

Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Холмогоров С.А. О специфике работы композитного несущего слоя трехслойной пластины при локальном нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 152–164. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.13

Paimushin V.N., Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Kholmogorov S.A. On the specifics of behavior of the sandwich plate composite facing layers under local loading. PNRPU Mechanics Bulletin, 2020, no. 4, pp. 152-164. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.13



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.13

УДК 539.3

О СПЕЦИФИКЕ РАБОТЫ КОМПОЗИТНОГО НЕСУЩЕГО СЛОЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Н. Паймушин^{1,2}, Р.А. Каюмов^{1,3}, Ф.Р. Шакирзянов^{1,3}, С.А. Холмогоров¹

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань, Россия

²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

³Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 21 сентября 2020 г.
Принята: 20 ноября 2020 г.
Опубликована: 30 декабря 2020 г.

Ключевые слова:

потеря устойчивости, геометрическая нелинейность, композит, физическая нелинейность, прочность.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о четырехточечном изгибе трехслойных пластин с внешними слоями из волокнистого композиционного материала, приводятся результаты численных и экспериментальных исследований. Показано, что в окрестности нагружающего ролика, осуществляющего локальное воздействие на внешний слой, наблюдается сильное уменьшение секущего модуля поперечного сдвига материала при увеличении деформаций поперечных сдвигов. Численное решение задачи об изгибе пластины проводится в физически и геометрически нелинейной постановке с использованием различных соотношений метода конечных элементов, двух вариантов геометрически нелинейных кинематических соотношений уравнений теории упругости и разных вариантов параметра процесса нагружения. Наряду с классическими нелинейными соотношениями, решения задачи построены и на основе непротиворечивых соотношений между деформациями и перемещениями, использование которых при решении некоторых задач позволяет избежать появления ложных бифуркационных решений. Приводятся результаты численных расчетов, полученных разными методами и с использованием разных соотношений, анализ которых показал их малое отличие. Выявлено, что потеря устойчивости внешних слоев трехслойной пластины происходит по неклассической поперечно-сдвиговой форме.

Для определения предельной нагрузки, при достижении которой происходит потеря прочности несущего нагруженного слоя, использован критерий Цая-Ву. Проведен сравнительный анализ поведения внешних слоев пластины при различных ее толщинах и различных диаметрах нагружающего ролика. Показано, что диаметр ролика практически не влияет на величину предельной нагрузки, в то время как нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости несущего слоя, весьма чувствительна к изменению его величины.

© ПНИПУ

© Паймушин Виталий Николаевич – д.ф.-м.н., проф., г.н.с., e-mail: vpajmushin@mail.ru, [ID: 0000-0003-4070-2579](https://orcid.org/0000-0003-4070-2579)

Каюмов Рашит Абдулхакович – д.ф.-м.н., проф., e-mail: kayumov@rambler.ru; ведущий научный сотрудник, КНИТУ-КАИ

им. А.Н. Туполева, [ID: 0000-0003-0711-9429](https://orcid.org/0000-0003-0711-9429)

Шакирзянов Фарид Рашитович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: faritbox@mail.ru; старший научный сотрудник, КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева,

[ID: 0000-0002-6514-8335](https://orcid.org/0000-0002-6514-8335)

Холмогоров Сергей Андреевич – к.ф.-м.н., доц., e-mail: hkazan@yandex.ru, [ID: 0000-0002-9942-6786](https://orcid.org/0000-0002-9942-6786)

Vitaly N. Paimushin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher, e-mail: vpajmushin@mail.ru, [ID: 0000-0003-4070-2579](https://orcid.org/0000-0003-4070-2579)

Rashit A. Kayumov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher, e-mail: kayumov@rambler.ru,

[ID: 0000-0003-0711-9429](https://orcid.org/0000-0003-0711-9429)

Farid R. Shakirzyanov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: faritbox@mail.ru,

[ID: 0000-0002-6514-8335](https://orcid.org/0000-0002-6514-8335)

Sergey A. Kholmogorov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: hkazan@yandex.ru,

[ID: 0000-0002-9942-6786](https://orcid.org/0000-0002-9942-6786)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ON THE SPECIFICS OF BEHAVIOR OF THE SANDWICH PLATE COMPOSITE FACING LAYERS UNDER LOCAL LOADING

V.N. Paimushin^{1,2}, R.A. Kayumov^{1,3}, F.R. Shakirzyanov^{1,3}, S.A. Kholmogorov¹

¹Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev, Kazan, Russian Federation

²Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation

³ Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 21 September 2020

Accepted: 20 November 2020

Published: 30 December 2020

Keywords:

stability loss, geometrically
nonlinearity, fiber reinforced plastic,
physically nonlinearity, strength.

ABSTRACT

The problem of a four-point bending of sandwich plates with external layers of a fiber reinforced plastic is considered, the results of numerical and experimental studies are presented. It is shown that in the vicinity of the loading roller, which exerts a local effect on the external layer, there is a strong decrease in the transverse shear secant modulus of fiber reinforced plastic with an increase in the transverse shear strains. The numerical solution of the problem of the plate bending is carried out in a physically and geometrically nonlinear formulation using various relations of the finite element method, two variants of geometrically nonlinear kinematic relations of the equations of the elasticity theory and different variants of the loading process parameter. Along with the classical nonlinear relations, the problem solutions are also constructed on the basis of consistent relations between strains and displacements, the use of which allows one to avoid the appearance occurrence of false bifurcation points. The results of the numerical calculations obtained with different methods and use of different ratios are presented, the analysis of which showed their small difference. It was revealed that the stability loss and failure of the external layers of a sandwich plate occurs due to the stability loss in the nonclassical transverse-shear mode.

To determine the ultimate load, which is accompanied with a loss of strength of the external loaded layer, the Tsai-Wu criterion was used. A comparative analysis of the behavior of the plate external layers at different thicknesses and different diameters of the loading roller is carried out. It is shown that the ultimate load is practically not affected by the roller diameter, while the load at which the external layer loses its stability, is very sensitive to a change in its value.

© PNRPU

Введение

Трехслойные элементы в виде стержней, пластин и оболочек имеют широкое применение в качестве конструктивных элементов в изделиях судостроительной и аэрокосмической отраслей. Как правило, такие элементы состоят из двух жестких несущих слоев, воспринимающих тангенциальные напряжения, и относительно маложесткого заполнителя, воспринимающего напряжения поперечного обжатия и поперечные касательные напряжения. Выбор материалов для несущих слоев и заполнителя зависит от специфики работы трехслойных конструкций. В изделиях аэрокосмической техники, как правило, применяется сотовый заполнитель на основе легких алюминиевых сплавов или полимерной бумаги. Такие заполнители обладают наиболее высокими удельными жесткостными и прочностными характеристиками при малом удельном весе. В трехслойных конструкциях, применяющихся в кораблестроении, используется пористый металлический заполнитель. От таких заполнителей требуется высокая удельная ударная вязкость и высокая способность поглощать энергию удара. В качестве материалов для несущих слоев используются как металлы, так и композитные материалы на основе стекло- и углепластиков.

Разрушение трехслойных конструкций может быть обусловлено реализацией разных процессов деформи-

рования их составных элементов в процессе их нагружения [1–4]: разрушение заполнителя по причине достижения предельных значений формирующимися в них поперечными касательными напряжениями [5, 6], усталостные разрушения заполнителя [7, 8]; отслоение несущих слоев от заполнителя [9, 10]; достижение предельных значений поперечными напряжениями обжатия в заполнителе [11]; потеря устойчивости несущих слоев по тем или иным формам [12, 13] или потеря их прочности. Из работ, посвященных действию локализованных нагрузок на пластины и оболочки, можно выделить монографию [14], в которой систематизирован обширный материал по концентрации напряжений от действия сосредоточенных нагрузок в тонкостенных конструкциях.

При определении механических характеристик волокнистых композиционных материалов (ВКМ) применяются различные экспериментальные методы, для которых создано немало различных стандартов, зависящих от типа композитного материала (КМ). В отличие от металлических конструкционных материалов, для композитных материалов при этом требуется гораздо большее количество испытаний. Кроме того, как показывает анализ результатов экспериментальных исследований, в отличие от традиционных изотропных материалов, ВКМ проявляют специфические свойства при испытаниях на различные виды нагружения [15–17].

Поэтому при проектировании изделий из КМ коэффициенты запаса прочности принимаются значительно большими, чем в случае использования традиционных материалов. Одной из таких специфических особенностей поведения армированных КМ является потеря устойчивости фаз композита. В работах [18–21] установлено, что даже при простом сжатии стержня (волокна) может реализоваться одна из двух форм потери устойчивости: по неклассической поперечно-сдвиговой и классической изгибно-сдвиговой форме. Задача оценки устойчивости фаз композита усложняется тем, что эти фазы испытывают сложное напряженное состояние, причем вблизи закреплений и нагружающих элементов возникают сильные градиенты параметров напряженно-деформированного состояния (НДС).

При анализе устойчивости фаз КМ важным является учет нелинейных свойств композита. Имеется много работ (см. например, в [22–29]), посвященных исследованиям процесса потери устойчивости конструкций при учете неупругих свойств композита. В них показано, что в ряде случаев потеря устойчивости может быть вызвана перераспределением напряжений, изменением геометрии тела и направления силового воздействия по причине наличия ползучести. При этом время потери устойчивости можно оценить обычным образом, анализируя возможность существования неединственного поля перемещений (бифуркации), принимая в этот момент упругий закон деформирования (ввиду практически мгновенной перестройки этого поля перемещений). В других случаях неустойчивость конструкций проявляется в том, что через некоторое время скорость деформации катастрофически быстро увеличивается. Таким образом, эти задачи становятся, с одной стороны, физически и геометрически нелинейными, а с другой – зависящими от времени. Однако для простоты нередко особенности поведения материала, обусловленные реологическими его свойствами, описываются моделями нелинейно-упругого деформирования.

Различные виды потери устойчивости фаз композиционного материала являются факторами, приводящими или к мгновенным разрушениям, или к процессам приспособления, или к прогрессирующему накоплению микрповреждений и окончательному разрушению ВКМ, например, при циклических нагрузках [15–17].

В данной работе исследуется поведение трехслойной пластины с учетом возможной потери устойчивости или прочности внешних слоев на основе использования физически и геометрически нелинейных соотношений механики деформируемого твердого тела. Также считается, что для проведения качественного анализа поведения рассматриваемых конструкций можно вместо реологических соотношений использовать зависимости, описывающие нелинейно-упругое поведение материала внешних слоев как нелинейно-упругое тело.

1. Постановка задачи

Основной целью работы является выявление механизма (причины) разрушения трехслойного тест-образца (пластины) при испытании на четырехточечный изгиб (рис. 1). Верхние и нижние несущие слои представляют собой ВКМ, армированные в направлении длинной стороны образца, внутренний слой является трансверсально-мягким наполнителем. Пластина опирается на верхние ролики, а через нижние ролики к ней прикладывается суммарная нагрузка $2P$. Поскольку исследуются причины разрушения таких пластин, то в первом приближении можно заменить задачу деформирования с учетом деформаций ползучести на нелинейно-упругую задачу.

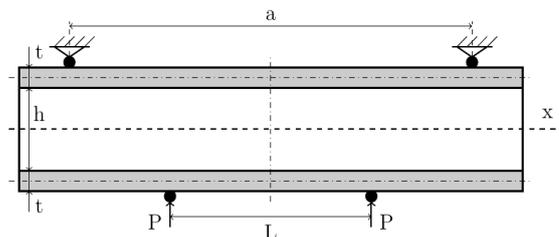


Рис. 1. Схема нагружения трехслойного тест-образца на четырехточечный изгиб

Fig. 1. Loading diagram of the sandwich specimen under four-point bending

Зависимость между модулем сдвига и углом поперечного сдвига в несущих слоях закладывалась в виде физической нелинейности с учетом приведенной ниже диаграммы (рис. 2). Она была получена из экспериментов [17] на растяжение образцов с углами укладки волокон $\pm 45^\circ$.

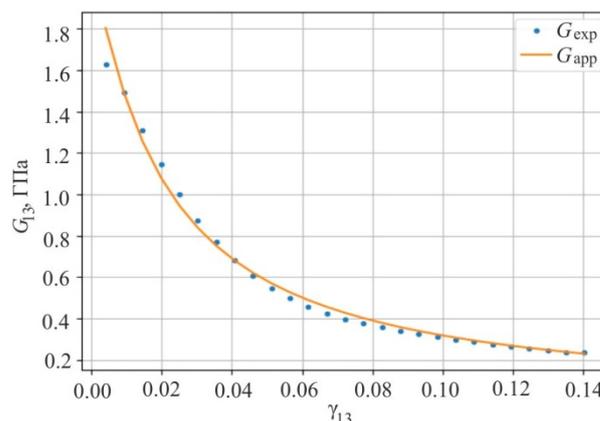


Рис. 2. Экспериментальная зависимость секущего модуля

$$G_{xz}^s = G_{xz}^s(\gamma_{xz}) \text{ от деформаций сдвига}$$

Fig. 2. Experimental dependence of the secant modulus

$$G_{xz}^s = G_{xz}^s(\gamma_{xz}) \text{ on shear strain}$$

Полученная экспериментальная зависимость секущего модуля поперечного сдвига G_{xz}^s от деформации поперечного сдвига аппроксимировалась следующей функцией:

$$G_{xz}^s = \frac{G_1}{1 + G_2 |\gamma_{xz}|^\alpha}, \quad (1)$$

где G_1, G_2, α – механические характеристики, получаемые минимизацией квадратичной невязки расчетных и экспериментальных значений секущего модуля, приведенного на рис. 2. Параметры, входящие в функцию (1), описывающую уменьшение секущего модуля поперечного сдвига, оказались следующими:

$$G_1 = 2,096 \text{ ГПа}, G_2 = 70,25, \alpha = 1,1.$$

Длина контакта взаимодействия c_0 нагружающих и опорных роликов с несущими слоями тест-образца (рис. 3) считается постоянной, равной тому значению, при котором достигается разрушение нижнего несущего слоя или по причине потери прочности или потери устойчивости. При этом контактные давления аппроксимировались переменной по длине c_0 поверхностной нагрузкой p :

$$p = p_0 \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{c_0}\right) + 1 \right], \quad (2)$$

где p_0 – амплитуда нагрузки.

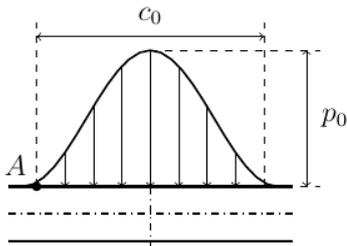


Рис. 3. Схема контактного взаимодействия несущих слоев и нагружающих роликов

Fig. 3. Diagram of the contact interaction of external layers and loading rollers

2. Основные соотношения и разрешающие уравнения

Геометрические соотношения классической нелинейной теории упругости, построенные для случая малых деформаций и произвольных перемещений, имеют вид [33]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right], \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Как показано в работах [18–21], их использование при решении конкретных задач может привести к появлению «ложных» точек бифуркаций (в них дан детальный анализ соотношений (3), (4) и соответствующих им уравнений теории упругости и предложены непротиворечивые уравнения геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях). Поэтому, наряду с (3), (4), для решения рассматриваемой задачи были использованы полученные в [18–21] и геометрически корректные соотношения, в которых вместо (3) используются соотношения

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

а соотношения (4) остаются неизменными.

Задача выявления возможных форм потери устойчивости внешних слоев из ВКМ в данной работе основана на использовании глобальной инкрементальной теории Лагранжа (Total Lagrange method) [34, 35]. Для дальнейшего его применения запишем основные соотношения теории деформирования в тензорном виде.

Пусть текущая геометрия конструкции описывается уравнением

$$x = x(X, t),$$

где X – радиус вектор, описывающий первоначальную геометрию тела (рис. 4).

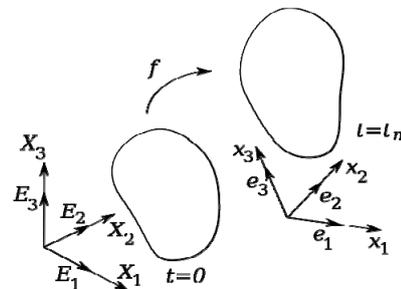


Рис. 4. Исходное и деформированное состояние сплошной среды

Fig. 4. Initial and deformed state of the continuum

Запишем тензор градиента деформации в виде

$$F = \frac{\partial x}{\partial X}, \quad (6)$$

компоненты которой будут:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}. \quad (7)$$

Тогда тензор деформаций Грина можно представить в виде

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I), \quad (8)$$

где I – единичный тензор, а компоненты тензора деформаций Грина, соответствующие соотношениям (3)–(4), могут быть записаны в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ji} F_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right). \quad (9)$$

Если вместо соотношений (3)–(4) в соответствии с [18–20] использовать геометрически корректные соотношения (5), (6), то тензор деформаций Грина (8) модифицируется следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I^*). \quad (10)$$

Здесь компоненты тензора I^* имеют вид

$$I_{ii}^* = 1 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2, \quad I_{i \neq j}^* = 0.$$

Вариационное уравнение Лагранжа представимо в виде

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}, \quad (11)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V S : \delta E \, dV, \quad \delta W_{\text{ext}} = \int_V f_0 \cdot \delta u \, dV + \int_A t_0 \cdot \delta u \, dA. \quad (12)$$

Здесь δW_{int} – вариация работы внутренних сил; δW_{ext} – вариация работы внешних сил; S – второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа; f_0 – объемные силы, t_0 – поверхностные силы; δu – вариация перемещений.

Вариация тензора деформаций Грина (9) запишется в виде

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} F_{kj} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} F_{ki} \right) = \frac{1}{2} (\delta u_{k,i} F_{k,j} + \delta u_{k,j} F_{k,i}). \quad (13)$$

Зависимость между тензорами напряжений Пиолы – Кирхгофа S и деформациями Грина E для физически нелинейного случая запишем в приращениях в виде

$$\Delta S(E) = D(E) : \Delta E(u),$$

где $D(E)$ – тензор упругих характеристик материала (тензор касательных жесткостей).

Вариационное уравнение (12) после линеаризации примет вид [35]

$$\Delta \delta W = \Delta \delta W_{\text{int}} - \Delta \delta W_{\text{ext}}, \quad (14)$$

где

$$\Delta \delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \Delta E(\delta u) : D : \Delta E(u) \, dV + \int_{V_0} S : [(\nabla_0 u)^T \nabla_0 \delta u] \, dV. \quad (15)$$

Для численного решения сформулированной задачи о четырехточечном изгибе трехслойной пластины с внешними слоями из ВКМ на основе вариационного уравнения (15) была разработана конечно-элементная модель с использованием трехмерных конечных элементов (КЭ) с учетом геометрической и физической нелинейности, в том числе и с возможностью учета соотношений (5). Рассматривались два типа КЭ: первый – восьмиузловой линейный изопараметрический КЭ [36], второй – модифицированный с дополнительным узлом, который «смягчает» элемент при изгибе [37].

Для двух типов КЭ были проведены численные эксперименты на тестовых задачах (растяжение и изгиб балки) при различном количестве элементов. Из анализа полученных результатов выявлено, что в задаче изгиба балки для получения решения, близкого к аналитическому, необходимо большое количество восьмиузловых КЭ первого типа. Это связано с тем, что такой элемент на изгиб довольно «жесткий». Аналогичный результат получился при решении задачи в геометрически нелинейной постановке. Поэтому для «смягчения» элемента использовались КЭ второго типа [37], в которых были введены дополнительные внутренние узлы. Это позволяло при небольшом количестве КЭ получить результаты, близкие к точным решениям как в задаче изгиба балки, так и при четырехточечном изгибе трехслойной пластины с внешними слоями из композиционного материала.

3. Методы расчета, результаты численных и физических экспериментов

При использовании деформационного подхода под потерей устойчивости можно понимать два состояния. В первом случае под потерей устойчивости принимается состояние, при котором приращение перемещений или деформаций катастрофически быстро увеличивается при незначительном приросте нагрузки P . Во втором случае под потерей устойчивости понимается состояние, при котором на диаграмме «сила – перемещение» появляется экстремум. Нагрузку, при которой это происходит, в обоих случаях обычно называют критической. В соответствии с этими критериями при решении задачи о нахождении критической нагрузки для трехслойной пластины при четырехточечном изгибе были рассмотрены два подхода.

Первый подход основан на глобальной инкрементальной теории Лагранжа [34, 35] (для краткости назо-

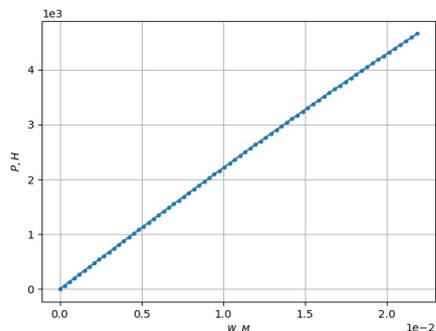
вем его статическим), поскольку параметром процесса является величина нагрузки. При численном решении задачи потере устойчивости соответствует ситуация, в которой при приближении нагрузки к предельному значению решение задачи расходится.

Во втором подходе использовался метод продолжения по другому параметру процесса нагружения, а именно, по длине дуги кривой «нагрузка – перемещение» (*arc length method*) [35, 38–40]. Ниже приведены результаты расчетов, полученные при использовании этих подходов.

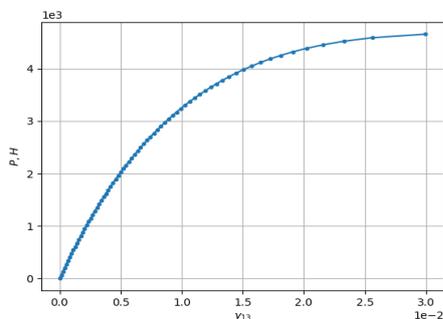
3.1. Решение задачи статическим методом

В качестве материала несущих слоев тест-образца принят однонаправленный ВКМ на основе углеренты ЭЛУР-П и эпоксидного связующего холодного отверждения. В численных расчетах использовались упругие характеристики, найденные в работе [41], и принятые равными: $E_1 = 103$ ГПа, $E_3 = 5,9$ ГПа, $\nu_{13} = 0,3$, а толщина несущих слоев $t = 0,3$ см. Для трансверсально-мягкого заполнителя в виде сот из полимерной бумаги были приняты следующие характеристики: $E_1 = 8$ МПа, $E_3 = 80$ МПа, $G_{13} = 20$ МПа, $h = 1$ см. Расстояние между роликами принималось $L = 7$ см при $a = 25$ см, вся длина пластины равна 27 см, а ширина пластины $b = 2,5$ см.

Ниже приводятся результаты расчетов трехслойного тест-образца с учетом геометрической и физической нелинейности (рис. 5–7).



а



б

Рис. 5. Результаты расчета статическим методом: а – диаграмма «прогиб – нагрузка»; б – диаграмма «деформация сдвига – нагрузка»

Fig. 5. Calculation results by the static method: a is the deflection-load curve, b is the shear strain-load curve

На рис. 5 графики построены для точки А, которая находится слева от приложенной нагрузки возле нагружающего ролика (см. рис. 3). Длина контактного взаимодействия нагружающих и опорных роликов с несущими слоями c_0 принята равной $0,3$ см.

Картинки напряженно-деформированного состояния на рис. 6–7 приведены для значения максимальной нагрузки, равной критической $P_{kr} = 4,657$ кН. Анализ полученной картины деформирования показал, что причиной неожиданного изменения процесса деформирования является скачкообразное изменение углов сдвига элементов над нагружающим роликом (см. рис 6–7). При этом зависимость перемещения ролика от нагрузки остается практически линейной, хотя зависимость угла сдвига от нагрузки в нижнем несущем слое, как видно из рис. 5, б, существенно нелинейна.

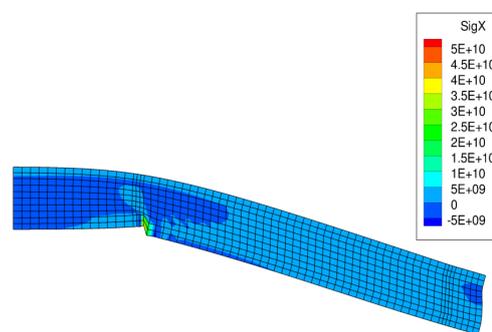


Рис. 6. Картина деформирования и нормальные напряжения σ_{11} в правой половине тест-образца в момент потери устойчивости

Fig. 6. Deformation pattern and normal stresses σ_{11} in the right half of the specimen at the buckling state

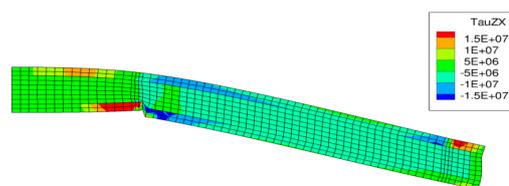


Рис. 7. Картина деформирования и касательные напряжения τ_{13} в правой половине тест-образца в момент потери устойчивости

Fig. 7. Deformation pattern and shear stresses τ_{13} in the right half of the specimen at the buckling state

Из рис. 6–7 визуально обнаруживается, что потеря устойчивости происходит по сдвиговой форме в окрестности, близкой к нагружающему ролику.

3.2. Решение задачи методом дуги (*arc length method*)

Решение задачи методом дуги основан на использовании метода продолжения решения по длине дуги [35, 38–40]. Основной идеей этого метода является то, что для получения решения на следующем шаге нагруже-

ния строится окружность (сфера) около найденного на данном шаге решения с заданным радиусом s (рис. 8, б). Уравнение окружности записывается в виде

$$(\Delta x_k + \delta u)^T (\Delta x_k + \delta u) + (\Delta \lambda_k + \gamma)^2 \psi^2 q^T q = s^2. \quad (16)$$

Здесь Δx_k – приращение перемещения на предыдущем шаге; δu – новое приращение перемещений; s – радиус окружности; $\Delta \lambda_k$ – приращение параметра нагружения λ .

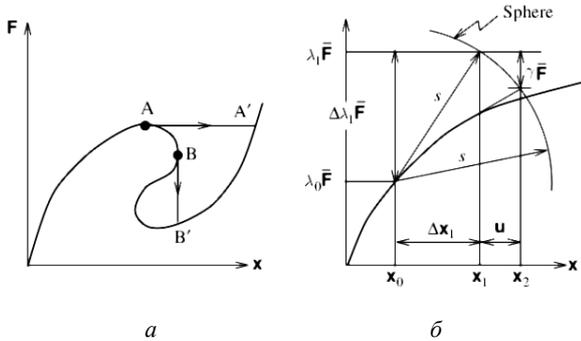


Рис. 8. Схема метода продолжения по длине дуги

Fig. 8. Scheme of the arc length method

Точка пересечения окружности и диаграммы нагружения отыскивается путем решения системы уравнений (12), (16). Итерационно решение уточняется на каждом шаге параметра нагружения λ . Благодаря этому подходу нагрузка может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от параметра нагружения λ , что позволяет обойти предельные точки A и B на рис. 8, a .

С использованием описанного алгоритма были проведены численные расчеты при четырехточечном изгибе трехслойной пластины. Здесь, как и в статическом методе, бифуркация НДС приводит к резкому увеличению приращения угла сдвига (рис. 9). Хотя этот подход позволяет исследовать закритическое поведение конструкции (рис. 10, a), в рассматриваемой задаче не удается пройти далеко по дуге диаграммы γ_{13} от P . Оказалось, это вызвано тем, что в результате потери устойчивости внешнего слоя по поперечно-сдвиговой форме конечные элементы в области приложения нагрузки вырождаются, а именно: их площадь устремляется к нулю.

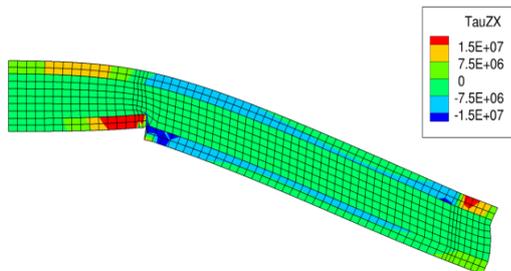


Рис. 9. Картина деформирования и касательные напряжения τ_{13} в правой половине тест-образца в момент потери устойчивости (расчет методом дуги)

Fig. 9. Deformation pattern and shear stresses τ_{13} in the right half of the specimen at the buckling state (the arc length method)

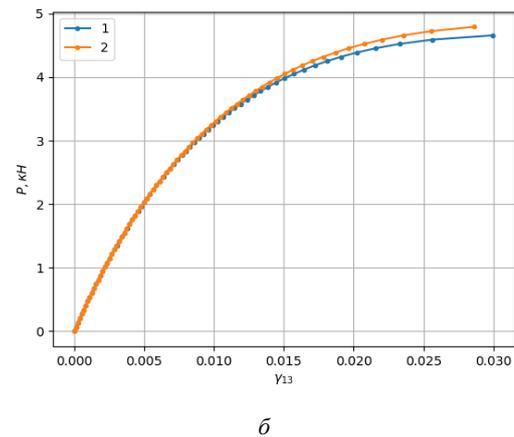
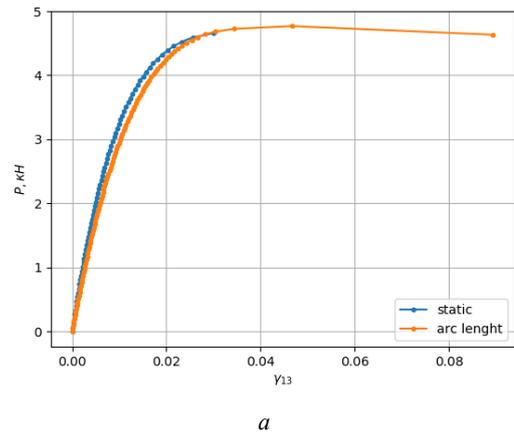


Рис. 10. Результаты численных расчетов: a – зависимости деформаций сдвига от нагрузки (две методики); b – зависимости деформаций сдвига от нагрузки: 1 – стандартные геометрически нелинейные соотношения (3)–(4), 2 – непротиворечивые соотношения (5)–(6)

Fig.10. Results of numerical calculations: a is dependence of shear strain on load (two methods); b is dependence of shear strain on load: 1 is classic geometric nonlinear relations of (3)-(4), 2 is consistent equations (5)-(6)

Как видно из рис. 10, a , численные результаты расчета, представленные в виде зависимостей «нагрузка – сдвиг», по двум методикам близки в докритической области деформирования, метод дуги, в отличие от первого, позволяет проследить закритическое поведение конструкции.

3.3. Решение задачи на основе непротиворечивых кинематических соотношений

Как показано в работах [18–20], использование соотношений (3)–(4) может в некоторых задачах привести к ложным бифуркационным решениям и неверным значениям определяемой критической нагрузки. Использование же непротиворечивых кинематических соотношений (5)–(6) позволяет в таких случаях получить реальные ее значения.

Сравнение результатов применения обоих видов соотношений представлено на рис. 10, b , где приведены зависимости «нагрузка – сдвиговая деформация», полу-

ченные статическим методом. Видно, что в рассматриваемой задаче оба использованных подхода дают близкие результаты.

3.4. Исследование влияния геометрических параметров пластины на предельную нагрузку

При проведении расчетов была принята упрощенная конечно-элементная схема, так как численная реализация задачи требует большого объема численных вычислений. Поэтому ширина тест-образца моделировалась одним слоем конечных элементов, задача решалась в постановке плоского напряженного состояния. Это упрощение может привести к тому, что не будет учтен кромочный эффект, а точное выявление сложного напряженного состояния возле нагружающих роликов требует большого объема вычислений. Такими особенностями можно пренебречь, если считать, что ширина несущих слоев тест-образца намного больше их толщины.

Как было отмечено ранее, трехслойный тест-образец может разрушиться либо из-за потери прочности конструкции, либо из-за потери устойчивости несущего слоя в области нагружающего ролика. При этом от толщины несущего слоя трехслойной пластины зависит вид механизма, по которому происходит потеря несущей способности пластины. В связи с этим было проведено исследование влияния толщины несущего слоя, а также длины зоны контакта нагружающего ролика c_0 на механизм разрушения пластины.

Для оценки прочности элемента несущего слоя пластины был принят критерий прочности Цая-Ву [42]. Для плоского напряженного состояния он запишется в виде

$$f = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 = 1, \quad (17)$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}, F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}, F_{66} = \frac{1}{S^2},$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c},$$

где X_t, Y_t – пределы прочности на растяжение вдоль осей x, y соответственно; X_c, Y_c – пределы прочности на сжатие вдоль осей x, y ; S – предел прочности на сдвиг.

Коэффициент F_{12} определяется при испытании на двухосное нагружение при $\sigma_1 = \sigma_2 = p$ (все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю) и выражается формулой

$$F_{12} = \frac{1}{2p^2} \left[1 - p \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - p^2 \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \right].$$

Однако из-за трудоемкости проведения испытания на двухосное растяжение коэффициент F_{12} обычно находят из испытаний на одноосное растяжение образцов из однонаправленных композитов с укладкой волокон $\pm 45^\circ$ [44]. Значение компонент будет составлять

$\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{12} = U/2$ (остальные компоненты тензора напряжений равны нулю), где U – предел прочности образца при растяжении. Тогда

$$F_{12} = \frac{2}{U^2} \left[1 - \frac{U}{2} \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \frac{U^2}{4} \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{S^2} \right) \right].$$

При проведении расчетов коэффициент F_{12} был принят в более простом варианте, предложенном Хоффманом [44]:

$$F_{12} = \frac{1}{2X_t X_c}.$$

Кроме толщины несущего слоя на предельную нагрузку сильное влияние оказывают и геометрические размеры нагружающих элементов. Ролики могут быть разных диаметров, а область, на которую они действуют (она определяется отрезком c_0 , изображенным на рис. 3), меняется при нагружении. Оказалось, что в зависимости от величины отрезка c_0 несущий слой может или терять устойчивость, или достигать предела прочности.

Пределы прочности для ВКМ несущих слоев были получены в работе [41]:

$$X_t = X_c = 600 \text{ МПа}, Y_t = Y_c = 520 \text{ МПа}, S = 90 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$F_{11} = 2,77 \cdot 10^{-6} / \text{МПа}^2, F_{22} = 3,69 \cdot 10^{-6} / \text{МПа}^2,$$

$$F_{12} = 1,38 \cdot 10^{-6} / \text{МПа}^2,$$

$$F_{66} = 1,23 \cdot 10^{-4} / \text{МПа}^2, F_1 = 0, F_2 = 0.$$

На рис. 11 приведены результаты численных исследований, показывающие влияние отрезка c_0 и толщины несущего слоя t на предельную нагрузку.

Было обнаружено (это видно и на рис. 11), что при малых толщинах несущих слоев (0,5–1,5 мм) пластина разрушается из-за потери прочности несущего слоя при сжатии, а при более толстых несущих слоях предел прочности не достигается, а происходит потеря устойчивости сжатого несущего слоя, причем, по чисто поперечно-сдвиговой форме. Можно отметить, что наибольший вклад в критерий прочности, как и ожидалось, вносят сжимающие напряжения. В момент достижения предела прочности в элементе над нагружающим роликом компоненты напряжений в сжатом несущем слое достигли следующих величин:

$$\sigma_1 = -599 \text{ МПа}, \sigma_2 = -30 \text{ МПа}, \tau_{12} = -4,3 \text{ МПа}.$$

При этом слагаемые в критерии (17) имеют значения:

$$F_{11}\sigma_1^2 = 0,996, F_{22}\sigma_2^2 = 0,0033, F_{66}\tau_{12}^2 = 0,0023, \quad (18)$$

$$2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0,049, F_1\sigma_1 = 0, F_2\sigma_2 = 0, f = 1,052.$$

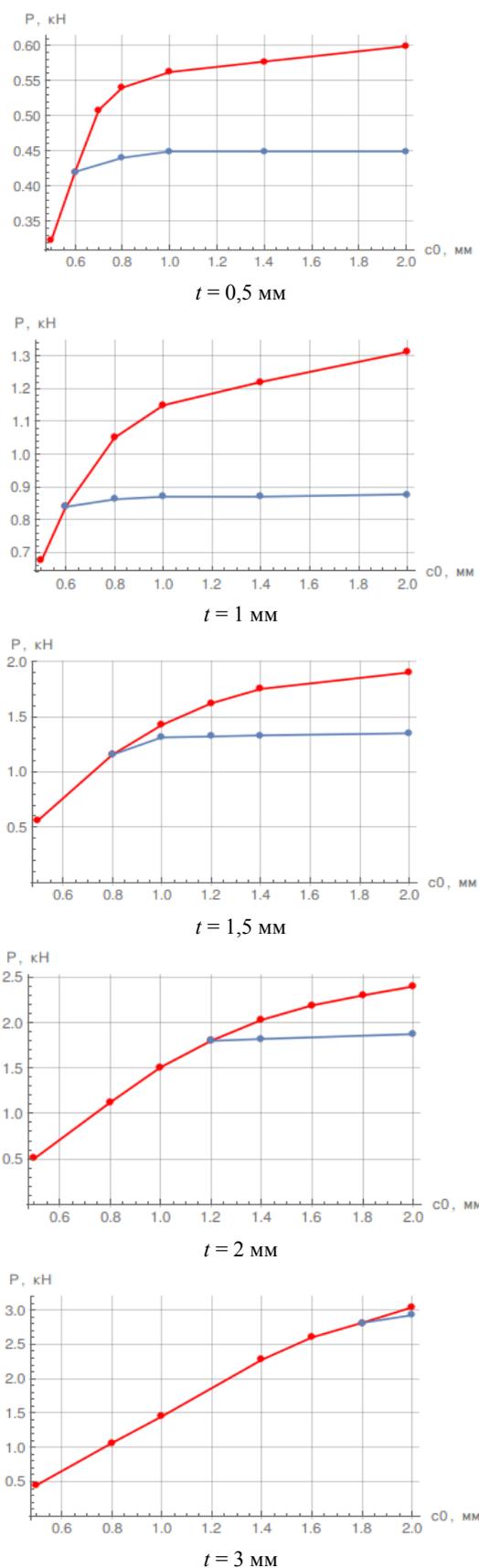


Рис. 11. Влияние толщины несущего слоя t и зоны контакта c_0 на предельную нагрузку (синяя линия – предельная нагрузка, красная – критическая нагрузка)

Fig. 11. Influence of the external layer thickness t and contact area c_0 on the load limit (the blue line shows the ultimate load, the red line shows the critical load)

Превышение функций f значения единицы вызвано, естественно, тем, что при численном решении задачи значение нагрузки меняется дискретно.

Из (18) видно, что основной вклад в критерий прочности вносит сжимающее напряжение σ_1 .

Кроме этого, нужно отметить, что на предельную нагрузку, при которой функция f достигает значения 1, как это видно на рис. 11, практически не влияет длина контакта c_0 (т.е. значение отрезка c_0 , напрямую зависящего от диаметра ролика). Напротив, нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости несущего слоя пластины, весьма чувствительна к изменению этой величины. Поэтому при испытаниях тест-образцов на четырехточечный изгиб с целью определения пределов прочности на сжатие необходимо использовать либо тонкие несущие слои, либо ролики с большим диаметром. Иначе сжатые внешние слои тест-образцов могут потерять устойчивость раньше, чем будет достигнут предел прочности на сжатие. Это может привести в ряде случаев к неправильному определению его значения.

Были проведены также численные эксперименты, в которых варьировалась величина a . Ожидается, что предельная и критическая нагрузки повышались с увеличением a , что объясняется уменьшением изгибающего момента при одной и той же нагрузке.

3.5. Сравнение результатов физических и численных экспериментов

Для испытаний были изготовлены тест-образцы с жестким наполнителем из древесины по всей длине образца (рис. 12). Общая длина тест-образца составила $l = 270$ мм, ширина $b = 25$ мм, толщина наполнителя $h = 5$ мм, номинальная толщина несущих слоев $t = 1$ мм, расстояние между опорными роликами составило 250 мм, а между нагружающими роликами – 70 мм.

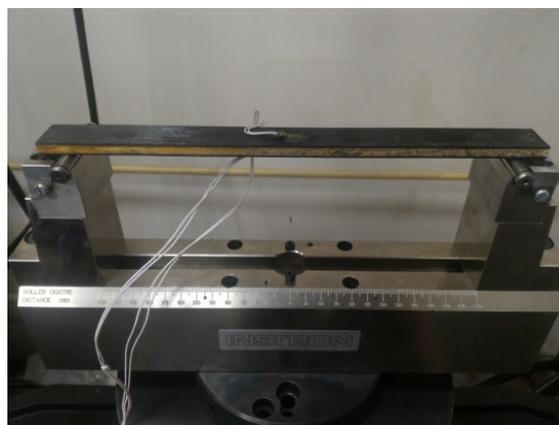


Рис. 12. Общий вид тест-образца в приспособлении

Fig. 12. Set-up of the specimen in test fixture

Диаграммы нагружения трех тест-образцов с жестким наполнителем приведены на рис. 13.

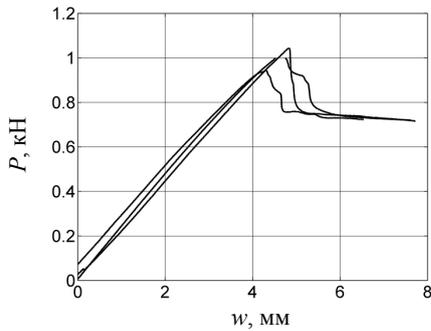


Рис. 13. Диаграммы нагружения тест-образцов с жестким наполнителем («нагрузка – прогиб»)

Fig. 13. Loading curves of the specimens with a rigid core (load-deflection)

Результаты экспериментов сведены в таблицу. В ней изгибные напряжения, определяемые по классической теории изгиба балок, обозначены через σ_{\max}^{bend} , а касательные напряжения, определяемые по формуле Журавского, – через τ_{\max} .

Результаты экспериментов на четырехточечный изгиб

Four-point bending experimental results

Номер образца	P_{\max} , кН	σ_{\max}^{bend} , МПа	τ_{\max} , МПа
1	-1,043	292,436	4,230
2	-0,943	269,012	3,824
3	-0,999	284,847	4,049
Среднее	-0,995	282,098	4,034

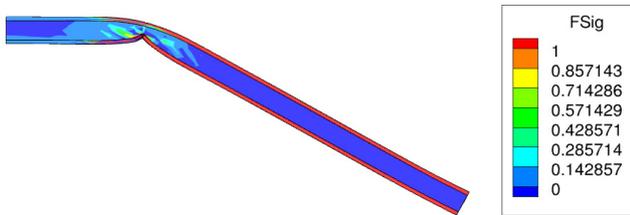


Рис. 14. Уровень напряженного состояния правой половины трехслойного тест-образца по критерию Цая-Ву [42]

Fig. 14. Level of the stress state of right half of the sandwich specimen using Tsai-Wu test [42]

На рис. 14 приведена картина распределения функции f (показателя уровня напряженного состояния по критерию Цая-Ву) правой половины трехслойного тест-образца в предельном состоянии (толщина несущих слоев равна 1 мм). Следует отметить, что, в отличие от тест-образца с толщиной несущих слоев 3 мм (см. рис. 9), где разрушение происходит вследствие потери устойчивости несущего слоя по поперечно-сдвиговой форме, тест-образец с толщиной несущих слоев 1 мм разрушается вследствие потери прочности.

В эксперименте среднее значение предельной нагрузки получилось равным 0,995 кН, а численный расчет предельной нагрузки приводит к значению 0,880 кН,

при этом отличие от результата экспериментов составляет 11,6 %. Можно считать это неплохим согласованием расчетных и экспериментальных результатов.

Заключение

Проведено численное моделирование процесса четырехточечного изгиба трехслойного тест-образца. Зависимость поперечных касательных напряжений от деформаций поперечных сдвигов, формирующихся в несущих слоях, для простоты исследований принята нелинейно-упругой и получена в результате обработки данных испытаний на сдвиг материала несущих слоев. Численное решение задачи проведено в физически и геометрически нелинейной постановке с использованием метода конечных элементов. Сравнительный анализ использования различных кинематических соотношений и разных методов решения нелинейной задачи показал отсутствие существенных различий в результатах решений.

Для расчетов применены два подхода, используемые при решении геометрически нелинейных задач (статический и метод продолжения по дуге). Установлено, что при некоторой нагрузке происходит потеря устойчивости несущего слоя по неклассической поперечно-сдвиговой форме в области приложения локализованной нагрузки, которая имитирует воздействие нагружающего ролика. Такой процесс удается обнаружить лишь визуализацией процесса деформирования. Использование статического метода и метода дуги приводит к тому, что итерационный алгоритм расходится при некоторых значениях параметров процесса, хотя зависимость перемещения ролика от нагрузки до этого момента остается практически линейной. Это объясняется тем, что в результате потери устойчивости несущего слоя по поперечно-сдвиговой форме конечные элементы в области приложения нагрузки вырождаются (их площадь устремляется к нулю). Показано, что классическая картина с предельной точкой, отражающая связь статических и кинематических характеристик конструкции, все же может быть обнаружена визуально при анализе зависимости деформаций поперечного сдвига внешнего слоя от нагрузки.

Для определения предельной нагрузки, при которой происходит потеря прочности элементов несущего слоя, использован критерий Цая-Ву. Показано, что увеличение диаметра ролика после его некоторого значения мало влияет на предельную нагрузку, в то время как нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости несущего слоя тест-образца, весьма чувствительна к изменению его величины. Проведен сравнительный анализ поведения несущего слоя при различных ее толщинах. Делается вывод о том, что при испытании тест-образцов на четырехточечный изгиб с целью определения пределов прочности сжатого несущего слоя необходимо использовать либо тонкие несущие слои, либо ролики с большим диаметром.

Приведены результаты экспериментальных исследований трехслойных тест-образцов и дано сравнение экспериментальных значений предельных нагрузок с расчетными, показавшее их неплохое соответствие.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00349 (раздел 3.4), проект 19-08-00073(раздел 3.3)), Российского научного фонда

Библиографический список

1. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels // *Composite Structures*. – 2019. – Vol. 44. – P. 237–252.
2. Rupp P., Elsner P., Weidenmann Kay A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2019. – Vol. 21, no. 8. – P. 2654–2679.
3. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. – 2018. – Vol. 109. – P. 564–577.
4. Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams / V.S. Sokolinsky, H. Shen, L. Vaikhanski, S.R. Nutt // *Composite Structures*. – 2003. – Vol. 60 – P. 219–229.
5. Banghai J., Zhibin L., Fangyun L. Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending // *Composite Structures*. – 2015. –Vol.133 – pp.739-745.
6. An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: influence of core type and contour finishing options / A. Fathi, F. Woff-Fabris, V. Altstadt, R. Gatzl // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2013. – Vol. 15, no. 5. – P. 487–508.
7. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: honeycomb vs. foam // *Marine Structures*. – 2013. – Vol. 30. – P. 74–96.
8. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending // *Composites: Part A*. – 2018. – Vol. 109. – P. 564–577.
9. Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich / F. Alila, J. Fajoui, R. Gerard, P. Casari, M. Kchaou, F. Jacquemin // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2020. – Vol. 22, no. 6. – P. 2049–2074. DOI: 10.1177/1099636218792729.
10. Piovar S., Kormanikova E. Sandwich beam in four-point bending test: experiment and numerical models // *Advanced Materials Research*. – 2014. – Vol. 969. – P. 316–319.
11. Russo A., Zuccarello B. Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels // *Composite Structures*. – 2007. – Vol. 81. – P. 575–586.
12. Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge / V.N. Paimushin, M.V. Makarov, I.B. Badriev, S.A. Kholmogorov // *Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 11th international Conference*. – Gdansk, 2018. – P. 267–270.

(проект № 19-19-00059 (разделы 3.1, 3.2), проект № 19-79-10018 (разделы 1, 3.5).

Acknowledgement

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-08-00349 (section 3.4), project 19-08-00073 (section 3.3)), the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00059 (sections 3.1, 3.2), project No. 19-79-10018 (sections 1, 3.5).

13. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // *Russian Mathematics*. – 2015. – Vol. 59, no. 10. – P. 57–60.
14. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. Перевод с англ. и польского Б.Н. Ушакова. – М.: Мир, 1982. – 542 с.
15. Thomsen O.T. Theoretical and experimental investigation local bending effects in sandwich plates // *Composite Structures*. – 1995. – Vol. 30 – P. 85–101.
16. Ply drop-off effects in CFRP/honeycomb sandwich panels – experimental results / O.T. Thomsen, W. Rits, D.C.G. Eaton, O. Dupont, P. Queekers // *Composites Science and Technology*. – 1996. – Vol. 56. – P. 423–431.
17. Mujikaa F., Pujanab J., Olave M. On the determination of out-of-plane elastic properties of honeycomb sandwich panels // *Polymer Testing*. – 2011. – Vol. 30. – P. 222–228.
18. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // *Докл. РАН*. – 2004. – Т. 396, № 4. – С. 492–495.
19. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // *Прикладная математика и механика*. – 2005. – Т. 69, № 5. – С. 864–882.
20. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О геометрически нелинейных уравнениях теории безмоментных оболочек с приложениями к задачам о неклассических формах потери устойчивости цилиндра // *Прикладная математика и механика*. – 2006. – Т. 70, № 1. – С. 100–110.
21. Шклярчук Ф.Н. К расчету деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем // *Изв. РАН, Мех. тв. тела*. – 1998. – № 1. – С. 140–146.
22. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в состоянии ползучести // *Приклад. мат-ка и механика*. – 1957. – Т. 21, № 3. – С. 406–412.
23. Шестериков С.А. О критерии устойчивости при ползучести // *Прикладная математика и механика*. – 1959. – Т. 23, № 6. – С. 1101–1106.
24. Кузнецов А.П., Куршин Л.М. Решение некоторых задач устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести по теории упрочнения // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1960. – № 4. – С. 84–89.
25. Шестериков С.А. Выпучивание при ползучести с учетом мгновенных пластических деформаций // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1963. – № 2. – С. 124–129.

26. Тергулов И.Г. Устойчивость пластин и оболочек при неустановившейся ползучести // Исследования по теории пластин и оболочек. – Вып. 3. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1965. – С. 237–243.

27. Pian T.H.H. Creep buckling of curved beam under lateral loading // Proc. of 3-rd U.S. Math. Congr. of Appl Mech. – N.Y., 1958. – P. 58–63.

28. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 208 с.

29. Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Задача потери устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов, свойства которых зависят от типа нагружения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 3. – С. 104–111.

30. Образцов И.Ф., Васильев В.В. Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1982. – № 3. – С. 390–393.

31. Dumansky A.M., Liu Hao Analysis of anisotropy of time-dependent and nonlinear properties of unidirectional CFRP // Advances in Composite Science and Technology. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 683. P. 012093. DOI: 10.1088/1757-899X/683/1/012093

32. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Каюмов Р.А. Экспериментальные исследования механизмов формирования остаточных деформаций волокнистых композитов слоистой структуры при циклическом нагружении // Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, № 4. – С. 395–428.

33. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: СУДПРОМГИЗ, 1958. – 411 с.

References

1. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels. *Comp. Struc.*, 2019, Vol. 44, pp.237-252.

2. Rupp P., Elsner P., Weidenmann Kay A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2019, 21(8), pp.2654-2679.

3. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending. *Comp. Part A: Appl. Sci. and Manuf.*, 2018, Vol. 109, pp.564-577.

4. Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R. Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams. *Comp. Struc.*, 2003, Vol. 60, pp.219-229.

5. Banghai J., Zhibin L., Fangyun L. Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending. *Comp. Struc.*, 2015, Vol.133, pp.739-745.

6. Fathi A., Woff-Fabris F., Altstadt V., Gatzl R. An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: influence of core type and contour finishing options. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2013, 15(5), pp. 487-508.

7. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: honeycomb vs. foam. *Marine Struct.*, 2013, Vol.30, pp. 74-96.

8. Shi H., Liu W, Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending. *Comp. Part A.*, 2018, Vol. 109, pp. 564-577.

9. Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F. Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory

slamming test on foam core sandwich. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2020, 22(6), pp.2049-2074. doi:10.1177/1099636218792729.

10. Piovar S., Kormanikova E. Sandwich beam in four-point bending test: experiment and numerical models. *Adv. Mater. Research.*, 2014, Vol. 969, pp.316-319.

11. Russo A., Zuccarello B. Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels. *Comp. Struc.*, 2007, Vol. 81, pp. 575-586.

12. Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A. Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge. *Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 11th international Conference. Gdansk*, 2018, pp. 267-270.

13. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russian Math.*, 2015, 59(10). pp. P.57-60.

14. Lukasiewicz S. Local loads in plates and shells. *Warszawa*, 1979, 542 p.

15. Thomsen O.T. Theoretical and experimental investigation local bending effects in sandwich plates. *Comp. Struc.*, 1995, Vol. 30, pp. 85-101.

16. Thomsen O.T., Rits W., Eaton D.C.G., Dupont O., Queekers P. Ply drop-off effects in CFRP/honeycomb sandwich panels – experimental results. *Comp. Sci. Tech.*, 1996, Vol. 56, pp. 423-431.

17. Mujikaa F., Pujanab J., Olave M. On the determination of out-of-plane elastic properties of honeycomb sandwich panels. *Polymer Testing*, 2011, Vol. 30, pp. 222-228.

34. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

35. Bonet J., Wood D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis.* – Cambridge University Press, 2008. – 318 p.

36. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 2: Solid Mechanics 2000.* – 316 p.

37. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань: ДАС, 2001. – 301 с.

38. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // *Solid Structures.* – 1979. – Vol. 15. – P. 529–551.

39. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures.* – Wiley, 1991. – Vol. 1. – 362 p.

40. Crisfield M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through” // *Computers & Structures.* – 1981. – Vol. 13. – P. 55–62.

41. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Физико-механические характеристики волокнистого композита на основе угле-ленты ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 // Механика композиционных материалов. – 2018. – Т. 54. – С. 5–20.

42. Гриневиц А.В., Яковлев Н.О., Славин А.В. Критерии разрушения полимерных композиционных материалов (обзор) // Электронный журнал «Труды ВИАМ». – 2019. – № 7. – URL: http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=1442.

43. Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Химия, 1975. – 262 с.

44. Narayanaswami R., Adelman H. M. Evaluation of the Tensor Polynomial and Hoffman Strength Theories for Composite Materials // *Journal of Composite Materials.* – 1977. – Vol. 11. – P. 366–377.

18. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation. *Doklady Physics*, 2004, 49(6), pp. 374-377. doi: 10.1134/1.1774064.
19. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. The relations of deformation theory in the quadratic approximation and the problems of constructing improved versions of the geometrically non-linear theory of laminated structures. *J. App. Math. Mech.*, 2005, 69(5), pp.773-791. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2005.09.013.
20. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Geometrically non-linear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder. *J. App. Math. Mech.*, 2006, 70(1), pp. 91-101. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2006.03.006.
21. Shklyarchuk F. N. Analysis of the strain state and stability of geometrically nonlinear elastic systems. *Mech. Sol.*, 1998, 33(1), pp.114-119.
22. Rabontov Yu. N., Shesterikov S.A. Ustoychivost' sterzhney i plastinok v sostoyanii polzuchesti [Stability of rods and plates in a state of creep]. *J. App. Math. Mech.*, 1957, 21(3), pp.406-412.
23. Shesterikov S.A. O kriterii ustoychivosti pri polzuchesti [On the criterion of creep stability]. *J. App. Math. Mech.* 1959, 23(6), pp. 1101-1106.
24. Kuznetsov A.P., Kurchin L.M. Resheniye nekotorykh zadach ustoychivosti plastin i obolochek v usloviyakh polzuchesti po teorii uprochneniya [Solution of some problems of stability of plates and shells under creep conditions according to the hardening theory]. *App. mech. tech. phys.*, 1960, No.4, pp. 84-89.
25. Shesterikov S.A. Vypuchivaniye pri polzuchesti s uchetom mgnovennykh plasticheskikh deformatsiy [Buckling on creep taking into account instant plastic deformations]. *App. mech. tech. phys.*, 1963, No.2, pp.124-129.
26. Teregulov I.G. Ustoychivost' plastin i obolochek pri neustanovivsheysya polzuchesti [Stability of plates and shells with transient creep]. *Vol. "Research on the theory of plates and shells"*, 1965, No.3, pp.237-243.
27. Pian T.H.H. Creep buckling of curved beam under lateral loading. *Proc. of 3-rd U.S. Math. Congr. of Appl Mech.* N. Y., 1958, pp.58-63.
28. Klyushnikov V.D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of elasticity]. Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1979, 208 p.
29. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loaditn types. *PNRPU Mechanics Bulletin.*, 2019, No.3, pp.104-111.
30. Obrazcov I.F., Vasil'yev V.V. Nelineynyye fenomenologicheskiye modeli deformirovaniya voloknistykh kompozitnykh materialov [Nonlinear phenomenological models of deformation of fibrous composite materials]. *Mech. Comp. Mater.*, 1982, No.3, pp. 390-393.
31. Dumansky A.M., Liu Hao Analysis of anisotropy of time-dependent and nonlinear properties of unidirectional CFRP. *Advances in Composite Science and Technology. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019., Vol. 683, 012093 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012093.
32. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Kayumov R.A. Experimental Investigation of Residual Strain Formation Mechanisms in Composite Laminates under Cycling Loading. *Uchenye zapiski kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskije nauki*. 2017, 159(4), pp.395-428.
33. Novozilov V.V. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]. Leningrad, SUDPROMGIZ, 1958, 411 p.
34. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 3rd edition, Oxford-New York, Pergamon Press, 1982, 630 p.
35. Bonet J., Wood D.. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge University Press, 2008, 318 p.
36. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 2: Solid Mechanics, 2000, 316 p.
37. Golovanov A.I., Berezhnoi D.V. Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruyemykh tverdykh tel [Finite Element Method in Solid Mechanics]. Kazan, Izdatelstvo "DAS", 2001, 301 p.
38. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Solid Struct.*, 1979, Vol. 15, pp. 529-551.
39. Crisfield M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures. Wiley, Vol. 1, 1991, 362 p.
40. Crisfield M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers and Structures.*, 198, Vol. 13, pp. 55-62.
41. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-Mechanical Properties of a Fiber-Reinforced Composite Based on an ELUR-P Carbon Tape and XT-118 Binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, 54(1), pp.2-12. doi: 10.1007/s11029-018-9712-1.
42. Grinevich A.V., Yakovlev N.O., Slavin A.V. Kriterii razrusheniya polimernykh kompozitsionnykh materialov (obzor) [Fracture Criteria for Polymer Composite Materials (Review)]. *Electronic journal "VIAM Proceedings"*, 2019, No.7, (http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=1442).
43. Tarnopolskii Yu.M., Kincis T.Ya. Metody staticheskikh ispytaniy armirovannykh plastikov. 2-ye izd. pererab. i dop. [Methods for static testing of reinforced plastics. 2nd ed. revised and add]. Moscow, Chimia, 1975, 262 p.
44. Narayanaswami R., Adelman H. M. Evaluation of the Tensor Polynomial and Hoffman Strength Theories for Composite Materials. *J. Compos. Mater.* 1977, Vol. 11, pp. 366-377.