



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.17

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СРЕДЕ КОССЕРА

Д.В. Тарлаковский^{1, 2}, Нгуен Ван Лам²

¹Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета, Москва, Россия

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 октября 2020 г.
Принята: 20 ноября 2020 г.
Опубликована: 30 декабря 2020 г.

Ключевые слова:

среда Коссера, пространство со сферической полостью, антисимметрия, функции влияния, сферические функции, преобразование Лапласа, малый параметр.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается заполненное линейно-упругой средой Коссера пространство со сферической полостью при заданных нестационарных антисимметричных поверхностных возмущениях, под которыми понимается соответствующий аналог классических антиплоских деформаций. Движение среды описывается системой из трех уравнений относительно ненулевых компонент вектора перемещения и потенциалов поля вращения, записанной в сферической системе координат с началом в ее центре полости. Начальные условия полагаются нулевыми.

Для решения задачи используются разложения искоемых функций в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, а также преобразование Лапласа по времени. В результате задача сводится к независимым системам обыкновенных дифференциальных уравнений с оператором Лапласа относительно коэффициентов рядов. Формулируется утверждение о структуре общего решения этой системы. Изображения коэффициентов рядов представлены в виде линейных комбинаций граничных условий с коэффициентами – трансформантами поверхностных функций влияния, в явные формулы для которых входят функции Бесселя полуполого индекса. В силу сложности этих выражений для определения оригиналов в линейном приближении используется метод малого параметра, в качестве которого принимается коэффициент, характеризующий связь полей перемещений и поворотов. Затем с учетом связи функций Бесселя с элементарными функциями изображения записываются в виде линейных комбинаций экспонент с коэффициентами – рациональными функциями параметра преобразования. Дальнейшая процедура обращения преобразования Лапласа проводится с использованием вычетов. Показано, что имеются три волновых фронта, соответствующие модифицированной с учетом свободного вращения волне сдвига и двум волнам вращения.

Представлены примеры расчетов для зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице.

© ПНИПУ

© Тарлаковский Дмитрий Валентинович – д.ф.-м.н., проф., зав. лаб., e-mail: tdvhome@mail.ru,

ИД: [0000-0002-5694-9253](https://orcid.org/0000-0002-5694-9253).

Нгуен Ван Лам – асп., e-mail: nvlammai2019@gmail.com, ИД: [0000-0001-5695-7176](https://orcid.org/0000-0001-5695-7176).

Dmitrii V. Tarlakovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Laboratory, e-mail: tdvhome@mail.ru, ИД: [0000-0002-5694-9253](https://orcid.org/0000-0002-5694-9253).

Nguyen Van Lam – PhD Student, e-mail: nvlammai2019@gmail.com, ИД: [0000-0001-5695-7176](https://orcid.org/0000-0001-5695-7176).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

PROPAGATION OF NON-STATIONARY ANTISYMMETRIC KINEMATIC PERTURBATIONS FROM A SPHERICAL CAVITY IN COSSERAT MEDIUM

D.V. Tarlakovskii^{1,2}, Nguyen Van Lam²

¹Scientific Research Institute of Mechanics of the Moscow State University, Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 October 2020
Accepted: 20 November 2020
Published: 30 December 2020

Keywords:

Cosserat medium, Space with a spherical cavity, Antisymmetry, Influence functions, Spherical functions, Laplace transform, Small parameter

ABSTRACT

We consider a space filled with a linearly elastic Cosserat medium with a spherical cavity under given nonstationary antisymmetric surface perturbations, which are understood as the corresponding analogue of classical antiplane deformations. The motion of a medium is described by a system of three equations with respect to nonzero components of the displacement vector and potentials of the rotation field, written in a spherical coordinate system with the origin at its center of the cavity. The initial conditions are assumed to be zero.

To solve the problem, we use decomposition of functions to Legendre and Gegenbauer polynomials, as well as the Laplace transform in time. As a result, the problem is reduced to independent systems of ordinary differential equations with the Laplace operator for the coefficients of the series. A statement about the structure of the general solution of this system is formulated. Images of the series coefficients are presented in the form of linear combinations of boundary conditions with coefficients – transformants of surface influence functions, the explicit formulas for which include the Bessel functions of a half-integer index. Due to the complexity of these expressions, to determine the originals in the linear approximation, the method of a small parameter is used, which is taken as a coefficient characterizing the relationship between the displacement and rotation fields. Then, taking into account the connection between the Bessel functions and elementary functions, the images are written in the form of linear combinations of exponentials with coefficients – rational functions of the transformation parameter. The further procedure for inverting the Laplace transform is carried out using residues. It is shown that there are three wave fronts corresponding to a shear wave modified with allowance for free rotation and two rotation waves.

Examples of calculations for a granular composite of aluminum shot in an epoxy matrix are presented.

© PNRPU

Введение

С развитием современной науки и техники требуется точное знание процессов деформирования материалов с усложненной структурой. Этому требованию отвечают модели упругих моментных сред, к которым, в том числе, относится модель Коссера. Общая теория такой несимметричной теории упругости впервые была разработана братьями Коссера (Э. и Ф. Коссера) [1].

В настоящий момент моментная теория упругости привлекает внимание многих исследователей. В [2] рассмотрена динамическая связанная осесимметричная задача микрополярной теории термоупругости для изотропных слоев, полупространства или пространства. А в работах [3–5] получены решения аналогичных нестационарных осесимметричных задач для однородной изотропной среды псевдокоссера. В статьях [6,7] построены решения двумерных нестационарных задач для упругих моментных полупространств и полуплоскости. В работах [8, 9] исследованы осесимметричные задачи для упругих тел со сферическими границами. В [10, 11] исследованы особенности распространения плоских периодических и уединенных волн. В работе [12] рассматривается задача о распространении поверхностных волн в среде Коссера (случай полупространства), в [13] исследовано распространение нестационарных поверхностных возмущений для

полуплоскости, заполненной псевдоконтинуумом Коссера. Континуальная модель слоистой среды изучалась Н.В. Зволинским и К.Н. Шхинек в работе [14].

В статье [15] рассматривается начально-краевая задача для тонкой пластинки с позиций общей трехмерной несимметричной теории упругости. В статье [16] исследуется динамическая задача для микрополярных упругих тел при помощи использования метода собственных значений. В [17] рассматривается динамическая связанная осесимметричная задача микрополярной теории упругости для бесконечной в радиальном направлении изотропной среды. В статье [18] получен ряд новых аналитических решений статических и динамических волновых задач линейной упругой среды Коссера. В цикле работ М.А. Кулеша рассматриваются задачи о распространении объемных продольных и поперечных волн [19]. В статье [20] изучаются одномерные динамические уравнения микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением и «малой сдвиговой жесткостью». В том числе рассматриваются свободные колебания балок при шарнирном опирании на концах. В статье [21] динамическая задача моментной теории упругости о трещине конечной длины при нормальной нагрузке на берегах методом интегральных преобразований сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно пе-

ремещений и поворотов, которая решается численно. Нелинейные моментные теории упругости рассматриваются в работах [22–26]. В статье [27] рассматриваются поверхностные волны в упругом слоистом полупространстве с периодическим изменением жесткости по глубине.

Целью работы является постановка задач о распространении нестационарных антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера.

1. Постановка задачи

Рассмотрим однородное изотропное упругое моментное пространство со сферической полостью радиусом R , занятое средой Коссера [28]. Используем сферическую систему координат r, θ, ϑ где $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \vartheta < 2\pi$, с началом в центре полости и ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\vartheta$.

Полагаем, что движение является аналогом рассматриваемой в теории упругости антиплоской деформации – антисимметричным относительно полупрямой $\theta = 0$, что соответствует следующим полям перемещений \mathbf{u} и вращения $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{u} = u(r, \theta, t)\mathbf{e}_\vartheta, \boldsymbol{\omega} = \omega_r(r, \theta, t)\mathbf{e}_r + \omega_\theta(r, \theta, t)\mathbf{e}_\theta,$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \Psi(r, \theta, t)\mathbf{e}_\vartheta, \Phi = \Phi(r, \theta, t).$$

При этом координаты вектора $\boldsymbol{\omega}$ связаны со скалярным Φ и векторным $\boldsymbol{\Psi} = \Psi(r, \theta, t)\mathbf{e}_\vartheta$ потенциалами следующим образом:

$$\omega_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi \sin \theta), \omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Psi)}{\partial r}. \quad (1)$$

Такое движение среды описывается тремя уравнениями [28]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{2\alpha}^2 D(u) - \frac{2\alpha}{\rho} D(\Psi),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c_4^2 \Delta \Phi - \frac{4\alpha}{J} \Phi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c_3^2 D(\Psi) + \frac{2\alpha}{J} (u - 2\Psi), \quad (2)$$

где

$$D(u) = \Delta u - \frac{u}{r^2 \sin^2 \theta}, \Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right),$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, c_4 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, c_{2\alpha}^2 = c_2^2 + \frac{\alpha}{\rho}.$$

Здесь t – время; μ, ρ и J – упругая постоянная Ламе, плотность и мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции); $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические параметры континуума Коссера, характеризующие наличие моментных эффектов; c_2, c_3, c_4 и $c_{2\alpha}$ – скорости распространения волн; Δ – оператор Лапласа для скалярной функции.

Полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ возмущения отсутствуют:

$$u|_{r=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{r=0} = 0, \Phi|_{r=0} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{r=0} = 0,$$

$$\Psi|_{r=0} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{r=0} = 0, \quad (3)$$

а на границе полости заданы кинематические возмущения

$$u|_{r=R} = U_0(\theta, \tau), \omega_r|_{r=R} = \Omega_{r0}(\theta, \tau), \omega_\theta|_{r=R} = \Omega_{\theta0}(\theta, \tau). \quad (4)$$

Решение начально-краевой задачи (1)–(4) разыскивается в классе ограниченных функций.

Выражения для компонент тензоров напряжений и моментных напряжений в силу громоздкости здесь не приводятся, и далее ограничимся нахождением только кинематических параметров среды.

Отметим, что частный случай граничных условий (4) соответствует жестко сцепленному с полостью единичного радиуса абсолютно твердому шару, поворачивающемуся вокруг оси $\theta = 0$ по закону $\Omega(\tau)$. Действительно, при этом вектор поворота $\boldsymbol{\Omega}$ и правые части последних двух равенств в (4) имеют вид:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta),$$

$$\Omega_{r0} = \Omega \cos \theta, \Omega_{\theta0}(\theta, \tau) = -\Omega \sin \theta.$$

Вектор перемещения поверхности шара \mathbf{U} и правая часть первого равенства в (4) определяются так:

$$\mathbf{U} = \Omega \sin \theta \mathbf{e}_\vartheta, U_0 = \Omega \sin \theta.$$

Далее везде будем использовать безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в последующем изложении опущены):

$$r' = \frac{r}{R}, \tau = \frac{c_1 t}{R}, u' = \frac{u}{R}, U'_0 = \frac{U_0}{R}, \Phi' = \frac{\Phi}{L},$$

$$\Psi' = \frac{\Psi}{L}, \gamma_0^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \alpha' = \frac{\alpha}{\rho c_1^2}, \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \eta_{1\alpha}^+ = \gamma_1^{-2} + \alpha,$$

где λ – упругая постоянная Ламе; c_1 – скорость распространения волн растяжения-сжатия.

В этих величинах кинематические соотношения (1) и граничные условия (4) сохраняют свой вид, а уравнения (2) и начальные условия (3) записываются следующим образом (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени τ):

$$\ddot{\Phi} = \gamma_0^2 \Delta \Phi - 4\alpha \nu \Phi,$$

$$\ddot{u} = \eta_{1\alpha}^+ D(u) - 2\alpha D(\Psi), \ddot{\Psi} = \gamma_2^2 D(\Psi) + 2\alpha \nu (u - 2\Psi). \quad (5)$$

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \Phi|_{\tau=0} = \dot{\Phi}|_{\tau=0} = \Psi|_{\tau=0} = \dot{\Psi}|_{\tau=0} = 0. \quad (6)$$

2. Представление решения в виде рядов

Потенциалы, перемещения и координаты вектора вращения представляем в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$ [30]:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \omega_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \Phi_n \\ \omega_{rn} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta),$$

$$\begin{pmatrix} u \\ \Psi \\ \omega_{\theta n} \end{pmatrix} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ \Psi_n \\ \omega_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).$$

Подставляя их в (1), получаем

$$\begin{aligned} \omega_{rn} &= \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - n(n+1) \frac{\Psi_n}{r} \quad (n \geq 0), \\ \omega_{\theta n} &= \frac{\Phi_n}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi_n)}{\partial r} \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом уравнения (5) и условия (4), (6) переходят в следующие равенства:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_n &= \gamma_0^{-2} \Delta_n \Phi_n - 4\alpha\nu \Phi_n \quad (n \geq 0), \\ \dot{u}_n &= \eta_{1\alpha}^+ \Delta_n u_n - 2\alpha \Delta_n \Psi_n, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi}_n &= \gamma_2^{-2} \Delta_n \Psi_n + 2\alpha\nu (u_n - 2\Psi_n) \quad (n \geq 1), \\ \omega_{rn}|_{r=1} &= \omega_{r0n}(\tau) \quad (n \geq 0), u_n|_{r=1} = u_{0n}(\tau), \\ \omega_{\theta n}|_{r=1} &= \omega_{\theta 0n}(\tau) \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_n|_{\tau=0} &= \dot{\Phi}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 0), u_n|_{\tau=0} = \\ &= \dot{u}_n|_{\tau=0} = \Psi_n|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использованы разложения в ряды правых частей условий (4):

$$\begin{aligned} U_0(\theta, \tau) &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(\tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\ \Omega_{r0}(\theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{r0n}(\tau) P_n(\cos \theta), \\ \Omega_{\theta 0}(\theta, \tau) &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\theta 0n}(\tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Соотношения (7)–(10) при каждом n вместе с требованием ограниченности образуют независимые начально-краевые задачи.

3. Изображения общего решения

Для решения этих задач применяем к ним преобразование Лапласа по времени (S – параметр; индекс «L» обозначает трансформанту). В результате получаем краевые задачи относительно изображений:

$$s^2 \Phi_n^L = \gamma_0^{-2} \Delta_n \Phi_n^L - 4\alpha\nu \Phi_n^L \quad (n \geq 0). \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s^2 u_n^L &= \eta_{1\alpha}^+ \Delta_n u_n^L - 2\alpha \Delta_n \Psi_n^L, \\ s^2 \Psi_n^L &= 2\alpha\nu u_n^L + (\gamma_2^{-2} \Delta_n - 4\alpha\nu) \Psi_n^L \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \omega_{rn}^L|_{r=1} &= \omega_{r0n}^L(s) \quad (n \geq 0), u_n^L|_{r=1} = u_{0n}^L(s), \\ \omega_{\theta n}^L|_{r=1} &= \omega_{\theta 0n}^L(s) \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{rn}^L &= \frac{\partial \Phi_n^L}{\partial r} - n(n+1) \frac{\Psi_n^L}{r} \quad (n \geq 0), \\ \omega_{\theta n}^L &= \frac{\Phi_n^L}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi_n^L)}{\partial r} \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (14)$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид [31–33]

$$\begin{aligned} \Phi_n^L &= \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Z_{ln}(\lambda_0 r), \lambda_0 = \gamma_0 \sqrt{s^2 + 4\alpha\nu} \quad (\text{Re } \lambda_0 > 0), \\ Z_{1n}(z) &= \frac{1}{\sqrt{z}} K_{n+1/2}(z), Z_{2n}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} I_{n+1/2}(z). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $C_{nl}^{(0)}$ – постоянные интегрирования; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν .

Для построения общего решения системы из второго и третьего уравнений (12) используем достаточно просто доказываемое утверждение.

Пусть матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L(y) = Ay, L(y) = \sum_{k=0}^m b_{m-k}(x) y^{(k)}(x), \quad (16)$$

$$y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T, A = (a_{ij})_{n \times n} \quad (x, a_{ij} \in \mathbb{R}),$$

где a_{ij} не зависит от x , имеет простой спектр с собственными значениями λ_k и собственными векторами Y_k ($k=1, 2, \dots, n$). Тогда ее общее решение имеет вид

$$y = Tz, T = (Y_1, \dots, Y_n),$$

$$z = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))^T, z_k = \sum_{l=1}^m C_{kl} F_{kl}(x).$$

где $\{F_{kl}(x)\}$ ($l=1, 2, \dots, m$) – фундаментальные системы решений уравнений $L(z_k) = \lambda_k z_k$, а C_{kl} – произвольные постоянные.

В свете этого утверждения систему уравнений записываем в матричном виде

$$\begin{aligned} C\Delta_n \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ -2\alpha\nu & (s^2 + 4\alpha\nu) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \eta_{1\alpha}^+ & -2\alpha \\ 0 & \gamma_2^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и приводим ее к канонической форме (16):

$$\Delta_n \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} = \frac{\gamma_2^2}{\eta_{1\alpha}^+} \begin{pmatrix} (\gamma_2^2 s^2 - 4\alpha^2 \nu) & 2\alpha (s^2 + 4\alpha \nu) \\ -2\alpha \nu \eta_{1\alpha}^+ & \eta_{1\alpha}^+ (s^2 + 4\alpha \nu) \end{pmatrix}.$$

Далее строим характеристическое уравнение матрицы \mathbf{A} относительно собственных значений λ^2 . Как оказывается, оно совпадает с аналогичным уравнением для осесимметричной задачи [30], и его корни определяются так:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{B_0 + \alpha B_1 \pm \sqrt{D_0 - 2\alpha D_1 + \alpha^2 D_2}}{2(1 + \alpha \gamma_1^2)},$$

$$B_0 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) s^2, \quad B_1 = \gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\nu), \quad D_0 = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^2 s^4,$$

$$D_1 = \gamma_2^2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\nu),$$

$$D_2 = \gamma_2^2 \left[\gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4\nu)^2 - 16\nu \gamma_1^4 s^2 \right].$$

Соответствующие λ_k^2 собственные векторы есть решения систем линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{A} - \lambda_k^2 \mathbf{E}) \mathbf{Y}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}_k = (y_{1k}, y_{2k})^T.$$

Их выбираем так, чтобы имела место линейная независимость и при $\alpha = 0$:

$$y_{11} = \gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha \nu) - \lambda_1^2, \quad y_{21} = 2\alpha \gamma_2^2 \nu,$$

$$y_{12} = -2\alpha \gamma_1^2 \gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha \nu), \quad (17)$$

$$y_{22} = \gamma_1^2 (s^2 - 4\alpha^2 \gamma_2^2 \nu) - \lambda_2^2 (1 + \alpha \gamma_1^2).$$

Следовательно, в соответствии с (16) общее решение системы уравнений (12) имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_n^L \\ \Psi_n^L \end{pmatrix} = \sum_{k,l=1}^2 \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} C_{nl}^{(k)}(s) Z_{ln}(\lambda_k r).$$

Далее, подставляя (15) в (14), с учетом свойств функций Бесселя получаем следующие результаты:

$$\omega_m^L = \lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) X_{ln}(\lambda_0 r) +$$

$$+ n(n+1) \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} C_{nl}^{(k)}(s) \lambda_k Y_{ln}(\lambda_k r),$$

$$\omega_{\theta n}^L = -\lambda_0 \sum_{l=1}^2 C_{nl}^{(0)}(s) Y_{ln}(\lambda_0 r) +$$

$$+ \sum_{k,l=1}^2 y_{2k} \lambda_k C_{nl}^{(k)}(s) Y_{l+2,n}(\lambda_k r),$$

$$u_n^L = \sum_{k,l=1}^2 y_{1k} C_{nl}^{(k)}(s) Z_{ln}(\lambda_k r). \quad (18)$$

Здесь использованы обозначения

$$X_{ln}(z) = Z'_{ln}(z) = \frac{1}{z} \left[n Z_{ln}(z) + (-1)^l z Z_{l,n+1}(z) \right], \quad (19)$$

$$Y_{ln}(z) = -\frac{1}{z} Z_{ln}(z), \quad Y_{l+2,n}(z) = Y_{ln}(z) - X_{ln}(z).$$

4. Изображения решения задачи

Поскольку функция Бесселя $I_{n+1/2}(z)$ неограничена в окрестности бесконечно удаленной точки [30], то в силу (15) и (19) таковыми же являются и функции $Z_{2n}(z)$, $X_{2n}(z)$, $Y_{2n}(z)$. Следовательно, в (18) необходимо положить $C_{n2}^{(j)}(s) = 0$ ($j = 0, 1, 2$). Подставляя теперь с учетом этого равенства (18) в (13), получаем алгебраические уравнения относительно постоянных интегрирования:

$$s C_{01}^{(0)}(s) X_{10}(s) = w_{00}^L(s).$$

$$\mathbf{A}_n \mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n \quad (n \geq 1),$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0) & n(n+1) y_{21} \lambda_1 Y_{1n}(\lambda_1) & n(n+1) y_{22} \lambda_2 Y_{1n}(\lambda_2) \\ -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0) & y_{21} \lambda_1 Y_{3n}(\lambda_1) & y_{22} \lambda_2 Y_{3n}(\lambda_2) \\ 0 & y_{11} Z_{1n}(\lambda_1) & y_{12} Z_{1n}(\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} C_{n1}^{(0)}(s) \\ C_{n1}^{(1)}(s) \\ C_{n1}^{(2)}(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} \omega_{0n}^L(\lambda_0) \\ \omega_{\theta n}^L(\lambda_0) \\ u_{0n}^L(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Подставляя их решения в (14), получаем изображения искомых функций:

$$\omega_m^L(r, s) = G_{\omega r m}^L(r, s) \omega_{r0n}^L(s) +$$

$$+ G_{\omega \theta r m}^L(r, s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{\omega u r m}^L(r, s) u_{0n}^L(s),$$

$$\omega_{\theta n}^L(r, s) = G_{\omega \theta r n}^L(r, s) \omega_{r0n}^L(s) +$$

$$+ G_{\omega \theta \theta n}^L(r, s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{\omega \theta u n}^L(r, s) u_{0n}^L(s),$$

$$u_n^L(r, s) = G_{u \omega r n}^L(r, s) \omega_{r0n}^L(s) +$$

$$+ G_{u \omega \theta n}^L(r, s) \omega_{\theta 0n}^L(s) + G_{u \omega u n}^L(r, s) u_{0n}^L(s).$$

Здесь $G_{\omega r m}^L(r, s), \dots, G_{u \omega u n}^L(r, s)$ – изображения поверхностных функций влияния, которые определяются так:

$$D_n G_{\omega r m}^L = \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n11} + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n1,k+1},$$

$$D_n G_{\omega \theta r n}^L = \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n21} + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n2,k+1},$$

$$D_n G_{\omega r u n}^L = \lambda_0 X_{1n}(\lambda_0 r) A_{n31} + n(n+1) \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{1n}(\lambda_k r) A_{n3,k+1},$$

$$D_n G_{\omega \theta r n}^L = -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n11} + \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{3n}(\lambda_k r) A_{n1,k+1},$$

$$D_n G_{\omega \theta \theta n}^L = -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n21} + \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{3n}(\lambda_k r) A_{n2,k+1},$$

$$D_n G_{\omega\theta n}^L = -\lambda_0 Y_{1n}(\lambda_0 r) A_{n31} + \sum_{k=1}^2 y_{2k} \lambda_k Y_{3n}(\lambda_k r) A_{n3,k+1}, \quad (21)$$

$$D_n G_{u\omega n}^L = \sum_{k=1}^2 y_{1k} A_{n1,k+1} Z_{1n}(\lambda_k r),$$

$$D_n G_{u\omega\theta n}^L = \sum_{k=1}^2 y_{1k} A_{n2,k+1} Z_{1n}(\lambda_k r),$$

$$D_n(s) G_{u\omega n}^L(r, s) = \sum_{k=1}^2 y_{1k} A_{n3,k+1} Z_{1n}(\lambda_k r),$$

$$D_n(s) = |\mathbf{A}_n| = \lambda_0 [X_{1n}(\lambda_0) A_{n11}(s) - Y_{1n}(\lambda_0) A_{n21}(s)].$$

В этих равенствах и далее $A_{nij}(s)$ – алгебраическое дополнение расположенного в i -й строке и j -м столбце элемента матрицы \mathbf{A}_n .

5. Линейное приближение решения

Получить аналитически оригиналы функций влияния при $n \geq 1$ не представляется возможным. Поэтому используем разложения в степенные ряды по малому параметру α , ограничиваясь только линейными слагаемыми. При этом приближенные равенства заменяем точными.

Соответствующие равенства для $\lambda_{0,1,2}$ и координат (17) собственных векторов имеют вид:

$$\lambda_0 = \gamma_0 \left(s + \frac{2\alpha v}{s} \right), \lambda_1 = \gamma_{1\alpha} s,$$

$$\lambda_2 = \gamma_2 \left(s + \frac{2\alpha v}{s} \right), \gamma_{1\alpha} = \gamma_1 \sqrt{1 - \alpha \gamma_1^2}.$$

$$y_{11} = (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) s^2 + \alpha (\gamma_1^4 s^2 + 4v\gamma_2^2), y_{21} = 2\alpha \gamma_2^2 v,$$

$$y_{22} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2 - \alpha \gamma_2^2 (\gamma_1^2 s^2 + 4v), y_{12} = -2\alpha \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2.$$

Отсюда с учетом (20) следует, что имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$y_{12}, y_{21}, A_{n12}, A_{n22}, A_{n31}, A_{n33} = O(\alpha), \alpha \rightarrow 0.$$

Их использование с учетом связи модифицированных функций Бесселя полуцелого индекса с элементарными функциями [30] позволяет с принятой точностью привести равенства (21) к следующему виду:

$$G_{u\omega n}^L(r, s) = H_{u\omega n}^L(r, s) e^{-\gamma_{1\alpha}(r-1)s},$$

$$H_{u\omega n}^L(r, s) = \frac{R_{n0}(\gamma_{1\alpha} r s)}{r^{n+1} R_{n0}(\gamma_{1\alpha} s)}. \quad (22)$$

$$G_{\omega r n}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=0,2} H_{\omega r n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s},$$

$$G_{\omega\theta n}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=0}^2 H_{\omega\theta n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s},$$

$$G_{u\omega r n}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=1}^2 H_{u\omega r n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s},$$

$$G_{u\omega\theta n}^L(r, s) = \alpha \sum_{k=1}^2 H_{u\omega\theta n}^{(1k)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s}. \quad (23)$$

где

$$H_{\omega r n}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{n(n+1)\gamma_2 k_\omega F_{\omega r n}^{(1k)}(r, s)}{\gamma_1 r^{n+2} s^2 P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=0, 2),$$

$$H_{\omega\theta n}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{\gamma_2 k_\omega F_{\omega\theta n}^{(1k)}(r, s)}{\gamma_1 r^{n+2} s^2 P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=0, 1, 2),$$

$$H_{u\omega r n}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{\gamma_1 \gamma_2 k_\omega F_{u\omega r n}^{(1k)}(r, s)}{r^{n+1} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=1, 2),$$

$$H_{u\omega\theta n}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{\gamma_1 \gamma_2 k_\omega F_{u\omega\theta n}^{(1k)}(r, s)}{r^{n+1} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 s)} \quad (k=1, 2), k_\omega = \frac{2v\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}.$$

$$F_{\omega r n}^{(10)}(r, s) = [R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n3}(\gamma_2 s) - R_{n3}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 s)] R_{n1}(\gamma_0 r s),$$

$$F_{\omega r n}^{(12)}(r, s) = P_n(\gamma_0 s, \gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 r s),$$

$$F_{\omega\theta n}^{(10)}(r, s) = n(n+1) R_{n0}(\gamma_0 r s) \times [R_{n3}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 s) - R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n3}(\gamma_2 s)],$$

$$F_{\omega\theta n}^{(11)}(r, s) = R_{n3}(\gamma_1 r s) P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s),$$

$$F_{\omega\theta n}^{(12)}(r, s) = -R_{n3}(\gamma_2 r s) P_n(\gamma_0 s, \gamma_1 s),$$

$$F_{u\omega r n}^{(11)}(r, s) = R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 r s) R_{n0}(\gamma_0 s),$$

$$F_{u\omega r n}^{(12)}(r, s) = -R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 r s) R_{n0}(\gamma_0 s),$$

$$F_{u\omega\theta n}^{(11)}(r, s) = R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_1 r s) R_{n1}(\gamma_0 s),$$

$$F_{u\omega\theta n}^{(12)}(r, s) = -R_{n0}(\gamma_1 s) R_{n0}(\gamma_2 r s) R_{n1}(\gamma_0 s).$$

$$G_{\zeta n}^L(r, s) = G_{\zeta n}^{(0)L}(r, s) + \alpha G_{\zeta n}^{(1)L}(r, s),$$

$$G_{\zeta n}^{(l)L}(r, s) = \sum_{k=0,2} H_{\zeta n}^{(lk)L}(r, s) e^{-\gamma_k(r-1)s} \quad (24)$$

$$(\zeta = \omega r r, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta; l = 0, 1).$$

где

$$H_{\zeta n}^{(0k)L}(r, s) = -\frac{F_{\zeta n}^{(0k)}(r, s)}{r^{n+2} P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s)},$$

$$H_{\zeta n}^{(1k)L}(r, s) = -\frac{2v \tilde{F}_{\zeta n}^{(1k)}(r, s)}{r^{n+2} s^2 P_n^2(\gamma_0 s, \gamma_2 s)},$$

$$\tilde{F}_{\zeta n}^{(1k)}(r, s) = F_{\zeta n}^{(1k)}(r, s) P_n(\gamma_0 s, \gamma_2 s) + F_{\zeta n}^{(0k)}(r, s) P_n^{(1)}(\gamma_0 s, \gamma_2 s).$$

$$F_{\omega r n}^{(00)}(r, s) = -R_{n1}(\gamma_0 s r) R_{n3}(\gamma_2 s),$$

$$F_{\omega r n}^{(02)}(r, s) = n(n+1) R_{n0}(\gamma_2 s r) R_{n0}(\gamma_0 s),$$

$$F_{\omega\theta n}^{(00)}(r, s) = -n(n+1) R_{n1}(\gamma_0 s r) R_{n0}(\gamma_2 s),$$

$$F_{\omega\theta n}^{(02)}(r, s) = n(n+1) R_{n0}(\gamma_2 s r) R_{n1}(\gamma_0 s),$$

$$F_{\omega\theta r n}^{(00)}(r, s) = R_{n0}(\gamma_0 s r) R_{n3}(\gamma_2 s),$$

$$F_{\omega\theta r n}^{(02)}(r, s) = -R_{n0}(\gamma_0 s) R_{n3}(\gamma_2 s r),$$

$$F_{\omega\theta\theta n}^{(00)}(r, s) = n(n+1) R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n0}(\gamma_0 s r),$$

$$F_{\omega\theta\theta n}^{(02)}(r, s) = -R_{n1}(\gamma_0 s) R_{n3}(\gamma_2 s r),$$

$$\begin{aligned}
 F_{\omega r n}^{(10)}(r, s) &= R_{n1}(\gamma_0 s r) R_{n6}(\gamma_2 s) + R_{n2}(\gamma_0 s r) R_{n3}(\gamma_2 s), \\
 F_{\omega r n}^{(12)}(r, s) &= -n(n+1) [R_{n0}(\gamma_2 s r) R_{n5}(\gamma_0 s) + R_{n0}(\gamma_0 s) R_{n5}(\gamma_2 s r)], \\
 F_{\omega \theta n}^{(10)}(r, s) &= n(n+1) [R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n2}(\gamma_0 s r) + R_{n1}(\gamma_0 s r) R_{n5}(\gamma_2 s)], \\
 F_{\omega \theta n}^{(12)}(r, s) &= -n(n+1) [R_{n0}(\gamma_2 r s) R_{n2}(\gamma_0 s) + R_{n1}(\gamma_0 s) R_{n5}(\gamma_2 r s)], \\
 F_{\omega \theta n}^{(10)}(r, s) &= -R_{n0}(\gamma_0 r s) R_{n6}(\gamma_2 s) - R_{n3}(\gamma_2 s) R_{n5}(\gamma_0 r s), \\
 F_{\omega \theta n}^{(12)}(r, s) &= R_{n3}(\gamma_2 r s) R_{n5}(\gamma_0 s) + R_{n0}(\gamma_0 s) R_{n6}(\gamma_2 r s), \\
 F_{\omega \theta n}^{(10)}(r, s) &= -n(n+1) [R_{n0}(\gamma_2 s) R_{n5}(\gamma_0 r s) + R_{n0}(\gamma_0 r s) R_{n5}(\gamma_2 s)], \\
 F_{\omega \theta n}^{(12)}(r, s) &= R_{n1}(\gamma_0 s) R_{n6}(\gamma_2 r s) + R_{n2}(\gamma_0 s) R_{n3}(\gamma_2 s r).
 \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие многочлены [33]:

$$\begin{aligned}
 R_{n0}(z) &= \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k (n-k)! k!}, \\
 R_{n1}(z) &= R_{n+1,0}(z) - n R_{n0}(z), \\
 R_{n2}(z) &= R_{n4}(z) + R_{n1}(z), \quad R_{n3}(z) = R_{n1}(z) - R_{n0}(z), \\
 R_{n4}(z) &= R_{n1}(z) + R_{n0}(z), \\
 R_{n5}(z) &= R_{n1}(z) + R_{n0}(z), \quad R_{n6}(z) = R_{n4}(z) - R_{n0}(z), \\
 P_n(x, y) &= R_{n1}(x) R_{n3}(y) - n(n+1) R_{n0}(x) R_{n0}(y), \\
 P_n^{(1)}(x, y) &= R_{n2}(x) R_{n3}(y) + \\
 &+ R_{n1}(x) R_{n6}(y) - n(n+1) [R_{n5}(x) R_{n0}(y) + R_{n0}(x) R_{n5}(y)].
 \end{aligned}$$

6. Оригиналы решения

Из (22)–(24) следует, что коэффициенты перед экспонентами в изображениях функций влияния являются рациональными функциями параметра s . Анализ степеней числителей и знаменателей показывает, что среди этих функций только три неправильные дроби $H_{u\omega n}^L$, $H_{\omega r n}^{(00)L}$ и $H_{\omega \theta n}^{(02)L}$. Выделение у них целых частей приводит к таким результатам:

$$\begin{aligned}
 H_{u\omega n}^L(r, s) &= r^{-1} + H_{u\omega n r}^L(r, s), \\
 H_{\omega r n}^{(00)L}(r, s) &= r^{-1} + H_{\omega r n r}^{(00)L}(r, s), \\
 H_{\omega \theta n}^{(02)L}(r, s) &= r^{-1} + H_{\omega \theta n r}^{(02)L}(r, s),
 \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь функции с дополнительным индексом « r » – правильные дроби. Их оригиналы так же, как и оригиналы остальных коэффициентов перед экспонентами, достаточно просто находятся с помощью вычетов. При этом обращение преобразования Лапласа для функций в (25) приводит к следующим равенствам [29, 34]:

$$\begin{aligned}
 H_{u\omega n r}(r, \tau) &= r^{-1} \delta(\tau) + H_{u\omega n r r}(r, \tau), \\
 H_{\omega r n r}^{(00)}(r, \tau) &= r^{-1} \delta(\tau) + H_{\omega r n r r}^{(00)}(r, \tau), \\
 H_{\omega \theta n r}^{(02)}(r, \tau) &= r^{-1} \delta(\tau) + H_{\omega \theta n r r}^{(02)}(r, \tau),
 \end{aligned}$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Окончательно оригиналы функций влияния в (23)–(25) в соответствии со свойствами преобразования Лапласа имеют следующий вид ($H(\tau)$ – единичная функция Хевисайда):

$$\begin{aligned}
 G_{u\omega n r}(r, \tau) &= r^{-1} \delta[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] + G_{u\omega n r r}(r, \tau), \\
 G_{u\omega n r r}(r, \tau) &= H_{u\omega n r r}[r, \tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] H[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)], \\
 G_{\zeta n}(r, \tau) &= \alpha \sum_{k=0,2} H_{\zeta n}^{(1k)}[r, \tau - \gamma_k(r-1)] H[\tau - \gamma_k(r-1)] \\
 &(\zeta = \omega r u, \omega \theta u, u \omega r, u \omega \theta),
 \end{aligned}$$

$$G_{\zeta n}(r, \tau) = G_{\zeta n}^{(0)}(r, \tau) + \alpha G_{\zeta n}^{(1)}(r, \tau) \quad (\zeta = \omega r r, \omega r \theta, \omega \theta r, \omega \theta \theta),$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{\omega r n}^{(0)}(r, \tau) &= r^{-1} \delta[\tau - \gamma_0(r-1)] + G_{\omega r n r}^{(0)}(r, \tau), \\
 G_{\omega \theta n}^{(0)}(r, \tau) &= r^{-1} \delta[\tau - \gamma_2(r-1)] + G_{\omega \theta n r}^{(0)}(r, \tau),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\omega r n r}^{(0)}(r, \tau) &= H_{\omega r n r}^{(00)}[r, \tau - \gamma_0(r-1)] H[r, \tau - \gamma_0(r-1)] + \\
 &+ H_{\omega r n r}^{(02)}[r, \tau - \gamma_2(r-1)] H[r, \tau - \gamma_2(r-1)], \\
 G_{\omega \theta n r}^{(0)}(r, \tau) &= H_{\omega \theta n r}^{(00)}[r, \tau - \gamma_0(r-1)] H[r, \tau - \gamma_0(r-1)] + \\
 &+ H_{\omega \theta n r}^{(02)}[r, \tau - \gamma_2(r-1)] H[r, \tau - \gamma_2(r-1)].
 \end{aligned}$$

Вычисление оригиналов правильных дробей проводится методами компьютерной математики в среде Maple 18.

Для регулярной части одной из функций влияния без громоздких выкладок может быть получен явный вид:

$$\begin{aligned}
 G_{\omega r 0 r}(r, \tau) &= H_{\omega r 0 r}[r, \tau - \gamma_0(r-1)] H[\tau - \gamma_0(r-1)], \\
 H_{\omega r 0 r}(r, \tau) &= -(r-1) r^{-2} [\gamma_0^{-1} + 2\alpha v(\tau + \gamma_0 r)] e^{-\tau/\gamma_0}.
 \end{aligned}$$

7. Примеры

В качестве примера рассмотрим среду в виде композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице со следующими физическими характеристиками [2, 32]:

$$\begin{aligned}
 \mu &= 1,89 \text{ ГПа}; \quad c_1 = 2,28 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad c_2 = 0,929 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \\
 c_3 &= 2,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}; \quad \alpha = 7,45 \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$

Скорость c_4 находим с помощью формулы, указанной в [35, 36]:

$$c_4 = c_3 \sqrt{1 + \alpha / (\rho c_2^2)} = 2,485 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Принимая характерный линейный размер, получаем необходимые безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 0,918; \quad \gamma_1 = 2,45; \quad \gamma_2 = 0,919; \\
 \alpha' &= 0,654 \cdot 10^{-3}; \quad v = 5,10 \cdot 10^6.
 \end{aligned}$$

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов для регулярных составляющих функций влияния $G_{\omega r 1 r}$ и $G_{\omega \theta 1 r}$. Два фронта волн – $\tau = \gamma_0(r-1)$ и $\tau = \gamma_2(r-1)$ – здесь сливаются в один разрыв первого рода в силу того, что для используемой среды имеет место приближенное равенство $\gamma_0 \approx \gamma_2$.

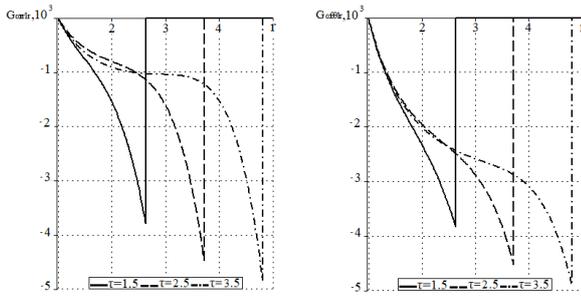


Рис. 1. Распределение регулярных составляющих функций влияния $G_{\omega r r}$ и $G_{\omega \theta \theta}$ по радиусу в различные моменты времени

Fig. 1. Distribution of the regular components of the influence functions $G_{\omega r r}$ and $G_{\omega \theta \theta}$ along the radius at different points in time

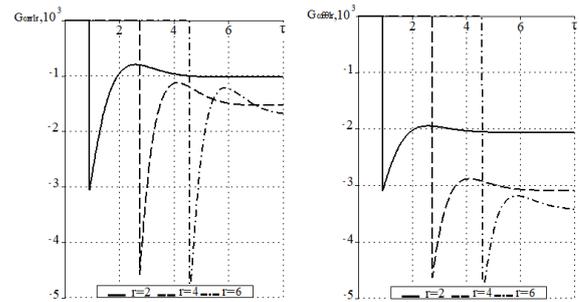


Рис. 2. Зависимость регулярной составляющей функции влияния $G_{\omega r r}$ и $G_{\omega \theta \theta}$ от времени при различных значениях радиуса

Fig. 2. Dependence of the regular component of the influence function $G_{\omega r r}$ and $G_{\omega \theta \theta}$ on time at different values of the radius

Заключение

В линейном приближении по малому параметру аналитически построены поверхностные функции влияния для перемещения и углов поворота в задаче о распространении нестационарных антисимметричных кинематических возмущений от сферической полости в упругом моментном пространстве. Показано, что имеются три волновых фронта, соответствующие модифицированной с учетом свободного вращения волне сдвига и двум волнам вращения. Предложенный алгоритм решения может быть использован как для построения остальных функций влияния, так и для задач с силовыми возмущениями.

Библиографический список

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. – Paris: A. Hermann et fils, 1909. – 226 p.
2. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 328 с.
3. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 2. – С. 184–195.
4. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осе-симметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера [Электронный ресурс] // Труды МАИ – 2012. – № 53. – URL: www.trudymai.ru/published.php?ID=29267/.
5. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 119–125.
6. Белоносов С.М. Моментная теория упругости. – Владивосток: Дальнаука, 1993. – 148 с.
7. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.
8. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела. – Физика твердого тела. – 1964. – Т. 6, вып. 9. – С. 2689–2699.

С помощью полученных результатов решения при произвольных возмущениях могут быть представлены в квадратурах (в свертках по времени).

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-00471).

Acknowledgements

The work was carried out with financial support RFBR (project No. 18-08-00471).

9. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. – Физика твердого тела. – 1960. – Т. 2, вып. 7. – С. 1399–1409.
10. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // Акустический журнал. – 1991. – Т. 37, № 3. – С. 477–483.
11. Ерофеев В.И. Распространение нелинейных сдвиговых волн в твердом теле с микроструктурой // Прикл. механика (Киев). – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 18–22.
12. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. О свойствах поверхностных волн в упругой среде Коссера // Математическое моделирование систем и процессов: сб. науч. тр. – Пермь: ПГТУ, 2006. – Вып. 14. – С. 109–113.
13. Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. – 2012. – Т. 76, Вып. 5. – С. 850–859.
14. Зволинский Н.В., Шхинек К.Н. Континуальная модель слоистой среды // Изв. АН СССР. МТТ. – 1984. – № 1. – С. 5–14.
15. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости. – Изв. АН Армении. Мех. – 2004. – Т. 57, № 2. – С. 18–33.
16. Kumar Rajneesh, Singh Ranjit, Chadha T. K. Eigenvalue approach to second dynamic problem of micropolar elastic solid // Indian J. Pure and Appl. Math. 2003. – Vol. 34, № 5. – P. 743–754.

17. Saxena Hirdeshwar S., Dhaliwal Ranjit S. Application of the eigen-number method to an axisymmetric coupled micropolar thermoelasticity // *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.* – 1990. – Т. 38, № 1. – Р. 7–18.
18. Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости / В.В. Корепанов, М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // *Физ. мезомех.* – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 77–90.
19. Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, М.В. Улитин, И.Н. Шардаков // *Прикл. мех. и техн. физ.* – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 196–203.
20. Birsan Mircea. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells // *Eur. J. Mech. A.* – 2009. – Vol. 28, № 1. – P. 94–101.
21. Han S.Y., Narasimhan M.N.L., Kennedy T.C. Dynamic propagation of a finite crack in a micropolar elastic solid // *Аста месн.* – 1990. – Vol. 85, № 3–4. – P. 179–191.
22. Бровка Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // *Известия РАН. Мех. тверд. тела.* – 2008. – № 1. – С. 22–36.
23. Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Механика Коссера для наук о земле // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 44–66.
24. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 143–150.
25. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // *Прикл. мех. и техн. физ.* – 2005. – Т. 46, № 4. – С. 116–124.
26. Куниин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
27. Muhlhaus H.-B., Triantafyllidis Th. Surface waves in a layered half-space with bedding stiffness // *Ground Motion and Eng. Seismol. Amsterdam e. a.* – 1987. – P. 277–290.
28. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975 – 872 с.
29. Волны в сплошных средах / А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
30. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
31. Lam V. Nguyen, Tarlakovskii D.V. Propagation of Non-stationary Axisymmetric Perturbations from a Spherical Cavity in Cosserat Medium // *Advanced Structured Materials.* – Vol. 122. *Nonlinear Wave Dynamics.* – Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 273–292.
32. Gauthier R.D., Jahsmann W.E. A quest for micropolar elastic constants. Part II // *Arch. Mech.* – 1981. – Vol. 33, № 5. – P. 717–737.
33. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 264 с. Перевод: Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. *Transient Aerohydroelasticity of Spherical Bodies.* – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 2001. – 289 p.
34. Ван Дер Поль, Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. – М.: ИЛ, 1952. – 506 с.
35. Деев В.М. Системный анализ уравнений пространственной задачи несимметричной теории упругости в перемещениях // *Математическое моделирование в естественных науках: тез. докл. 10-й Всерос. конф. молодых ученых.* – Пермь, 2001. – С.14.
36. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Волновые процессы в сплошных средах. – Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ. – 2012. – 260 с.

References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables.* Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
2. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoi [Wave Processes in Solids with Microstructure]* (Izd-vo MGU, Moscow, 1999) – 328 p.
3. Lai Tkhan' Tuan, Tarlakovskii D.V. Rasprostranenie nestatsionarnykh kinematicheskikh vozmushchenii ot sfericheskoi polosti v psevdokontinuume Kossera [Propagation of unsteady kinematic perturbations from a spherical cavity in the Cosserat pseudo-continuum] // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii.* – 2011. – V. 17. – № 2. – pp. 184 – 195.
4. Lai Tkhan' Tuan, Tarlakovskii D. V. Rasprostranenie nestatsionarnykh ose-simmetrichnykh vozmushchenii ot poverkhnosti shara, zapolnennogo psevdouprugoi sredoi Kossera [Elektronnyi zhurn] // *Trudy MAI* – 2012. № 53. (www.trudymai.ru/published.php?ID=29267/).
5. Lai Tkhan' Tuan, Tarlakovskii D. V. Difraktsiia nestatsionarnykh voln na sfericheskoi polosti v psevdokontinuume Kossera [Diffraction of unsteady waves by a spherical cavity in the Cosserat pseudo-continuum] // *Radioelektronika. Nanosistemy. Informatsionnye tekhnologii.* – 2013. V. 5, № 1. – pp. 119-125.
6. Belonosov S.M. *Momentnaia teoriia uprugosti [Moment theory of elasticity].* – Vladivostok: Izd-vo Dal'nauka, 1993. – 148 p.
7. Bol'shakov V.I., Andrianov I.V., Danishevskii V.V. *Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnykh materialov s uchetom vnutrennei struktury [Asymptotic methods for calculating the composite materials taking into account the internal structure].* Dnepropetrovsk, Porogi Publ., 2008. – 196 p.
8. Aero E.L., Kuvshinskii E.V. *Kontinual'naia teoriia asimmetricheskoi uprugosti. Ravnovesie izotropnogo tela [Continual theory of asymmetric elasticity].* – *Fizika tverdogo tela.* – 1964. – V.6. No 9. – pp. 2689 – 2699.
9. Aero E.L., Kuvshinskii E.V. *Osnovnye uravneniia teorii uprugosti sred s vrashchatelnym vzaimodeistviem chastits [Basic equations of the theory of elasticity of media with rotational interaction of particles].* – *Fizika tverdogo tela.* – 1960. – V. 2. Vyp. 7. – pp. 1399 – 1409.
10. Erofeev V.I., Potapov A.I. *Nelineinye prodol'nye volny v uprugikh sredakh s momentnymi napriazheniiami [Nonlinear longitudinal waves in elastic media with moment stresses]* // *Akusticheskii zhurnal.* – 1991. – V. 37. № 3. – pp. 477-483.
11. Erofeev V.I. *Rasprostranenie nelineinykh sdvigovalnykh voln v tverdom tele s mikrostrukturoi [Propagation of nonlinear shear waves in a solid with a microstructure]* // *Prikl. mekhanika (Kiev).* – 1993. – V. 29. № 4. – pp.18 – 22.
12. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardaakov I.N. *O svoistvakh poverkhnostnykh voln v uprugoi srede Kossera [Properties of surface waves in an elastic Cosserat medium]* // *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov: Sbornik nauchnykh trudov.* – Perm': PGU, 2006. – Vyp. 14. – pp. 109–113.

13. Suvorov E.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Ploskaia zadacha ob udare tverdogo tela po poluprostranstvu, modeliruemu sredi Kossera [The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modeled by the Cosserat medium] // PMM. – 2012. – V. 76. – Vyp. 5. – pp. 850–859.
14. Zvolinskij N.V., Shhinek K.N. Kontinual'naja model' sloistoj sredi [Continual model of a layered medium] // Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. 1984, no 1, pp. 5-14
15. Atoian A.A., Sarkisian S.O. Zadacha dinamiki tonkoi plastinki na osnove nesimmetrichnoi teorii uprugosti [The problem of the dynamics of a thin plate based on the asymmetric theory of elasticity]. – Izv. AN Armenii. Mekh. – 2004. – V. 57. № 2. – pp. 18–33.
16. Kumar Rajneesh, Singh Ranjit, Chadha T. K. Eigenvalue approach to second dynamic problem of micropolar elastic solid // Indian J. Pure and Appl. Math. 2003. – V. 34. № 5. – PP. 743-754.
17. Saxena Hirdeshwar S., Dhaliwal Ranjit S. Application of the eigen-number method to an axisymmetric coupled micropolar thermoelasticity // Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci. – 1990. – V. 38. № 1. – pp. 7–18.
18. Korepanov V.V., Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Analiticheskie i chislennye resheniia staticheskikh i dinameskikh zadach nesimmetrichnoi teorii uprugosti [Analytical and numerical solutions of static and dynamic problems of asymmetric theory of elasticity] // Fiz. mezomekh. – 2007. – V. 10. – № 5. – pp. 77-90.
19. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Ulitin M.V., Shardakov I.N. Analiz volnovogo resheniia uravnenii elastokinetiki sredi kossera v sluchae ploskikh ob'emnykh voln [Analysis of the wave solution of the equations of elastokinetics of the cosserat medium in the case of plane bulk waves] // Prikl. mekh. i tekhn. fiz. – 2008. – V. 49. – № 2. – pp. 196-203.
20. Birsan Mircea. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells // Eur. J. Mech. A. – 2009. – V. 28. № 1. – P. 94-101.
21. Han S. Y., Narasimhan M. N. L., Kennedy T. C. Dynamic propagation of a finite crack in a micropolar elastic solid // Acta mecn. – 1990. – V. 85. №3–4. – P. 179-191.
22. Brovko G. L., Ivanova O. A. Modelirovanie svoistv i dvizhenii neodnorodnogo odnomernogo kontinuum slozhnoi mikrostruktury tipa Kossera [Modeling the properties and motions of an inhomogeneous one-dimensional continuum of a complex Cosserat-type microstructure] // Izvestiia RAN. Mekh. tverd. tela. – 2008. – № 1. – pp. 22-36.
23. Garagash I.A., Nikolaevskii V.N. Mekhanika Kossera dlia nauk o zemle [Cosserat Mechanics for Geosciences] // Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred. – 2009. – V.2. – № 4. – pp. 44-66.
24. Kulesh M. A., Matveenko V. P., Shardakov I. N. Postroenie analiticheskogo resheniia volny Lemba v ramkakh kontinuum Kossera [Construction of the Analytical Solution of the Lamb Wave in the Framework of the Cosserat Continuum] // Prikl. mekh. i tekhn. fiz. – 2007. – V. 48. – № 1. – pp. 143-150.
25. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Postroenie i analiz analiticheskogo resheniia dlia poverkhnostnoi volny Releia v ramkakh kontinuum Kossera [Construction and Analysis of an Analytical Solution for the Surface Rayleigh Wave within the Framework of the Cosserat Continuum] // Prikl. mekh. i tekhn. fiz. – 2005. – V. 46. – № 4. – pp. 116-124.
26. Kunin I.A. Teoriia uprugikh sred s mikrostrukturoi. Nelokal'naia teoriia uprugosti [Theory of Elastic Media with Microstructure. Nonlocal Theory of Elasticity]. – M.: Nauka, 1975. – 416 p.
27. Muhlhaus H.-B., Triantafyllidis Th. Surface waves in a layered half-space with bedding stiffness // Ground Motion and Eng. Seismol. Amsterdam e. a. – 1987. – pp. 277–290.
28. Novatsky V. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p.
29. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. Volny v sploshnykh sredakh [Waves in Continuous Media]. Moscow, FIZMATLIT publ., 2004. 472 p.
30. Abramowitz M, Stegun I. (Eds.) Spravochnik pospezialnym funkziyam [Handbook of mathematical functions]. Ttransl. from engl. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p.
31. Lam V. Nguyen and Tarlakovskii D.V. Propagation of Non-stationary Axisymmetric Perturbations from a Spherical Cavity in Cosserat Medium // Advanced Structured Materials, V. 122. Nonlinear Wave Dynamics. – Springer Nature Switzerland AG, 2020. – pp. 273–292.
32. Gauthier R.D., Jahsmann W.E. A quest for micropolar elastic constants. Part II // Arch. Mech. – 1981. – V. 33. № 5. – pp. 717-737.
33. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. Nestatsionarnaia aerogidrouprugost' tel sfericheskoi formy [Transient aeroelasticity of spherical – shaped bodies]. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1990. – 264 p.
34. Van Der Pol', Bremmer Kh. Operatsionnoe ischislenie na osnove dvustoronnego preobrazovaniia Laplasa [Transient aeroelasticity of spherical – shaped bodies]. – M.: IL. 1952. – 506 p.
35. Deev V.M. Sistemnyi analiz uravnenii prostranstvennoi zadachi nesimmetrichnoi teorii uprugosti v peremeshcheniakh [System analysis of the equations of the spatial problem of the asymmetric theory of elasticity in displacements] // Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh. Tez.dokl. 10-i Vseros. konf. molodykh uchenykh. – Perm', 2001. – 14p.
36. Gerasimov S.I., Erofeev V.L., Soldatov I.N. Volnovye protsessy v sploshnykh sredakh [Wave Processes in Continuous Media]. Sarov. RFNC – VNIIEF Publ. 2012. 260 p.