нагружения с амплитудой, мало отличающейся от статического предела прочности  $\sigma_B$ . Далее левая часть бимодальной усталостной кривой (кривая Веллера) описывает режимы МЦУ-МНЦУ вплоть до  $N \sim 10^7$  и значений амплитуды порядка предела усталости  $\sigma_u$ . Затем начинается зона смены механизмов разрушения и дальнейшее падение усталостной прочности, начиная с величин  $N \sim 10^8$ , до нового предельного значения  $\tilde{\sigma}_u$  в соответствии с правой ветвью

бимодальной усталостной  $S-N$ -кривой. Эта ветвь описывает режим СВМУ [30].

Для того чтобы согласовать модель с известными критериями многоосного усталостного разрушения, был выбран основанный на напряженном состоянии (*stress-based*) критерий, который описывает усталостное разрушение, связанное с развитием микротрещин нормального отрыва. Это *stress-based* модифицированный критерий Smith-Watson-Topper (SWT) [31], в котором определяющую роль в развитии усталостных повреждений играют амплитуды максимальных растягивающих напряжений, описан в [32]. В исходном изложении этот и подобные ему *stress-based* критерии уже применялись для описания режимов МЦУ и МНЦУ. В [30] был предложен подход для обобщения многоосных критериев разрушения при описания правых ветвей усталостных кривых в режиме СВМУ, использующий опорные точки каждой из ветвей и обратную степенную зависимость от числа циклов  $N$  для выхода на асимптоту предела усталости.

### 2.1. Режим МЦУ-МНЦУ

Критерий многоосного усталостного разрушения в режиме МЦУ-МНЦУ с развитием микротрещин нормального отрыва (*stress-based SWT*), соответствующий левой ветви бимодальной усталостной кривой (рис. 5), имеет вид [32]

$$\sqrt{\langle \sigma_{\max} \rangle \Delta \sigma_1 / 2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_{LH}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_1$  – наибольшее главное напряжение;  $\Delta \sigma_1$  – размах наибольшего главного напряжения за цикл;  $\Delta \sigma_1 / 2$  – его амплитуда. Из условия повторно-статического разрушения вплоть до значений  $N \sim 10^3$  по методике [30] можно получить, что  $\sigma_L = 10^{3\beta_{LH}} (\sigma_B - \sigma_u)$ . В соответствии с выбранным критерием к разрушению приводят только растягивающие напряжения, поэтому в него входит величина  $\langle \sigma_{\max} \rangle = \sigma_{\max} H(\sigma_{\max})$ . В этих формулах  $\sigma_B$  – статический предел прочности материала,  $\sigma_u$  – классический предел усталости материала при реверсивном цикле (коэффициент асимметрии цикла  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = -1$ ),  $\beta_{LH}$  – степенной показатель левой ветви бимодальной усталостной кривой,  $H()$  – функция Хевисайда.

Для описания процесса развития усталостной поврежденности в режиме МЦУ-МНЦУ вводится функция повреждаемости  $0 \leq \psi(N) \leq 1$ , которая описывает процесс постепенного циклического (усталостного) разрушения материала [29]. При  $\psi = 1$  материальная частица считается полностью разрушенной. Ее модули Ламе становятся равными нулю. Функция повреждаемости  $\psi$  в зависимости от числа циклов нагружения  $N$  для режима МЦУ-МНЦУ описывается кинетическим уравнением:

$$d\psi/dN = B_{LH} \psi^\gamma / (1 - \psi^\alpha), \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $0 < \gamma < 1$  – параметры модели, определяющие скорость процесса развития усталостных повреждений.

Формула для коэффициента  $B_{LH}$  выведена в [29]:

$$B_{LH} = 10^{-3} \left[ \langle \sigma_{LH} - \sigma_u \rangle / (\sigma_B - \sigma_u) \right]^{1/\beta_{LH}} \alpha / (1 + \alpha - \gamma) / (1 - \gamma), \quad (3)$$

$$\sigma_{LH} = \sqrt{\langle \sigma_{\max} \rangle \Delta \sigma_1 / 2},$$

где величина  $\sigma_{LH}$  определяется выбранным механизмом усталостного разрушения и соответствующим многоосным критерием.

### 2.2. Режим СВМУ

Критерий многоосного усталостного разрушения в режиме СВМУ, соответствующий правой ветви бимодальной усталостной кривой на рис. 5 (обобщенный *stress-based SWT*), имеет вид

$$\sqrt{\langle \sigma_{\max} \rangle \Delta \sigma_1 / 2} = \tilde{\sigma}_u + \sigma_v N^{-\beta_{vH}}, \quad (4)$$

где из условия подобия опорных точек для левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой [30] можно получить формулу  $\sigma_v = 10^{8\beta_{vH}} (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)$ .

Здесь  $\tilde{\sigma}_u$  – «новый» предел усталости материала при реверсивном цикле для режима СВМУ,  $\beta_{vH}$  – степенной показатель правой ветви бимодальной усталостной кривой.

Для режима СВМУ выражение для коэффициента  $B_{vH}$  в уравнении для повреждаемости [29]:

$$B_{vH} = 10^{-8} \left[ \langle \sigma_{vH} - \tilde{\sigma}_u \rangle / (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u) \right]^{1/\beta_{vH}} \alpha / (1 + \alpha - \gamma) / (1 - \gamma), \quad (5)$$

$$\sigma_{vH} = \sqrt{\langle \sigma_{\max} \rangle \Delta \sigma_1 / 2},$$

где величина  $\sigma_{vH}$  определяется выбранным механизмом усталостного разрушения и соответствующим ему многоосным критерием.

Поведение поврежденного материала описывается уравнениями деградации его модулей упругости  $\lambda(\psi) = \lambda_0(1 - \psi)$ ,  $\mu(\psi) = \mu_0(1 - \psi)$ . Материал становится полностью разрушенным, его модули упругости обнуляются при достижении функции повреждаемости  $\psi(N)$  значения 1.

Уточненные оценки с учетом сращивания ветвей бимодальной усталостной кривой дают окончательные формулы для диапазонов и коэффициентов кинетических уравнений повреждаемости [29].

Для режима МЦУ-МНЦУ при  $\sigma_u + \Delta \sigma_u < \sigma_{LH} < \sigma_B$ ,  $\Delta \sigma = 10^{-5\beta_{LH}} (\sigma_B - \sigma_u)$  получим

$$B_{LH} = 10^{-3} \left[ \langle \sigma_{LH} - \sigma_u \rangle / (\sigma_B - \sigma_u) \right]^{1/\beta_{LH}} \alpha / (1 + \alpha - \gamma) / (1 - \gamma),$$

$$\sigma_{LH} = \sqrt{\langle \sigma_{\max} \rangle \Delta \sigma_1 / 2}.$$

Для режима СВМУ при  $\tilde{\sigma}_u < \sigma_{vH} \leq \sigma_u + \Delta\sigma_u$  получим

$$B_{vH} = 10^{-8} \left[ \langle \sigma_{vH} - \tilde{\sigma}_u \rangle / (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u) \right]^{1/\beta_{vH}} \alpha / (1 + \alpha - \gamma) / (1 - \gamma),$$

$$\sigma_{vH} = \sigma_{LH} = \sqrt{\langle \sigma_{\max} \rangle \Delta\sigma_1 / 2}.$$

При  $\sigma_{vH} \leq \tilde{\sigma}_u$  усталостного разрушения не происходит, при  $\sigma_{LH} \geq \sigma_B$  оно наступает мгновенно.

### 3. Алгоритм расчета развития усталостных повреждений и результаты расчетов

Численная процедура решения дифференциального уравнения для функции повреждаемости состоит из следующих этапов. На первом этапе рассчитывается напряженное состояние упругого образца материала в одном цикле нагружения.

Для расчета цикла нагружения деформируемого образца с дефектами были использован программный пакет ANSYS, дополненный кодом для расчета уравнения усталостной повреждаемости и изменения модулей упругости.

Для интегрирования уравнения  $d\psi/dN = B\psi^\gamma / (1 - \psi^\alpha)$ ,  $B = B_{LH}, B_{vH}$  применялась аппроксимация функции повреждаемости в  $k$ -узле расчетной сетки при заданных дискретных значениях  $\psi_k^n$  в моменты  $N^n$  и искомым  $\psi_k^{n+1}$  в моменты  $N^{n+1}$ .

Метод расчета повреждаемости построен на аналитическом интегрировании кинетического уравнения для повреждаемости на приращении числа циклов, возможным для значения  $\alpha = 1 - \gamma$ . Кинетическое уравнение при этом становится однопараметрическим, но сохраняет желаемые особенности поведения скорости роста повреждаемости (заданный параметром  $\gamma$  степенной рост при выходе из 0 и бесконечный рост при  $\psi \rightarrow 1$ ).

Формула для значения повреждаемости на  $(n+1)$ -м слое на приращении числа циклов  $\Delta N^n$ :

$$\psi_k^{n+1} = \left( 1 - \sqrt{1 - \left[ 2(1 - \gamma)B\Delta N^n + (\psi_k^n)^{1-\gamma} - 2(\psi_k^n)^{2(1-\gamma)} \right]} \right)^{1/(1-\gamma)}. \quad (6)$$

Значение приращения  $\Delta N^n$  определяется следующим образом:

$$\Delta N^n = \begin{cases} \min_k \left( \frac{\Delta\psi_0 \cdot (1 - \psi_k^n)^{1-\gamma}}{B \cdot (\psi_k^n)^\gamma} \right) & \text{при } \psi_k^n > 0, \\ \min_k \left( \frac{\Delta\psi_0^{1-\gamma}}{B} \right) & \text{при } \psi_k^n = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Величина шага ограничена заданным максимумом  $\Delta N_{\max}$ . В расчетах используются значения  $\Delta\psi_0 = 0,1$ ,  $\Delta N_{\max} = 10^5$ . Для каждого узла, исходя из его текущего уровня повреждаемости и эквивалентного напряжения,

находится новый уровень повреждаемости с учетом вычисленного приращения  $\Delta N^n$ .

Деградация поврежденного материала при численных расчетах определялась зависимостью  $E_k^{n+1} = E_0(1 - \psi_k^{n+1})(H(\psi_0 - \psi_k^{n+1}) + 0,001)$ , где  $E_k^{n+1}$  – значение модуля Юнга на  $(n+1)$ -м шаге по циклам нагружения при фиксированном значении коэффициента Пуассона,  $H$  – функция Хэвисайда, а  $\psi_0 \sim 1$  – критический параметр повреждаемости, по достижении которого материал переходит в полностью разрушенное состояние с околонулевыми модулями упругости. При расчетах выбиралось  $\psi_0 = 0,95$  и малое значение остаточного модуля Юнга ( $10^{-8} E_0$ ) для полностью разрушенного материала. Расчет заканчивается при выходе границ области полностью разрушенного материала на поверхность образца (макроразрушение) или прекращении эволюции этой области.

Описанную модель и численный метод можно считать развитием ранее разработанных алгоритмов сквозного счета процессов динамического разрушения [33, 34] на случай циклического нагружения и усталости материалов.

Были проведены расчеты циклического нагружения корсетных титановых образцов для коэффициентов асимметрии  $R = -1$  (реверсивный цикл) и  $R = 0,1$  с зарождением зон поврежденности, возникновения и развития трещиноподобных зон полного разрушения частиц материала («квазитрещин») вплоть до их выхода на боковую поверхность образца (макроразрушения).

Упругие, прочностные и усталостные свойства материала образца (титановый сплав):  $\sigma_B = 1130$  МПа,  $\sigma_u = 330$  МПа,  $\tilde{\sigma}_u = 275$  МПа,  $\beta_{vH} = 0,27$ . Модули упругости неповрежденного сплава:  $\lambda_0 = 77$  ГПа,  $\mu_0 = 44$  ГПа.

Степенной показатель кинетического уравнения  $\gamma$  должен быть определен в процессе согласования результатов вычислительных и усталостных экспериментов. Для численных расчетов в уравнении для повреждаемости было принято среднее значение  $\gamma = 0,5$ ,  $\alpha = 1 - \gamma$ . Размеры корсетного цилиндрического образца приведены на рис. 3.

На рис. 4 представлены сравнительные результаты усталостных испытаний титанового сплава ВТ3-1 в режиме СВМУ (белые кружки) и расчетные данные (черные квадраты). Можно наблюдать удовлетворительное описание правой ветви бимодальной усталостной кривой с помощью используемой кинетической модели.

На рис. 6, 7 показаны изолинии эффективного напряжения на фоне развивающейся локализованной зоны поврежденности (квазитрещины, серым цветом) для двух состояний: квазитрещина достигла расстояния полурадуса (см. рис. 6) и боковой поверхности образца (макроразрушение, см. рис. 7).

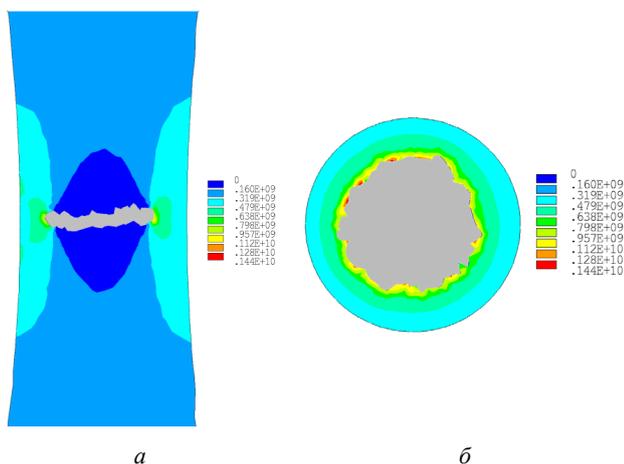


Рис. 6. Изолинии эффективного напряжения на фоне квазитрещины: *a* – вид сбоку; *б* – вид сверху.  $N = 1,1 \cdot 10^7$ . Циклов от зарождения  $1,1 \cdot 10^3$

Fig. 6. Isolines of effective stress against the background of a quasi-crack: *a* – the side view; *b* – the top view.  $N = 1,1 \cdot 10^7$ . Cycles from inception  $1,1 \cdot 10^3$

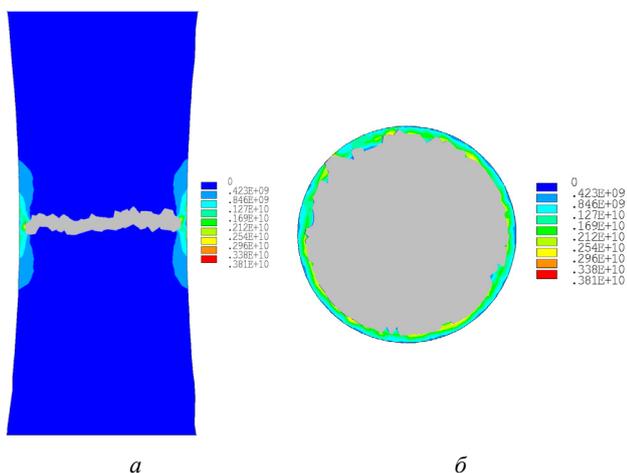


Рис. 7. Изолинии эффективного напряжения на фоне квазитрещины: *a* – вид сбоку; *б* – вид сверху.  $N = 1,1 \cdot 10^3$ . Трещина вышла на поверхность. Циклов от зарождения  $3,7 \cdot 10^3$

Fig. 7. Isolines of effective stress against the background of a quasi-crack: *a* – the side view; *b* – the top view.  $N = 1,1 \cdot 10^3$ . The crack has come to the surface. Cycles from inception  $3,7 \cdot 10^3$

Отметим, что количество циклов, соответствующее уровню продвижения трещиноподобных зон разрушения частиц материала («квазитрещин») примерно до середины радиуса образца (см. рис. 5), очень мало от-

### Библиографический список

1. Wohler A. Uber die festigkeits-versuchemiteisen und stahl. Zeitschrift fur Bauwesen, XX:73, 1870 – P. 106.
2. Naito T., Ueda H., Kikuchi M. Fatigue behavior of carburized steel with internal oxides and nonmartensitic microstructure near the surface // Metallurgical Transaction. – 1984. – Vol. 15A. – P. 1431–143.
3. Marines I., Bin X., Bathias C. An understanding of very high cycle fatigue of metals // Int. J. of Fatigue. – 2003. – Vol. 25(9–11). – P. 1101–1107.

личается от количества циклов до макроразрушения (см. рис. 6), что указывает на финальный, быстропротекающий процесс макроразрушения.

Разработанная мультирежимная модель и численный метод позволяют проводить сквозной счет развития зон повреждаемости и трещиноподобных зон усталостного разрушения материала без явного выделения трещин в их классическом понимании, а также оценивать долговечность образцов от появления первых очагов до макроразрушения.

### Заключение

В работе дано описание схемы и устройства пьезоэлектрической усталостной установки для проведения опытов на растяжение-сжатие цилиндрических образцов в области сверхмногоциклового усталости. Проведены усталостные СВМУ эксперименты с коэффициентом асимметрии цикла  $R = -1$  и  $R = 0,1$  на гладких корсетных образцах из титанового сплава ВТ3-1.

Предложена мультирежимная кинетическая модель развития повреждаемости при циклическом нагружении для описания развития процесса усталостного разрушения. Для определения коэффициентов кинетического уравнения повреждаемости использован известный критерий многоосного усталостного разрушения SWT, в котором заложен механизм, связанный с развитием микротрещин нормального отрыва. Разработан численный метод и приведены примеры расчета развития трещиноподобных зон повреждаемости и усталостного разрушения корсетных титановых образцов, использованных при испытаниях на пьезоэлектрической установке. Для проверки работоспособности модели проведено сравнение экспериментальных и расчетных усталостных кривых в области СВМУ.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках Государственного задания ИАП РАН.

### Acknowledgements

The work is realized in the framework of the State contract of ICAD RAS.

4. Bathias C., Drouillac L., Le Francois P. How and why the fatigue S-N curve does not approach a horizontal asymptote // Int. J. of Fatigue. – 2001. – Vol. 23. – P. 143–151.
5. Bathias C. There is no infinite fatigue life in metallic materials // FFEMS. – 1999. – Vol. 22. – P. 559–565.
6. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. – New York: Dekker, 2005. – 328 p.
7. Basquin O.H. The exponential law of endurance tests // Proc of the American society for testing and material. – 1910. – Vol. 10. – P. 625–630.

8. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses // *Metal fatigue*. McGraw-Hill. – 1959. – P. 145–169.
9. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*. – London, 1959. – P. 138–149.
10. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // *J. of Eng. for Indust.* – 1959. – P. 301–306.
11. Morel F. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading // *Int. J. of Fatigue*. – 2000. – Vol. 22(2). – P. 101–119.
12. Matake T. An explanation on fatigue limit under combined stress // *Bull JSME*. – 1977. – Vol. 20. – P. 257–263.
13. McDiarmid D.L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 1999. – Vol. 17. – pp. 1475–1484.
14. Papadopoulos I.V. Long life fatigue under multiaxial loading // *International Journal of Fatigue*. – 2001. – Vol. 23. – P. 839–849.
15. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // *International Journal of Fatigue*. – 2011. – Vol. 33. – P. 969–976.
16. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading // *Proceedings of 19th Int. Congress of Mech. Eng.* – Brasilia, DF, 2011.
17. Karolczuk A., Papuga J., Palin-Luc T. Progress in fatigue life calculation by implementing life-dependent material parameters in multiaxial fatigue criteria // *International Journal of Fatigue*. – 2020. – Vol. 134. – 105509.
18. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46(6). – P. 828–838.
19. Paris P.C., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws // *Journal of Basic Engineering*. – 1963. – Vol. 85. – P. 528–533.
20. Collins J.A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. – New York: Wiley, 1993. – 654 p.
21. Shlyannikov V.N. Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 214. – P. 449–463.
22. Nikitin A.D., Nikitin I.S., Stratula B.A. The modeling of the edge fatigue crack growth under high frequency loading // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2019. – Vol. 3. – P. 65–74.
23. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР ОТН*. – 1958. – № 8. – С. 26–31.
24. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций // *АН СССР ОТН*. – 1958. – С. 5–7.
25. Murakami S. *Continuum Damage Mechanics. A continuum mechanics approach to the analysis of damage and fracture*. – Dordrecht: Springer, 2012. – 402 p.
26. Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. – Cambridge University Press, 1994. – 582 p.
27. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // *Int. J. of Fatigue*. – 2009. – Vol. 31. – P. 2031–2040.
28. The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacycle fatigue regime / O. Plekhov, O. Naimark [et al.] // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2016. – Vol. 10(35). – P. 414–423.
29. Мультирежимная модель развития усталостных повреждений / И.С. Никитин, Н.Г. Бурого, А.Б. Журавлев, А.Д. Никитин // *Прикладная математика и механика*. – 2020. – № 84(5). – С. 687–698.
30. Burago N.G., Nikitin I.S. Multiaxial fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and giga-cycle fatigue modes // Heidelberg. Springer. *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures*. – 2016. – P. 117–130.
31. Smith R.N., Watson P., Topper T.H. A stress-strain parameter for the fatigue of metals // *J. of Materials*. – 1970. – Vol. 5(4). – P. 767–778.
32. Gates N., Fatemi A. Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // *Int. J. of Fatigue*. – 2016. – Vol. 91. – P. 337–351.
33. Algorithms for calculation damage processes / N.G. Burago, I.S. Nikitin, A.D. Nikitin, B.A. Stratula // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2019. – Vol. 49. – P. 212–224.
34. Burago N.G., Nikitin I.S. Algorithms of through calculation for damage processes // *Computer Research and Modeling*. – 2018. – Vol. 10(5). – P. 645–666.

## References

1. Wohler A. Über die festigkeits-versuchemiteisen und stahl. *Zeitschrift für Bauwesen*, XX:73, 1870 – P. 106.
2. T. Naito, H. Ueda, M. Kikuchi. Fatigue behavior of carburized steel with internal oxides and nonmartensitic microstructure near the surface // *Metallurgical Transaction*. – 1984. – Vol. 15A. – pp. 1431–143.
3. I. Marines, X. Bin, C. Bathias. An understanding of very high cycle fatigue of metals // *Int. J. of Fatigue*. – 2003. – Vol. 25(9-11). – pp. 1101–1107.
4. C. Bathias, L. Drouillac, P. Le Francois. How and why the fatigue S-N curve does not approach a horizontal asymptote // *Int. J. of Fatigue*. – 2001. – Vol. 23. – pp. 143–151.
5. C. Bathias. There is no infinite fatigue life in metallic materials // *FFEMS*. – 1999. – Vol. 22. – pp. 559–565.
6. *Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice* / C. Bathias, P.C. Paris – New York: Dekker, 2005. – 328 p.
7. Basquin O.H. The exponential law of endurance tests // *Proc of the American society for testing and material*. – 1910. – Vol. 10. – pp. 625–630.
8. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses // *Metal fatigue*. McGraw-Hill. – 1959. – pp. 145–169.
9. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*. – London, 1959. – pp. 138–149.
10. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // *J. of Eng. for Indust.* – 1959. – pp. 301–306.
11. Morel F. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading // *Int. J. of Fatigue*. – 2000. – Vol. 22(2). – pp. 101–119.
12. Matake T. An explanation on fatigue limit under combined stress // *Bull JSME*. – 1977. – Vol. 20. – pp. 257–263.
13. McDiarmid D.L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 1999. – Vol. 17. – pp. 1475–1484.
14. Papadopoulos I.V. Long life fatigue under multiaxial loading // *International Journal of Fatigue*. – 2001. – Vol. 23. – pp. 839–849.
15. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // *International Journal of Fatigue*. – 2011. – Vol. 33. – pp. 969–976.

16. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading // Proceedings of 19th Int. Congress of Mech. Eng. – Brasilia, DF, 2011.
17. Karolczuk A., Papuga J., Palin-Luc T. Progress in fatigue life calculation by implementing life-dependent material parameters in multiaxial fatigue criteria // International Journal of Fatigue. – 2020. – Vol. 134. – 105509.
18. Bourago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46(6). – pp. 828-838.
19. Paris P.C. and Erdogan F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws // Journal of Basic Engineering. – 1963. – Vol. 85. – pp. 528-533.
20. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention / Collins J.A. – New York: Wiley, 1993. – 654 p.
21. Shlyannikov V.N. Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models // Engineering Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 214. – pp. 449-463.
22. Nikitin A.D., Nikitin I.S., Stratula B.A. The modeling of the edge fatigue crack growth under high frequency loading // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – Vol. 3. – pp. 65-74.
23. Kachanov L.M. O vremeni razrusheniya v usloviyah polzuchesty // Izv. AN SSSR OTN. – 1958. – Vol. 8. – pp. 26-31.
24. Rabotnov J. N. O mechanism dlitel'nogo razrusheniya. Voprosi prochnost imaterialov i konstrukcij [On the time of destruction under creep conditions] // AN SSSR OTN. – 1958. – pp. 5-7.
25. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture / Murakami S. – Dordrecht: Springer, 2012. – 402 p.
26. Mechanics of solid materials / Lemaitre J., Chaboche J.L. – Cambridge University Press, 1994. – 582 p.
27. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. of fatigue. – 2009. – Vol. 31. – pp. 2031–2040.
28. Plekhov O., Naimark O. [et al.] The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacycle fatigue regime // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2016. – Vol. 10(35). – pp. 414-423.
29. Nikitin I.S., Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin A.D. Mul'tirezhimnaya model' razvitija ustalostnyh povrezhdenij [Multi-mode model for fatigue damage development] // Prikladnaya matematika i mehanika. – 2020. – Vol. 84(5). – pp. 687–698.
30. Burago N.G., Nikitin I.S. Multiaxial Fatigue Criteria and Durability of Titanium Compressor Disks in low- and gigacycle Fatigue Modes // Heidelberg. Springer. Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. – 2016. – pp. 117-130.
31. Smith R.N., Watson P., Topper T.H. A stress-strain parameter for the fatigue of metals // J. of Materials. – 1970. – Vol. 5(4). – pp. 767-778.
32. Gates N., Fatemi A. Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // Int. J. of fatigue. – 2016. – Vol. 91. – pp. 337–351.
33. Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Algorithms for calculation damage processes // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2019. – Vol. 49. – pp. 212-224.
34. Burago N.G., Nikitin I.S. Algorithms of through calculation for damage processes // Computer Research and Modeling. – 2018. – Vol. 10(5). – pp. 645-666.