

Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 237–249. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.20

Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part I. PNRPU Mechanics Bulletin, 2020, no. 4, pp. 237-249. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.20



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.20

УДК 539.3

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ М. УИЛЬЯМСА У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ. ЧАСТЬ I

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
Самара, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 01 июня 2020 г.  
Принята: 16 ноября 2020 г.  
Опубликована: 30 декабря 2020 г.

#### Ключевые слова:

цифровая фотоупругость, поле напряжений у вершины трещины, асимптотическое решение М. Уильямса, высшие приближения, коэффициенты высших приближений.

### АННОТАЦИЯ

С помощью метода цифровой фотоупругости вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в пластине с центральной трещиной в поле одноосного растяжения и в полудиске с вертикальным надрезом для испытаний на трехточечный изгиб. В асимптотическом разложении М. Уильямса удержаны высшие приближения, что позволяет: 1) дать более точную оценку компонент тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений; 2) расширить область, в которой работает асимптотическое представление М. Уильямса. С помощью современного приложения, разработанного специально для интерпретации экспериментальной информации, получаемой с помощью метода фотоупругости, осуществлена цифровая обработка экспериментальных данных: автоматически определены точки с минимальной освещенностью, принадлежащие изохроматическим полосам различных порядков. Найденные координаты точек, принадлежащие изохроматическим полосам разных порядков, используются для вычисления параметров разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений, T-напряжений и коэффициентов высших приближений). Для вычисления коэффициентов разложения М. Уильямса применена итерационная процедура переопределенного метода, основанного на последовательном уточнении коэффициентов разложения. Для пластины с центральным разрезом и полудиска с вертикальным надрезом определены первые пятнадцать коэффициентов разложения М. Уильямса. Экспериментально найденные коэффициенты были использованы для реконструкции поля изохроматических полос у вершины трещины. Показано, что теоретически реконструированное поле изохроматических полос у вершины трещины соответствует картине полос, наблюдаемой в эксперименте. Разработанный алгоритм позволяет найти коэффициенты асимптотического разложения с высокой точностью, включая коэффициенты высших приближений.

© ПНИПУ

© Степанова Лариса Валентиновна – д.ф.-м.н., доц., проф., e-mail: [stepanova.lv@ssau.ru](mailto:stepanova.lv@ssau.ru), iD: [0000-0002-6693-3132](https://orcid.org/0000-0002-6693-3132)

Larisa V. Stepanova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: [stepanova.lv@ssau.ru](mailto:stepanova.lv@ssau.ru), iD: [0000-0002-6693-3132](https://orcid.org/0000-0002-6693-3132)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# EXPERIMENTAL DETERMINATION AND FINITE ELEMENT ANALYSIS OF COEFFICIENTS OF THE MULTI-PARAMETER WILLIAMS SERIES EXPANSION IN THE VICINITY OF THE CRACK TIP IN LINEAR ELASTIC MATERIALS. PART I

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 01 June 2020  
Accepted: 16 November 2020  
Published: 30 December 2020

### Keywords:

digital photoelasticity, stress field near the crack tip, William's asymptotic solution, higher order terms, coefficients of the higher-order terms.

## ABSTRACT

This study aims at obtaining coefficients of the multi-parameter Williams series expansion for the stress field in the vicinity of the central crack in the rectangular plate and in the semi-circular notched disk under bending by the use of the digital photoelasticity method. The higher-order terms in the Williams asymptotic expansion are retained. It allows us to give a more accurate estimation of the near-crack-tip stress, strain and displacement fields and extend the domain of validity for the Williams power series expansion. The program is specially developed for the interpretation and processing of experimental data from the phototelasticity experiments. By means of the developed tool, the fringe patterns that contain the whole field stress information in terms of the difference in principal stresses (isochromatics) are captured as a digital image, which is processed for quantitative evaluations. The developed tool allows us to find points that belong to isochromatic fringes with the minimal light intensity. The digital image processing with the aid of the developed tool is performed. The points determined with the adopted tool are used further for the calculations of the stress intensity factor, T-stresses and coefficients of higher-order terms in the Williams series expansion. The iterative procedure of the over-deterministic method is utilized to find the higher order terms of the Williams series expansion. The procedure is based on the consistent correction of the coefficients of the Williams series expansion. The first fifteen coefficients are obtained. The experimentally obtained coefficients are used for the reconstruction of the isochromatic fringe pattern in the vicinity of the crack tip. The comparison of the theoretically reconstructed and experimental isochromatic fringe patterns shows that the coefficients of the Williams series expansion have a good match.

© PNRPU

## 1. Введение. Интерференционно-оптические методы механики: цифровая фотоупругость, современное состояние и ее приложения в механике разрушения

В современной механике деформируемого твердого тела, в механике разрушения в частности, и ее промышленных приложениях первоочередной задачей, возникающей в теоретическом анализе, при расчете и конструировании инженерных сооружений, является необходимость учета нелинейностей различного вида и сингулярных особенностей, вызванных частичным разрушением у концентраторов напряжений в виде трещин, острых углов, вырезов и включений. Эти задачи не решаются инженерными методами с помощью обычных нормативных методик и требуют разработки более сложных подходов к их решению с использованием математического аппарата механики разрушения, сложных программных комплексов. Высоточные экспериментальные методики часто оказываются единственным средством верификации различных теорий механики деформируемого твердого тела и механики разрушения как одной из ее составных частей. Весьма эффективным следует признать экспериментальные поляризационно-оптические методы определения напряжений. Поэтому поляризационно-оптические методы исследования полей напряжений и перемещений в механике деформируемого

твердого тела используются как в нашей стране, так и за рубежом [1–20]. В целом можно выделить три основных направления развития интерференционно-оптических методов в современной механике деформируемого твердого тела: 1) совершенствование экспериментальной процедуры измерений в методе фотоупругости [1–7]; 2) автоматизация обработки данных фотоупругих измерений и компьютерные программы и коды, автоматизирующие получение и обработку экспериментальной информации, полученной с помощью интерференционно-оптических методов (метода фотоупругих измерений), и развитие методов обработки цифровых изображений, получаемых из интерференционно-оптических методов (метода фотоупругости) [8–13]; 3) приложения метода фотоупругости к механике разрушения и многопараметрическому описанию полей у вершины трещины, решению контактных задач, приложению фотоупругости в смежных областях (задачи механики разрушения в биомеханике, медицине) [14–24]. В настоящей работе метод цифровой фотоупругости используется для вычисления коэффициентов многопараметрического асимптотического поля напряжений у вершины трещины. В последние годы в механике хрупкого разрушения сложилось четкое и ясное понимание необходимости удержания высших приближений в полном асимптотическом разложении поля напряжений М. Уильямса у вершины трещины [8–13, 25–40].

В этих работах показано, что чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых необходимо удерживать в асимптотическом представлении М. Уильямса поля напряжений. Особенно важное значение высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса приобретает при обработке экспериментальной информации вне зависимости от метода исследования полей у вершины трещины. Это остается справедливым как для классического метода фотоупругости, так и для нового метода, вошедшего в употребление – метода корреляции цифровых изображений. Поэтому в работах [27–29, 32, 33] с помощью метода цифровой фотоупругости определены, наряду с коэффициентами интенсивности напряжений и Т-напряжениями, коэффициенты высших приближений асимптотических разложений поля напряжений у вершин трещин в пластинах с двумя горизонтальными и наклонными коллинеарными трещинами одинаковой и различной длины, с двумя горизонтальными и наклонными боковыми надрезами.

Совершенствование экспериментальной процедуры измерений оптической константы материала и методик разделения главных напряжений привлекает внимание многих авторов. В [6] разработана и создана оригинальная установка, состоящая из комбинированного оптико-механического прибора (включающего в себя интерферометр и полярископ), нагрузочного устройства, блока управления и питания, позволяющая измерять главные напряжения и их направления с повышенным пространственным разрешением. В [6] показано, что совмещение оптических схем интерферометра и полярископа в одном оптическом приборе позволяет проводить измерения суммы и разности главных напряжений без изменения оптической схемы. Разработанная в [6] методика математической линеаризации тарировочной кривой позволяет определять разности главных напряжений и их направлений в диапазоне от 0 до 0,5 ширины интерференционной полосы (изохромы) в материалах с низкой оптической чувствительностью. Разработанная оптическая схема зондирования изделия и применение материала с низкой оптической чувствительностью (органическое стекло) для изготовления изделия позволяют исследовать напряженно-деформированные состояния изделий с пространственным разрешением не хуже 0,1 мм. В [7] рассматривается метод трех экспозиций для раздельного получения главных напряжений методом голографической фотоупругости с использованием двух объемных моделей рельса с вклейками из различных оптически чувствительных материалов. Приведен сравнительный анализ экспериментальных данных с аналитическим решением задачи для железнодорожного рельса, который показал хорошую сходимость результатов. Компьютерные программы и коды, автоматизирующие получение и обработку экспериментальной информации, полученной с помощью интерференционно-оптических методов (метода фотоупругих измерений), представляют собой самостоятельное направление

исследований. Например, статья [9] посвящена цифровой обработке интерферограмм (картин интерференционных полос), полученных методом фотоупругости. Для расшифровки картин изохроматических полос разработано приложение, позволяющее практически полностью автоматизировать эту процедуру, избавив от рутинной и трудоемкой работы, которая обычно практически полностью выполняется вручную. На примере классической задачи о диске, сжатом диаметрально противоположными силами, подробно описан алгоритм работы разработанного программного комплекса, включающего в себя следующие основные этапы: предобработку изображения, локализацию интерференционных полос и их трассировку. В результате работы приложения создается текстовый файл, содержащий все данные, необходимые для дальнейшего определения напряженно-деформированного состояния тела (номера изохроматических полос и координаты точек, принадлежащих данной полосе).

В [13] рассматриваются физические основы поляризационно-оптического метода исследования напряжений – метода фотоупругости. С помощью модели линейного осциллятора установлено, что эффект двойного лучепреломления, наблюдаемый у оптически чувствительных материалов при их нагружении, может быть объяснен сдвигом собственных частот осцилляторов – заряженных частиц внутри деформируемого твердого тела. Получено выражение формы оптического коэффициента деформации – величины, служащей для связи разности главных деформаций и относительной разности хода.

Отдельно следует выделить как классические приложения метода фотоупругости, например классическую механику трещин [17–33], так и разнообразные промышленные приложения [25, 37, 38, 41, 42]. В [17] обсуждаются сложные эксперименты, проведенные с помощью метода цифровой фотоупругости, с целью изучения взаимодействия двух несимметричных трещин в условиях двухосного нагружения. В работе вычислены коэффициенты интенсивности напряжений и семь коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса. В работах [23, 24] представлены результаты экспериментального исследования напряженного состояния плоского образца, имеющего геометрические концентраторы напряжений в виде выреза и трещин. Получены поля напряжений в модели при различном количестве трещин-пропиллов. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений. В [25] отмечается, что метод получения плоских картин напряжений внутри тел сложной формы – в том числе на начальных этапах проектирования, до изготовления детали из металла – успешно практикуется при просвечивании на специальных установках поляризованным светом моделей деталей, выполненных из оптически прозрачных материалов. В [37] приведены результаты экспериментального исследования методом фотоупругости напряженного состояния некоторых ответственных деталей и узлов

гидротехнического оборудования, а именно: распределителя (напорного коллектора) ковшовой гидротурбины, шпильки разъема крупных сосудов давления и крышки гидротурбины, сварного соединения лопастей с ободом радиально-осевой турбины, ослабленных трещинами (технологическими или эксплуатационными). Получены коэффициенты интенсивности напряжений в зависимости от формы, местоположения, размеров и взаимодействия трещин. По результатам эксперимента предложены расчетные формулы. В [38] исследованы характеристики пьезооптического преобразователя новой конструкции, обладающего при малых габаритах высокой чувствительностью к деформации. Благодаря оригинальной форме фотоупругого элемента удалось при заданной внешней силе существенно увеличить напряжения в его рабочей области, тем самым повысив чувствительность преобразователя. С помощью специально созданного устройства измерены основные характеристики преобразователя. В [41] представлены результаты численного и физического экспериментов, направленных на исследование напряженного состояния плоского элемента с овальным вырезом и десятью пропилами, имитирующими трещины. Численный эксперимент выполнен с помощью программного комплекса SCAD, а физический – методом фотоупругости. В [42] для исследования гидрофильности полиуретана использован метод оптической поляриметрии. Показано, что при набухании эластомеров возрастает оптическая анизотропия, но уменьшается коэффициент фотоупругости. В работе исследовано изменение оптической анизотропии при деформации полиуретана в условиях длительного действия постоянной силы. Следует упомянуть и цикл работ [27–33]. В статьях [27–33] описан способ определения параметров механики разрушения: коэффициентов интенсивности напряжений, Т-напряжений и коэффициентов высших приближений многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины, основанный на экспериментальном методе цифровой фотоупругости и методе конечных элементов, реализованном в многофункциональном комплексе SIMULIA Abaqus. В рамках натурного эксперимента изготовлена и испытана целая серия образцов с трещинами и надрезами, с помощью которых реализован нормальный отрыв и смешанное нагружение образца с трещиной. С помощью основного закона фотоупругости вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины. Полученные конечно-элементные решения задач для образцов той же конфигурации дали возможность вычисления коэффициентов асимптотического разложения. Сравнение коэффициентов, найденных экспериментально и численно, показало, что экспериментальные и численные значения коэффициентов разложения не отличаются друг от друга более чем на 5 %, что говорит о хорошем совпадении численных расчетов с экспериментом.

В настоящей статье с помощью метода цифровой фотоупругости вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в пластине с центральной трещиной и у вершины надреза в круговом полудиске, предназначенном для испытания на трехточечный изгиб. В разложении М. Уильямса удержаны высшие приближения (пятнадцать слагаемых), что позволяет: 1) дать более точную оценку компонент тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений; 2) расширить область, в которой работает асимптотическое представление М. Уильямса.

## 2. Цифровая фотоупругость: эксперимент и картины изохроматических полос

Целью настоящего эксперимента является экспериментальное определение многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины с помощью метода цифровой фотоупругости:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m r^{k/2-1} f_{m,ij}^{(k)}(\theta), \quad (2.1)$$

где индекс  $m$  принимает значение, равное 1, для нормального отрыва, и 2 – для поперечного сдвига;  $a_k^m$  – амплитудные, масштабные множители, отражающие влияние геометрии образца и системы приложенных нагрузок;  $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$  – угловые распределения компонент тензора напряжений [30, 36]. Универсальные угловые распределения  $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$  хорошо известны из решения краевых задач и приведены в [30, 36]:

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= (k/2) \left[ (2+k/2+(-1)^k) \cos(k/2-1)\theta - (k/2-1) \cos(k/2-3)\theta \right], \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= (k/2) \left[ (2-k/2-(-1)^k) \cos(k/2-1)\theta + (k/2-1) \cos(k/2-3)\theta \right], \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= (k/2) \left[ -(k/2+(-1)^k) \sin(k/2-1)\theta + (k/2-1) \sin(k/2-3)\theta \right], \\ f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -(k/2) \left[ (2+k/2-(-1)^k) \sin(k/2-1)\theta - (k/2-1) \sin(k/2-3)\theta \right], \\ f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -(k/2) \left[ (2-k/2+(-1)^k) \sin(k/2-1)\theta + (k/2-1) \sin(k/2-3)\theta \right], \\ f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= (k/2) \left[ -(k/2-(-1)^k) \cos(k/2-1)\theta + (k/2-1) \cos(k/2-3)\theta \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Все многообразие задач о трещинах проявляется в масштабных, амплитудных множителях  $a_k^m$ , зависящих от конфигурации образца и комбинации прило-

женных нагрузок. В настоящее время сложилось четкое представление о необходимости удержания высших приближений в асимптотическом разложении (2.1). В целом ряде работ [17, 27–29, 44] показано, что удержание высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса позволяет расширить область действия асимптотического разложения. Поэтому в последнее время появляются работы, в которых авторы пытаются определить коэффициенты разложения в замкнутой форме, используя известные теоретические решения [36, 44]. Так, для бесконечной пластины с центральной трещиной в [36] впервые найдены аналитические выражения для всех коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса:

$$a_{2n+1}^1 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)! \sigma_{22}^\infty}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1) a^{n-1/2}}, \quad (2.4)$$

$$a_2^1 = -\sigma_{22}^\infty / 4, \quad a_{2k}^1 = 0$$

для трещины нормального отрыва;

$$a_{2n+1}^2 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)! \sigma_{12}^\infty}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1) a^{n-1/2}}, \quad a_{2k}^2 = 0 \quad (2.5)$$

и поперечного сдвига.

Как было указано выше, целью настоящей работы является экспериментальное и численное определение амплитудных коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса для прямоугольной пластины с центральной трещиной. Формулы (2.4) будут использованы ниже для верификации результатов извлечения масштабных множителей из конечно-элементного анализа. Соотношения (2.4) будут служить и начальным приближением для определения коэффициентов разложения (2.1) для пластины конечных размеров с помощью процедуры минимизации функционала. Для проведения эксперимента была использована проекционно-поляризационная установка ППУ-7, изображенная на рис. 1.



Рис. 1. Проекционно-поляризационная установка

Fig. 1. Experimental setup of transmission photoelasticity

Из оптически активного материала (использовалась эпоксидная смола ЭД-20) была изготовлена серия экс-

периментальных образцов с трещинами и надрезами для исследования поля напряжений в условиях нормального отрыва. Целесообразно начать определение коэффициентов многопараметрических асимптотических разложений поля напряжений в окрестности вершины трещины с наиболее простой и хорошо известной геометрии – пластины с центральной горизонтальной трещиной, находящейся под действием растягивающей нагрузки.

Картинки изохроматических полос в пластине с центральной трещиной при действии растягивающих нагрузок различной интенсивности приведены на рис. 2, 3.

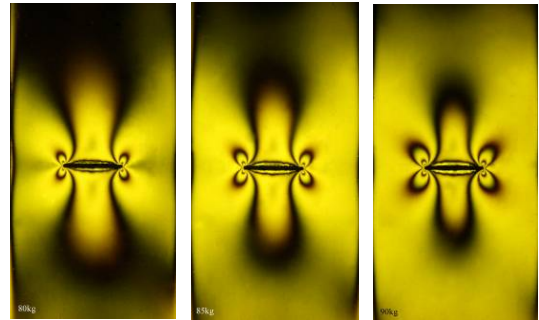


Рис. 2. Картинки изохроматических полос в пластине с центральной трещиной при действии 80, 85 и 90 кг

Fig. 2. Isochromatic fringe patterns in the cracked plate subject to 80 kg, 85 kg and 90 kg

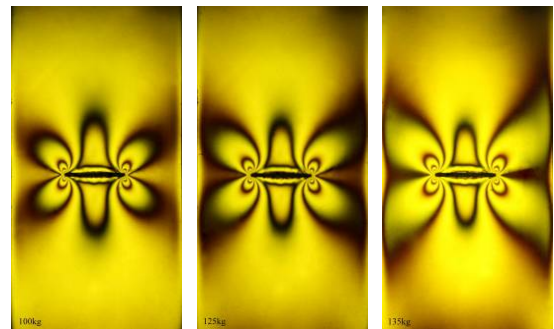


Рис. 3. Картинки изохроматических полос в пластине с центральной трещиной при действии 100, 125 и 135 кг

Fig. 3. Isochromatic fringe patterns in the cracked plate subject to 100 kg, 125 kg and 135 kg

### 3. Цифровая фотоупругость: определение наиболее темных точек изохроматических полос

#### 3.1. Основной оптико-механический закон – закон фотоупругости

Метод фотоупругости основан на явлении двойного лучепреломления, когда в оптически активных средах при падении светового луча последний распадается на два луча, распространяющихся с разными скоростями [45–52]. Согласно закону Вертгейма [45–53] разность хода  $\delta$  обыкновенного и необыкновенного лучей определяется по формуле

$$\delta = N\lambda = ch(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (3.1)$$

где  $N$  – порядок изохроматической полосы;  $\lambda$  – длина волны;  $c$  – оптическая постоянная материала;  $h$  – толщина пластины;  $\sigma_1, \sigma_2$  – величины главных напряжений или

$$Nf_\sigma / h = (\sigma_1 - \sigma_2), \quad (3.2)$$

где  $f_\sigma = \lambda / (ch)$  – оптическая константа материала (цена полосы).

$$\sigma_1, \sigma_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 2 \pm (1/2)\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \quad (3.3)$$

### 3.2. Процедура тарировки

Для применения оптико-механического закона (3.2) необходимо знание оптической константы материала  $f_\sigma$ , определяемой путем процедуры калибровки (или тарировки). Для проведения процедуры тарировки используется стандартный образец – диск, сжатый диаметрально противоположными силами. В рассматриваемом случае образец был изготовлен из оптически чувствительного материала – эпоксидной смолы ЭД-20 (рис. 4, 5).

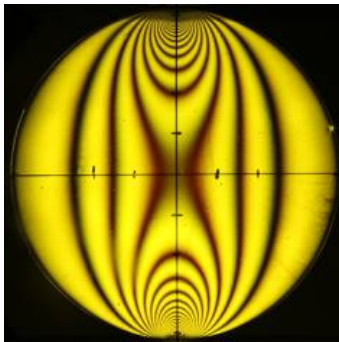


Рис. 4. Картина изохроматических полос в диаметрально сжимаемом диске при действии 180 кг

Fig. 4. Isochromatic fringe pattern in a diametrically loaded circular disk under 180 kg

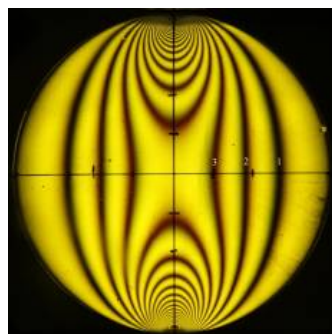


Рис. 5. Картины изохроматических полос в диаметрально сжимаемом диске при действии 210 кг

Fig. 5. Isochromatic fringe pattern in a diametrically loaded circular disk under 210 kg

Следует отметить, что цена полосы для одного от-дельно взятого образца должна быть одинакова при разной степени нагружения. Для определения цены изохроматической полосы использовался круглый диск, нагруженный поочередно силами 120, 140, 180 и 210 кг. Картины изохроматических полос для последних двух нагрузок показанны на рис. 4, 5. Тарировочные испытания были проведены с помощью проекционно-поляри-зационной установки ППУ-7 (см. рис. 1). Для каждого этапа нагружения полученная в ходе эксперимента картина изохроматических полос была сфотографирована, и затем полученные в результате натурного экспери-мента цифровые изображения картин изохроматических полос обработаны с помощью программы PaintNet. Все полученные таким образом координаты точек изобра-жения и номер изохроматической полосы, которой они принадлежат, сохранились в отдельном текстовом фай-ле для каждого этапа нагружения как множество эле-ментов вида  $(N, r_i, \theta_i)$ , здесь индекс  $i$  отвечает поряд-ковому номеру точки,  $N$  – номеру изохроматической полосы.

Компоненты тензора напряжения в этих точках вычис-ляются с использованием следующих соотношений [54]:

$$\sigma_{22} = \frac{2P}{\pi h} \left( \frac{1}{2R} - \frac{(R-x_2)^3}{(x_1^2 + (R-x_2)^2)^2} - \frac{(R+x_2)^3}{(x_1^2 + (R+x_2)^2)^2} \right),$$

$$\sigma_{11} = \frac{2P}{\pi h} \left( \frac{1}{2R} - \frac{x_1^2(R-x_2)}{(x_1^2 + (R-x_2)^2)^2} - \frac{x_1^2(R+x_2)}{(x_1^2 + (R+x_2)^2)^2} \right),$$

где  $R$  – радиус тарировочного диска;  $P$  – приложен-ная сжимающая сила;  $x_1, x_2$  – декартовы прямоугольные координаты с началом в центре диска.

За цену полосы материала принимается среднее по всем измерениям значение. Для реализации описанного выше алгоритма в системе компьютерной алгебры Maple была разработана программа. Значения оптиче-ской постоянной для различных этапов нагружения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения цены полосы  $f_\sigma$  в зависимости от величины нагружения и порядкового номера изохроматической полосы

Table 1

The values of the fringe constant  $f_\sigma$  for the material considered

Нагрузка	Номер полосы		
	1	2	3
120 кг	18,4564 кг/см	18,9572 кг/см	—
140 кг	18,0651 кг/см	18,0381 кг/см	—
180 кг	17,4689 кг/см	18,2419 кг/см	18,6357 кг/см
210 кг	17,742 кг/см	18,3128 кг/см	18,4729 кг/см

Среднее значение всех приведенных величин в табл. 1 дает следующее значение для оптической константы материала: 18,3191 кг/см.

### 3.3. Нахождение скелетона картины изохроматических полос

С развитием цифровой техники процедура проведения испытаний на фотоупругость значительно упростилась: в настоящее время не требуется вручную проводить зарисовку полос непосредственно при проведении самого опыта или вручную обрабатывать полученные фотографии, поскольку теперь есть возможность получения цифровых изображений с высоким разрешением [48]. Однако полученные графические множества требуют расшифровки и обработки, которые также достаточно сложны и требуют больших временных затрат. В связи с этим возникла необходимость в разработке программы, позволяющей провести цифровую обработку картин интерференционных полос: изохроматических полос, получаемых в рамках метода фотоупругости. В ходе работы программы осуществляются: 1) загрузка исходного изображения; 2) предобработка изображения. С целью избавления от шума перед получением координат точек, принадлежащих интерференционным полосам, изображение проходит предобработку. Эта процедура осуществляется при помощи усреднения, в ходе которого изображение пропускается через размывающий фильтр Гаусса радиусом 3–13 пикселей с ядром, имеющим вид

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^2}} e^{-\frac{x^2}{2\omega^2}}, \quad (3.5)$$

где  $\omega$  – радиус окрестности сглаживания;  $x$  – удаление от центра окрестности. Фильтр применяется для каждой точки изображения. После предобработки изображения выделяется скелетон интерференционных полос [48]. Выделение проводится с помощью основанного на масках алгоритма извлечения скелета по измерению интенсивности освещенности в изохроматической полосе. Используется маска 5×5 пикселей, которая перемещается по изображению в различных направлениях (вверх, вниз и по диагонали). Полученные диагональным и горизонтальным сканированием остовы складываются в отдельные изображения, а затем перемножаются с помощью логической операции «и» (рис. 6). Таким образом, в конечном остове остаются только те точки, которые распознаются в обоих случаях.

Далее проводится трассировка точек каждой изохроматической полосы. Трассировка происходит по следующему алгоритму:

- а) последовательный перебор всех точек изображения до тех пор, пока не обнаруживается точка, принадлежащая изохроматической полосе;
- б) движение по полосе с запоминанием ее точек;
- в) если на 1-м шаге точки не закончились, то происходит возвращение на 1-й шаг, иначе – дальше.

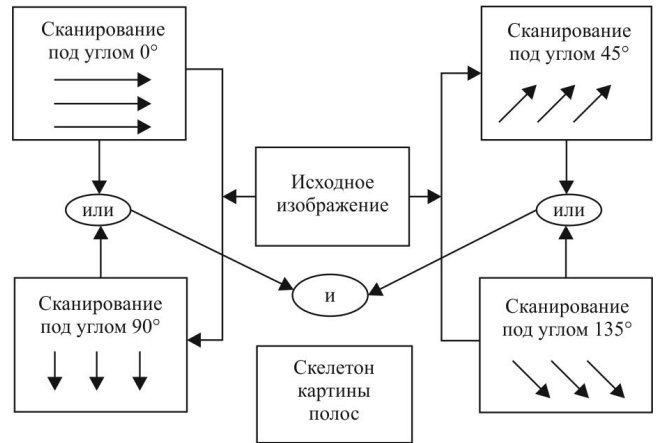


Рис. 6. Общий вид алгоритма построения скелетона изображения изохроматических полос

Fig. 6. The general scheme of the algorithm [48]

Далее проводится нумерация полос с помощью присвоения каждому распознанному множеству своего порядкового номера и выгрузка полученных данных в текстовый файл. Для разработки программы использовался язык программирования JavaScript.

На рис. 7, 8 зеленым цветом показаны точки, найденные в ходе работы предложенного алгоритма. Эти точки образуют так называемый скелетон изохроматической полосы – точки с наименьшей освещенностью.

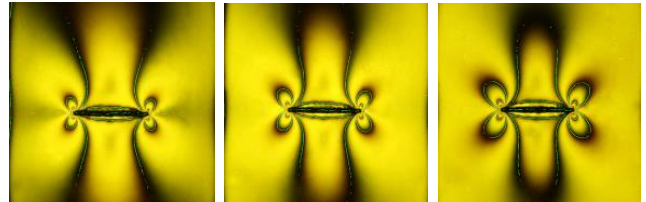


Рис. 7. Результаты цифровой обработки экспериментальной информации

Fig. 7. Fringe skeleton – fringe thinned image

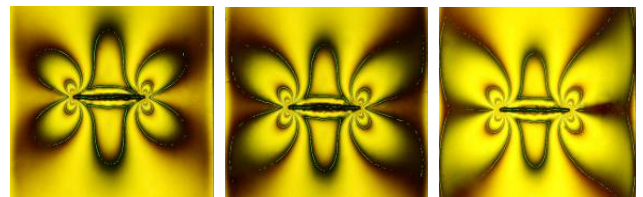


Рис. 8. Результаты цифровой обработки экспериментальной информации (скелетоны изохроматических полос) и точки, используемые для вычисления параметров механики разрушения (внизу)

Fig. 8. Fringe skeleton – fringe thinned image

После цифровой обработки изображений данные объединяются в текстовый файл и используются для дальнейшего вычисления параметров механики разрушения – коэффициента интенсивности напряжений, Т-напряжения и коэффициентов высших приближений.

3.4. Вычисление параметров механики разрушения: переопределенный метод

В соответствии с классической работой [53] в настоящем исследовании была введена функция, вычисляемая для координат  $k$ -й точки изохроматической полосы и изохроматической полосы с порядковым номером  $N$ , которой принадлежит  $k$ -я экспериментальная точка

$$g_k = ((\sigma_{11} - \sigma_{22})/2)_k^2 + (\sigma_{12})_k^2 - (N_k f_\sigma / h)_k^2. \quad (3.6)$$

Если асимптотические разложения для каждой компоненты тензора напряжений (2.1) подставить в выражение (3.6), то получим нелинейную функцию относительно неизвестных  $a_1^1, a_2^1, \dots, a_M^1$ , где  $M$  – число параметров, удерживаемых в асимптотическом разложении (2.1). Если для амплитудных множителей  $a_1^1, a_2^1, \dots, a_M^1$  было взято некоторое начальное приближение  $(a_1^1)_0, (a_2^1)_0, \dots, (a_M^1)_0$ , то в общем случае функция  $g_k$  отлична от нуля. Для коррекции значений масштабных множителей  $a_1^1, a_2^1, \dots, a_M^1$  рассматривается разложение функции  $g_k(a_1^1, a_2^1, \dots, a_M^1)$  в ряд Тейлора, в котором удерживаются линейные относительно  $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \dots, \Delta a_M^1$  слагаемые

$$(g_k)_{i+1} = (g_k)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial a_M^1} (\Delta a_M^1)_i, \quad (3.7)$$

где индекс « $i$ » обозначает  $i$ -ю итерацию и  $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \dots, \Delta a_M^1$  представляют собой поправки к предыдущим значениям масштабных множителей  $a_1^1, a_2^1, \dots, a_M^1$ :  $(\Delta a_j^1)_i = (a_j^1)_{i+1} - (a_j^1)_i$ . Поправки определяются из решения уравнения  $(g_k)_{i+1} = 0$ , и, таким образом, для нахождения масштабных множителей имеется система линейных алгебраических уравнений

$$-(g_k)_i = \frac{\partial g_k}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial a_M^1} (\Delta a_M^1)_i. \quad (3.8)$$

Применяя данную схему к  $L$  экспериментальным точкам, можно получить переопределенную систему  $L$  уравнений относительно  $M$  неизвестных величин  $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \dots, \Delta a_M^1$ . Результаты вычислений сведены в табл. 2. Коэффициенты  $a_1^1, a_2^1, \dots, a_M^1$  определяются в ходе итерационной процедуры. Коэффициенты считаются определенными, если их значения, определенные на  $i+1$ , шаге не отличаются от значений на  $i$ -м шаге более чем на  $\epsilon = 10^{-6}$ , где  $\epsilon = 10^{-6}$  – заранее заданная точность. На примере пластины с центральной трещиной

установлено, что достаточно всего восемь-десять итераций для достижения заранее заданной точности  $\epsilon = 10^{-6}$ .

Таблица 2

Коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса для пластины, используемой в натурном эксперименте с помощью метода фотоупругости

Table 2

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with the central crack with the geometric parameters as in the experimental photoelasticity method

Coefficients of Williams' power series obtained by the digital photoelasticity method
$a_1^1 = 72,528 (\text{кГ/см}^{3/2})$
$a_2^1 = -27,517 (\text{кГ/см}^2)$
$a_3^1 = 21,406 (\text{кГ/см}^{5/2})$
$a_4^1 = -0,337 (\text{кГ/см}^3)$
$a_5^1 = -2,844 (\text{кГ/см}^{7/2})$
$a_6^1 = -0,919 (\text{кГ/см}^4)$
$a_7^1 = 0,965 (\text{кГ/см}^{9/2})$
$a_8^1 = 0,025 (\text{кГ/см}^5)$
$a_9^1 = -0,340 (\text{кГ/см}^{11/2})$
$a_{10}^1 = -0,017 (\text{кГ/см}^6)$
$a_{11}^1 = 0,098 (\text{кГ/см}^{13/2})$
$a_{12}^1 = 0,019 (\text{кГ/см}^7)$
$a_{13}^1 = 0,056 (\text{кГ/см}^{15/2})$
$a_{14}^1 = 0,008 (\text{кГ/см}^8)$
$a_{15}^1 = 0,018 (\text{кГ/см}^{17/2})$

На рис. 9 показано теоретически реконструированное поле изохроматических полос, построенное с помощью приведенных в табл. 2 коэффициентов.



Рис. 9. Теоретически реконструированная картина изохроматических полос в пластине у правой вершины трещины

Fig. 9. Theoretically reconstructed isochromatic fringe patterns in the plate near the right tip of the central crack

Картина слева получена с помощью двучленного разложения М. Уильямса. Картина изохроматических полос в центре построена с помощью пятичленного разложения. Картина справа получена для разложения М. Уильямса при удержании 15 слагаемых. Видно, что



увеличение числа удерживаемых слагаемых (вплоть до 15 слагаемых) приводит к картине изохроматических полос, совпадающей с экспериментальной картиной.

**4. Экспериментальное определение коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса для полудиска с надрезом из эксперимента на фотоупругость**

Наряду с пластиной с центральной трещиной в настоящей работе рассмотренная методика была применена к сравнительно новому образцу с надрезом – полудиску с вертикальным надрезом, который используется для испытаний на трехточечный изгиб. Целью настоящего экспериментального подхода является определение коэффициентов высших приближений многопараметрического разложения М. Уильямса для образца данной геометрии. Размеры образца следующие: радиус полудиска 5 см, длина надреза 1,92 см, толщина образца 4,9 мм. Интерференционная картина изохроматических полос показана на рис. 10–12, где также представлены результаты работы программы, выделяющей точки изохроматической полосы с минимальной освещенностью. Скелетон изохроматической полосы показан зеленым цветом.

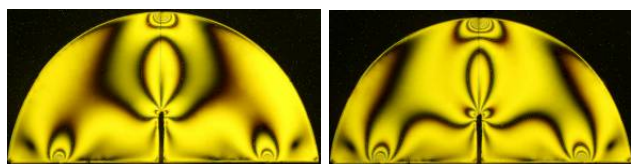


Рис. 10. Картина изохроматических полос в полудиске с надрезом, нагруженным силой 25 и 35 кГ, и скелетон изохроматических полос (точки зеленого цвета)

Fig. 10. Isochromatic fringe pattern in semi-circular bend specimen subject to load of 25 kg and 35 kg and fringe thinned images for the vertical notch

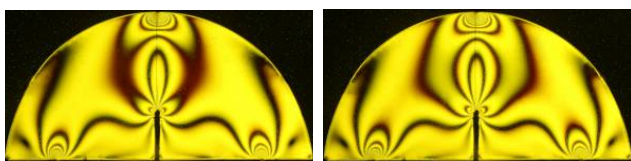


Рис. 11. Картина изохроматических полос в полудиске с надрезом, нагруженным силой 40 и 50 кГ, и скелетон изохроматических полос (точки зеленого цвета)

Fig. 11. Isochromatic fringe pattern in semi-circular bend specimen subject to load of 40 kg and 50 kg and fringe thinned images for the vertical notch

Выделенные точки были использованы для вычисления коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса (2.1). В вычислениях были использованы 219 точек, принадлежащих изохроматическим полосам различных порядков. Далее была получена система линейных алгебраических уравнений, из которых путем применения вышеописанной

итерационной процедуры определены первые пятнадцать коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса. Результаты вычислений приведены в табл. 3.

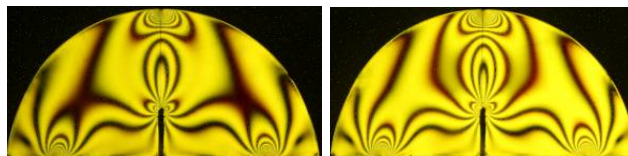


Рис. 12. Картина изохроматических полос в полудиске с надрезом, нагруженным силой 60 кГ и 75 кГ и скелетон изохроматических полос (точки зеленого цвета)

Fig. 12. Isochromatic fringe pattern in semi-circular bend specimen subject to load of 40 kg and 50 kg and fringe thinned images for the vertical notch

Таблица 3

Коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в полудиске с вертикальным надрезом для испытаний на трехточечный изгиб

Table 3

Coefficients of the Williams series expansion in SCB specimen

Метод цифровой фотоупругости
$a_1^1 = 111,59591 (\text{кГ}/\text{см}^{3/2})$
$a_2^1 = -0,878516 (\text{кГ}/\text{см}^2)$
$a_3^1 = -1,99875 (\text{кГ}/\text{см}^{5/2})$
$a_4^1 = 0,023112 (\text{кГ}/\text{см}^3)$
$a_5^1 = -0,00894 (\text{кГ}/\text{см}^{7/2})$
$a_6^1 = -0,003450 (\text{кГ}/\text{см}^4)$
$a_7^1 = 0,020154 (\text{кГ}/\text{см}^{9/2})$
$a_8^1 = 0,038234 (\text{кГ}/\text{см}^5)$
$a_9^1 = -0,010154 (\text{кГ}/\text{см}^{11/2})$
$a_{10}^1 = -0,011045 (\text{кГ}/\text{см}^6)$
$a_{11}^1 = -0,012022 (\text{кГ}/\text{см}^{13/2})$
$a_{12}^1 = 0,012189 (\text{кГ}/\text{см}^7)$
$a_{13}^1 = 0,012201 (\text{кГ}/\text{см}^{15/2})$
$a_{14}^1 = -0,012894 (\text{кГ}/\text{см}^8)$
$a_{15}^1 = 0,001981 (\text{кГ}/\text{см}^{17/2})$

**Выводы**

В работе с помощью метода цифровой фотоупругости вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины для двух различных конфигураций: для пластины с центральной трещиной в поле одноосного растяжения и полудиска с надрезом в условиях трехточечного изгиба.

чечного изгиба. Вычислены первые пятнадцать коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений у вершины трещины. На примере пластины с центральной трещиной показана необходимость удержания высших приближений. Показано, что невозможно экспериментально точно определить параметры механики разрушения, такие как коэффициент интенсивности напряжений и T-напряжения, не учитывая коэффициенты высших приближений. Особенно представляется это важным при обработке экспериментальной информации, поскольку экспериментатор, выбирая экспериментальную точку наблюдения, априори не знает, сколько слагаемых на этом расстоянии от вершины трещины следует удерживать. Для образца, показанного на рис. 2, 3, картина изохроматических полос сразу указывает на необходимость удержания высших приближений, а проведенный анализ свидетельствует, что T-напряжений недостаточно для точного описания поля напряжений в пластине.

Проведенный анализ полей напряжений у вершины трещины и острого надреза в полукруглом диске показал эффективность экспериментального метода

## Библиографический список

1. Sasikumar S., Ramesh K. Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP) // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2020. – Vol. 127. – P. 105963.
2. Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2018. – Vol. 109. – P. 7–16.
3. Brinez J.C., Martinez A.R., Branch J.W. Computational hybrid phase shifting technique applied to digital photoelasticity // *Optik*. – 2018. – Vol. 157. – P. 287–297.
4. Ramakrishnan V., Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part II: Novel fringe resolution guided scanning scheme // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2017. – Vol. 92. – P. 141–149.
5. Ramakrishnan, Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part I: Critical assessment of existing schemes // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2017. – Vol. 92. – P. 129–140.
6. Киселев М.М. Разработка установки для определения главных напряжений с повышенным пространственным разрешением в плоских прозрачных изделиях: дис. ... канд. техн. наук. – Ижевск, 2010.
7. Конищева О.В., Брюховецкая Е.В., Кудрявцев И.В. Трехэкспозиционный метод голографической фотоупругости для исследования объемного напряженного состояния // *Технология машиностроения*. – 2017. – № 1. – С. 45–49.
8. A low-level stress measurement method by integrating white light photoelasticity and spectrometry / P.C. Sung, W.C. Wang, C.H. Hwang, G.-T. Lai // *Optics and Laser Technology*. – 2018. – Vol. 98. – P. 33–45.
9. Косыгин А.Н., Косыгина Л.Н. Цифровая обработка экспериментальных интерферограмм, полученных методом фотоупругости // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. – 2019. – Т. 25, № 2. – С. 75–91.
10. Patil P., Vysasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using

цифровой фотоупругости, подкрепленного конечно-элементным моделированием, приведенным во второй части статьи. Следует отметить, что цифровая обработка экспериментальных данных позволяет применять рассматриваемые в работе подходы при использовании фотоупругих покрытий, наносимых непосредственно на детали; дает возможность применения метода фотоупругости и для исследования пространственных задач и в целом возможность широких приложений метода фотоупругости, о чем свидетельствует повышенный интерес к данной экспериментальной технике в настоящее время [1, 15, 16, 21–24, 31, 34, 54–56].

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00631).

## Acknowledgements

The work was carried out with financial support RFBR (grant No. 19-01-00631).

isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity// *Optics and Lasers in Engineering*. – 2017. – Vol. 93. – P. 182–194.

11. Dolgikh V.S., Stepanova L.V. A photoelastic and numeric study of the stress field in the vicinity of two interacting cracks: Stress intensity factors, T-stresses and higher order terms // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2216. – 020014.

12. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stress / V.S. Pisarev, Y.G. Matvienko, S.I. Eleonsky, I.N. Odintsev // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2017. – Vol. 179. – P. 348–374.

13. Шарафутдинов Г.З. Исследование метода фотоупругости // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2018. – № 3. – С. 135–141.

14. Hariprasad M.P., Ramesh K. Analysis of contact zones from whole field isochromatics using reflection photoelasticity// *Optics and Lasers in Engineering*. – 2018. – Vol. 105. – P. 86–92.

15. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2020. – Vol. 126. – 105855.

16. Yuan Y., Sheng C., Zhang Z. Unified Theoretical Model of Caustic Method for the Interfacial Cracks // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 233. – 107006.

17. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 99. – P. 104–117.

18. Photoelastic method to quantitatively visualise the evolution of the whole-field stress in 3D printed models subject to continuous loading processes / J. Yang, R. Zhagyu, W. Li, M. Lintao, F.-P. Chiang // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2018. – Vol. 100. – P. 248–258.

19. Investigation of effective stress intensity factors during overload fatigue cycles using photoelastic and DIC techniques /

- J.M. Vasco-Olmo, B. Yang, M.N. James, F.A. Diaz // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2018. – Vol. 97. – P. 73–86.
20. Multi-approach study of crack – tip mechanics on aluminium 2024 alloy / A.S. Chernyatin, P. Lopez-Crespo, B. Moreno, Y.G. Matvienko // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2018. – Vol. 98. – P. 38–47.
21. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the rigid line inclusion tip embedded in an epoxy matrix using digital image correlation // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 106. – 102425.
22. Bahrami B., Ayatollahi, Torabi A.R. Application of digital image correlation method for determination of mixed mode stress intensity factors in sharp notches // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2020. – Vol. 124. – 105830.
23. Зеркаль С.М., Табанохова М.В. Фотоупругий анализ концентрации напряжений вблизи вершины трещин-пропиллов // *Инновации в жизнь*. – 2019. – № 2(29). – С. 126–133.
24. Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts) // *Key Engineering Materials*. – 2020. – Vol. 827. – P. 330–335.
25. Демидов А.С. Метод фотоупругости и его применение в лабораториях МАИ// *Двигатель*. – 2018. – № 3(117). – С. 10–11.
26. Косыгина Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент // *Вестник Самарского университета. Естественная серия*. – 2018. – 24. – № 2. – С. 55–66.
27. Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidisks using the photoelasticity method and finite element method// *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – V. 2216. – 020013.
28. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments// *AIP Conference*. – 2016. – Vol. 1785. – С. 030029.
29. Stepanova L. Influence of higher-order terms of the Williams expansion on the crack-tip stress field for mixed-mode loadings: Asymptotic solutions and interference-optical methods of solid mechanics // *ICF 2017 – 14<sup>th</sup> International Conference on Fracture*. – 2017. – Vol. 2. – P. 110–111.
30. Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 144–145. – P. 265–275.
31. Evaluation of the SIF and T-stress values of the Brazilian disc with a central notch by hybrid method / P. Miarka, A.S. Cruces, S. Seitl, L. Malikova, P. Lopez-Crespo // *International Journal of Fatigue*. – 2020. – Vol. 135. – 105562.
32. Stepanova L.V., Roslyakov P., Lomakov P. A photoelastic study for multiparametric analysis of the near crack tip stress field under mixed mode loading // *Procedia Structural Integrity*. – 2016. – Vol. 2. – P. 1797–1804.
33. Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Interference-optical methods in mechanics for the multi-parameter description of the stress fields in the vicinity of the crack tip // *Journal of Physics: Conference series*. – 2018. – Vol. 1096(1). – 012117.
34. Elastic stress analysis of blunt V-notches under mixed mode loading by considering higher order terms / A.M. Mirzaei, M.R. Ayatollahi, B. Bahrami, F. Berto // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 78. – P. 665–684.
35. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B. Asymptotic stress field and the coefficients of singular and higher order terms for V-notches with end holes under mixed – mode loading // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. – Vol. 172–173. – P. 51–69.
36. Hello G.,Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. – 2012. – Vol. 49. – P. 556–566.
37. Исследование трещиностойкости некоторых деталей гидроэнергетического оборудования / В.Р. Мигуренко, Б.Э. Мельников, С.Н. Эйгенсон, Н.В. Корихин, Т.П. Раимбердиев // *Гидротехническое строительство*. – 2017. – № 1. – С. 36–45.
38. Экспериментальное исследование пьезооптического преобразователя для высокочувствительных датчиков деформации / А.Г. Паулиш, П.С. Загубисало, В.Н. Бараков, М.А. Павлов // *Автометрия*. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 78–84.
39. Stepanova L.V., Dolgikh V.S., Turkova V.A. Digital photoelasticity for calculating coefficients of the Williams series expansion in plate with two collinear cracks under mixed mode loading // *Ceur Workshop Proceedings*. – 2017. – Vol. 1904. – P. 200–208.
40. Krepl O., Klusak J. Multi-parameter failure assessment of a bi-material V-notch – Crack initiation from a free-edge singularity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 100. – P. 233–241.
41. Лазарев В.А. Экспериментальная проверка численного исследования напряженного состояния пластины с овальным вырезом // *Математические методы в технике и технологиях*. – 2018. – Т. 10. – С. 7–10.
42. Синявский Н.Я., Корнева И.П. Исследование гидрофильности полиуретановой пленки методом фотоупругости и релаксации и релаксометрии ЯМР // *Оптика и спектроскопия*. – 2019. – Т. 127, № 12. – С. 912–916.
43. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The stress analysis of cracks handbook*. – New York: ASME, 2000. – 696 p.
44. Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений). *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2019. – Т. 22, № 3. – С. 345–361.
45. Разумовский И.А. *Интерференционно-оптические методы механики деформируемого твердого тела*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 240 с.
46. Хаимова-Малькова Р.И. *Методика исследования напряжений поляризационно-оптическим методом*. – М.: Наука, 1970. – 116 с.
47. Фрохт М. *Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений*. – М.: Гостехиздат, Т.1. 1948-1950. – 432 с.
48. Ramesh K. *Digital Photoelasticity: Advanced Techniques and Applications*. – Berlin: Springer, 2000. – 410 p.
49. Asundi A. *MATLAB for Photomechanics*. – Oxford: Elsevier Science. – 2002. – 198 p.
50. Александров А.Я., Ахметзянов Н.Х. *Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела*. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
51. *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*. – Berlin: Springer, 2008. – 1098 p.
52. Sciammarella C.A., Zimmerman K.B. *The Old and New: A Narrative on history of the Society for Experimental Mechanics*. – Willistone: Morgan and Claypool, 2018. – 108 p.
53. Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1997. – Vol. 56, no. 1. – P. 25–45.

54. Timoshenko S. Theory of elasticity. – Mc Graw-Hill Education, 2010. – 567 p.

55. Reliability, Safety and Hazard Assessment for Risk-Based Technologies // Proceedings of ICRESH 2019. – Singapore: Springer, 2020. –1013 p.

## References

1. Sasikumar S., Ramesh K. Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP) // Optics and Lasers in Engineering, 2020, vol. 127, 105963. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2019.105963

2. Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity// Optics and Lasers in Engineering, 2018, vol. 109, pp. 7-16. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2018.05.004>

3. Brinez J.C., Martinez A.R., Branch J.W. Computational hybrid phase shifting technique applied to digital photoelasticity// Optik, 2018, vol. 157, pp. 287-297. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.11.060>

4. V. Ramakrishnan, Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part II: Novel fringe resolution guided scanning scheme// Optics and Lasers in Engineering, 2017, vol. 92, pp. 141-149. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.05.010>

5. Ramakrishnan V., Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part I: Critical assessment of existing schemes // Optics and Lasers in Engineering, 2017, vol. 92, pp. 129-140. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.06.016>

6. Kiselev M.M. Razrabotka ustanovki dlja opredelenija glavnih naprjazhenij s povyshennym prostranstvennym razresheniem v ploskih prozrachnyh izdelijah. Dissertacija na soiskanie stepeni kandidata tehniceskikh nauk, Izhevsk, 2010.

7. Konishheva O.V., Brjuhoveckaja E.V., Kudrjavcev I.V. Trehjeksposizionnyj metod golograficheskoy fotouprugosti dlja issledovaniya obemnogo naprjazhennogo sostojaniya // Tehnologija mashinostroeniya. – 2017. – №1. – S. 45-49.

8. Sung P.C., Wang W.C., Hwang C.H., Lai G.-T. A low-level stress measurement method by integrating white light photoelasticity and spectrometry// Optics and Laser Technology, 2018, vol. 98, pp. 33-45. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2017.07.022>

9. Kosygin A.N., Kosygina L.N. Digital processing of interferograms obtained by the photoelasticity method // Vestnik SamU. Estestvenno-Nauchnaya Ser., 2019, vol. 25, issue 2, pp. 75–91. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-75-91>

10. Patil P., Vysasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering, 2017, vol. 93, pp. 182-194. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>

11. Dolgikh V.S., Stepanova L.V. A photoelastic and numeric study of the stress field in the vicinity of two interacting cracks: Stress intensity factors, T-stresses and higher order terms // AIP Conference Proceedings, 2020, vol. 2216, 020014. <https://doi.org/10.1063/5.0003507>

12. Pisarev V.S., Matvienko Y.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stress // Engineering Fracture Mechanics, 2017, vol. 179, pp. 348-374. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.029>

13. Sharafutdinov G.Z. Issledovanie metoda fotouprugosti// Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2018. №3. S. 135-141. DOI: 10.7868/S0572329918030145

14. Hariprasad M.P., Ramesh K. Analysis of contact zones from whole field isochromatics using reflection photoelasticity //

56. Frishter L. Stress-Strain Generation Within a Stress Concentration Zone Using the Phototlasticity Method // in International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2020. – P. 692–708.

Optics and Lasers in Engineering, 2018, vol. 105, pp. 86-92. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2018.01.005>

15. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity. Optics and Lasers in Engineering, 2020, vol. 126, 105855. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105855>

16. Yuan Y., Sheng C., Zhang Z. Unified Theoretical Model of Caustic Method for the Interfacial Cracks // Engineering Fracture Mechanics, 2020, vol. 233, 107006. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107006>

17. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity// Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. V. 99. P. 104-117. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.11.011>

18. Yang J., Zhagyu R., Li W., Lintao M., Chiang F.-P. Photoelastic method to quantitatively visualise the evolution of the whole-field stress in 3D printed models subject to continuous loading processes// Optics and Lasers in Engineering, 2018, vol. 100, pp. 248-258. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.09.004>

19. Vasco-Olmo J.M., Yang B., James M.N., Diaz F.A. Investigation of effective stress intensity factors during overload fatigue cycles using photoelastic and DIC techniques// Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2018, vol. 97, pp. 73-86. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.07.011>

20. Chernyatin A.S., Lopez-Crespo P., Moreno B., Matvienko Y.G. Multi – approach study of crack – tip mechanics on aluminium 2024 alloy// Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2018, vol. 98, pp. 38-47. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.09.007>

21. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the rigid line inclusion tip embedded in an epoxy matrix using digital image correlation// Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, vol. 106, 102425. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102425>

22. Bahrami B., Ayatollahi, Torabi A.R. Application of digital image correlation method for determination of mixed mode stress intensity factors in sharp notches// Optics and Lasers in Engineering, 2020, vol. 124, 105830. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105830>

23. Zerkal S.M., Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of stress concentration near the vertices of the crack-cuts// Innovation in life, 2019, №2(29), 126-133.

24. Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts)// Key Engineering Materials, 2020, vol. 827, pp. 330-335. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330>

25. Demidov A.S. Photoelasticity method and its application in MAI // Engine. 2018. 3(117). C.10-11. Demidov A.S. Metod fotouprugosti i ego primenenie v laboratoriyakh MAI [Photoelasticity method and its application in MAI]. Dvigatel', 2018, no. 3(117), pp. 10–11. Available at: <http://engine.aviaport.ru/issues/117/pics/pg10.pdf>

26. Kosygina L.N. Asymptotic presentation of the stress field near the crack tip of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches: theoretical study and computational experiment// Vestnik of Samara University, 2018, vol. 24(2), pp. 55-66. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66>

27. Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidisks using the photoelasticity method and finite element method// AIP Conference Proceedings, 2020, vol. 2216, 020013. <https://doi.org/10.1063/5.0003506>
28. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments// AIP Conference, 2016, vol. 1785, 030029. <https://doi.org/10.1063/1.4967050>
29. Stepanova L.V. Influence of higher-order terms of the Williams expansion on the crack-tip stress field for mixed-mode loadings: Asymptotic solutions and interference-optical methods of solid mechanics // ICF 2017 -14<sup>th</sup> International Conference on Fracture. 2017. V. 2. P. 110-111.
30. Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures, 2018, vol. 144-145, pp. 265-275. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>
31. Miarka P., Cruces A.S., Seidl S., Malikova L., Lopez-Crespo P. Evaluation of the SIF and T-stress values of the Brazilian disc with a central notch by hybrid method // International Journal of Fatigue, 2020, vol. 135, 105562. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2020.105562>
32. Stepanova Larisa V., Roslyakov Pavel, Lomakov Pavel A photoelastic study for multiparametric analysis of the near crack tip stress field under mixed mode loading // Procedia Structural Integrity, 2016, vol. 2. pp. 1797-1804. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2016.06.226>
33. Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Interference-optical methods in mechanics for the multi-parameter description of the stress fields in the vicinity of the crack tip // Journal of Physics: Conference series, 2018, vol. 1096(1), 012117. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012117>
34. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B., Berto F. Elastic stress analysis of blunt V-notches under mixed mode loading by considering higher order terms // Applied Mathematical Modelling, 2020, vol. 78, pp. 665-684. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.09.049>
35. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B. Asymptotic stress field and the coefficients of singular and higher order terms for V-notches with end holes under mixed – mode loading // International Journal of Solids and Structures, 2019, vol. 172-173, pp. 51-69. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.05.011>
36. Hello G.,Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures, 2012, vol. 49, pp. 556-566. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>
37. Migurenko V.R., Mel'nikov B.Je., Jeigenson S.N., Korihin N.V., Raimberdiev T.P. Issledovanie treshhinostojkosti nekotoryh detalej gidrojenergeticheskogo oborudovaniya // Hidrotehnicheskoe stroitel'stvo. 2017. №1. S. 36-45.
38. Paulish A.G., Zagubisalo P.S., Barakov V.N., Pavlov M.A. Jeksperimental'noe issledovanie p'ezoopticheskogo preobrazovatelja dlja vysokochuvstvitel'nyh datchikov deformacii// Avtometrija. 2018. T. 54. №2. S. 78-84.
39. Stepanova L.V., Dolgikh V.S., Turkova V.A. Digital photoelasticity for calculating coefficients of the Williams series expansion in plate with two collinear cracks under mixed mode loading // Ceur Workshop Proceedings. 2017. V. 1904. P. 200-208. DOI: 10.18287/1613-0073-2017-1904-200-208
40. Krepl O., Klusak J. Multi-parameter failure assessment of a bi-material V-notch – Crack initiation from a free-edge singularity // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2019, vol. 100, pp. 233-241. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.01.021>
41. Lazarev V.A. Jeksperimental'naja proverka chislennogo issledovaniya naprjazhennogo sostojaniya plastiny s oval'nym vyrezom// Matematicheskie metody v tehnike i tehnologijah. 2018. T. 10. S. 7-10.
42. Sinyvsky N.Ya., Korneva I.P. Investigation of the Hydrophilicity of a Polyurethane Film by the Photoelasticity and Nuclear Magnetic Resonance Relaxometry Methods // Optics and Spectroscopy, 2019, vol. 127, iss. 12, pp. 912-916. DOI: 10.21883/OS.2019.12.48685.27-19
43. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. The stress analysis of cracks handbook // ASME. New York, 2000, 696 p.
44. Stepanova L.V. Asymptotic analysis of the crack tip stress field (Consideration of higher order terms)// Numerical Analysis and Applications, 2019, vol. 12(3), pp. 284-296. DOI: 10.1134/S1995423919030078
45. Razumovsky I.A. Interference-optical Methods of Solid Mechanics / Series: Foundations of Engineering Mechanics. Berlin: Springer, 2011, 270 p.
46. Haimova-Mal'kova R.I. Metodika issledovaniya naprjazhenij poljarizacionno-opticheskim metodom. M.: Nauka, 1970, 116 s.
47. Frocht M.M. Photoelasticity. London: Wiley and Sons, 1965, 432 p.
48. Ramesh K. Digital Photoelasticity: Advanced Techniques and Applications. 2000. 410 p.
49. Asundi A. MATLAB for Photomechanics. Oxford: Elsevier Science, 2002, 198 p.
50. Aleksandrov A.Ja., Ahmetzjanov N.H. Poljarizacionno-opticheskie metody mehaniki deformiruемого tela. M.: Nauka, 1973. 576 c.
51. Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics. Springer, 2008. 1098 p.
52. Sciammarella C.A., Zimmerman K.B. The Old and New: A Narrative on history of the Society for Experimental Mechanics. Morgan and Claypool, 2018. 108 p.
53. Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited// Engineering Fracture Mechanics, 1997, vol. 56, № 1, pp. 25-45.
54. Timoshenko S. Theory of elasticity // Mc Graw-Hill Education, 2010, 567 p.
55. Reliability, Safety and Hazard Assessment for Risk-Based Technologies. Proceedings of ICRESH 2019. Singapore: Springer, 2020. 1013 p.
56. Frishter L. Stress-Strain Generation Within a Stress Concentration Zone Using the Photototalasticity Method // in International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies. Cham: Springer Nature Switzerland, 2020. p.692-708.