



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.21

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ В ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Д.В. Гандилян

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 28 июля 2020 г.
Принята: 08 декабря 2020 г.
Опубликована: 30 декабря 2020 г.

Ключевые слова:

поверхностная упругость,
поверхностное напряжение,
круговое отверстие, ряды Фурье,
биполярная система координат.

АННОТАЦИЯ

Поверхностные эффекты важны для моделирования некоторых структур, таких как нанопленки, нанопористые материалы и другие наноразмерные структуры. В данной работе рассмотрена задача теории упругости – задача о полуплоскости, содержащей круговое отверстие, растягиваемой постоянными напряжениями, приложенными на бесконечности, с учетом таких эффектов, как поверхностная упругость и поверхностные напряжения. Решение задачи получено при помощи разложения в ряды Фурье переменных, представленных в биполярной системе координат (что упрощает решение задачи, в силу того что на контуре отверстия одна из координат становится константой), а компоненты напряжений определяются через бигармоническую функцию напряжений. Коэффициенты в рядах Фурье определяются так, чтобы удовлетворить граничным условиям на контуре отверстия. Для решения задачи, помимо уравнений теории упругости, использовались уравнения поверхностной упругости, в частности, с помощью обобщенного закона Лапласа – Юнга и закона Шаттлворса вычислялось непосредственно поверхностное напряжение на контуре отверстия. Величины концентраций напряжений получены с помощью рекуррентных соотношений для компонент напряжения на границе.

Полученные выражения можно рассматривать как обобщение решения задачи традиционной теории упругости. Проведены сравнения концентраций напряжений с учетом и без учета поверхностных эффектов в различных точках контура отверстия. Рассмотрено влияние, оказываемое поверхностными эффектами в зависимости концентраций напряжений от значения относительного расстояния между отверстием и границы полуплоскости. Обнаружено, что, несмотря на довольно простую геометрию в данной задаче, из-за достаточно малого расстояния между отверстием и границей полуплоскости значения концентрации напряжений с учетом и без учета поверхностного напряжения существенно отличаются друг от друга.

© ПНИПУ

© Гандилян Давид Ваганович – инж., e-mail: david.gandilyan@mail.ru

David V. Gandilyan – Engineer, e-mail: david.gandilyan@mail.ru



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



THE INFLUENCE OF SURFACE EFFECTS IN THE PROBLEM OF THEORY OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR HOLE IN A HALF-PLANE

D.V. Gandilyan

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 28 July 2020
Accepted: 08 December 2020
Published: 30 December 2020

Keywords:

surface elasticity, surface stress,
circular hole, Fourier series,
bipolar coordinate system.

ABSTRACT

Surface effects are important for modeling structures, such as nanofilms, nanoporous materials, and other nanoscale constructions. In the current study, we consider the problem of the theory of elasticity – the problem of a half-plane containing a circular hole, stretched by constant stresses applied at infinity, and take into account surface effects such as surface elasticity and surface stresses. The problem solution has been obtained by expanding the Fourier series with the variables written in the bipolar coordinate system (which simplifies the problem solution because one of the coordinates becomes a constant on the hole contour), where the stress components are expressed through a bi-harmonic stress function. The parametric coefficients involved in the solution, namely in the Fourier series, are determined in order to satisfy the boundary conditions on the hole contour. To solve the problem, in addition to the equations of the theory of elasticity, the equations of surface elasticity were used, in particular, by applying the generalized Young-Laplace's law and the Shuttleworth's law; the surface stress on the hole contour has been calculated directly. Using recurrence relations for the stress components at the boundary, stress concentration values have been obtained.

The resulting expressions can be considered as a generalized solution of the problem in case of the classical elasticity. The stress concentrations are compared for the cases with and without taking into account surface effects at various points on the hole contour. The contribution caused by the surface effects depending on the relative distance between the hole and the half-plane boundary is studied. It is shown that despite a quite simple geometry, owing to the fairly small distance between the hole and the half-plane boundary, the stress concentration with and without taking into account the surface stress are significantly different from each other, due to the significant contribution of surface effects.

© PNRPU

Введение

Вблизи поверхностей твердых тел на наноуровне проявляются особые физико-механические свойства, которые могут значительно отличаться от свойств материала вдали от поверхности – начиная от различия в химических связях для приповерхностных атомов и наличия свободных радикалов и заканчивая присутствием оксидных пленок и повышенной концентрацией примесных атомов [1–3]. Один из основных способов для учета поверхностных явлений – использование, помимо уравнений теории упругости, уравнения поверхностной упругости [1–4]. Достаточно общий метод решения задач теории упругости, учитывающий поверхностные эффекты, заключающийся в использовании характерных нестандартных граничных условий, вытекающих из уравнений поверхностной упругости, был развит в работах [1–6]. Однако к настоящему времени число полученных аналитических решений ограничено, что, возможно, связано с весьма «неудобным» видом получаемых граничных условий. Значительная часть полученных решений для задач, учитывающих поверхностные эффекты, ограничено довольно простыми геометриями, такими как сферическая пора [7–9], плоскость с одиночным круговым отверстием [10], одиночная пластина [11], однако отно-

сительный вклад поверхностных эффектов для круговых и сферических поверхностей минимален. В работах [12, 13] рассматривались задачи о плоскости с двумя круговыми отверстиями и в неконцентрической трубе, где влияние поверхностных эффектов было более существенным. Из недавних работ, посвященных исследованию вклада поверхностных эффектов, отметим [14–18]. В настоящей работе рассмотрена задача о круговом отверстии в подвергнутой растяжению полуплоскости; в данной задаче, несмотря на довольно простую геометрию, из-за достаточно малого расстояния между границами (т.е. между отверстием и границей полуплоскости) можно ожидать более весомого вклада поверхностных эффектов.

Отметим, что теория поверхностной упругости, используемая в настоящей работе, является наиболее распространенной, но не единственной. В данной теории, ставшей уже традиционной, в дополнение к объемным напряжениям и деформациям, предполагается существование дополнительных поверхностных напряжений, действующих подобно напряжениям в мембранах, совпадающих с внешними поверхностями тел либо внутренними поверхностями раздела. Данные поверхностные напряжения связываются с объемными деформациями посредством аналога закона Гука, а дополнительные поверхностные деформации при этом не вво-

дятся. Альтернативные теории (например, [19]) рассматривают дополнительные поверхностные (интерфейсные) деформации, связываемые с объемными напряжениями. Недавно предложены также варианты теории, объединяющие данные подходы [20–22].

Отметим также, что полученные решения представляют интерес не только сами по себе, но и в качестве вспомогательных решений при решении более сложных задач, например, задач о взаимодействии пор с растущими трещинами [23–24].

1. Геометрия, биполярные координаты, общие соотношения

Рассмотрим полуплоскость, содержащую круговое отверстие и растягиваемую вдоль ее границы постоянными напряжениями, приложенными на бесконечности (рис. 1). В данной задаче выполнены условия плоской деформации, а на контуре отверстия и границе полуплоскости вводятся дополнительные соотношения, характеризующие поверхностные эффекты (см. п. 2). В случае классической упругости задача была решена в [25–27]. В настоящей работе получено обобщение данного решения с учетом поверхностных эффектов на контуре кругового отверстия и границы полуплоскости. Следуя работе [25], введем биполярную систему координат (α, β) , связанную с декартовой системой координат (x, y) следующим образом:

$$x + iy = -a \coth \left(i \frac{\alpha + i\beta}{2} \right), \quad \alpha + i\beta = \ln \left(\frac{x + i(y+a)}{x + i(y-a)} \right), \quad (1)$$

где $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $\beta \in [-\pi, +\pi]$.

Полус O_1 расположен на расстоянии a от полуплоскости. Масштабный коэффициент имеет вид

$$g = 1 / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2} = \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{a}. \quad (2)$$

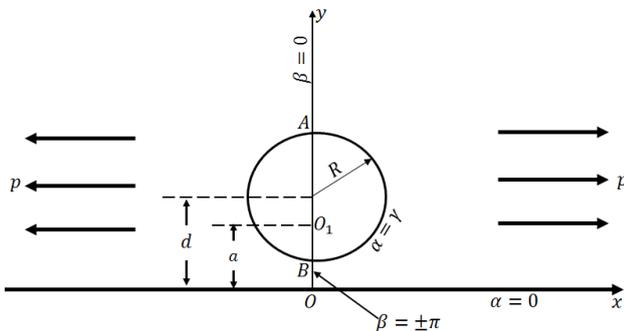


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. The problem geometry

Координатные линии $\alpha = \text{const}$ представляют собой набор окружностей с центрами на оси Oy . Окружности, у которых значение α соответствуют положительным значениям, лежат выше оси Ox , а отрицательным – ни-

же оси Ox , координатная линия $\alpha = 0$ – соответствует оси Ox .

Координатные линии $\beta = \text{const}$ представляют собой дуги окружностей, проходящих через точку O_1 , ортогональные окружностям $\alpha = \text{const}$. Справа от оси Oy значения $\beta > 0$, а с левой стороны – $\beta < 0$, значение $\beta = 0$ соответствует оси Oy , кроме отрезка OO_1 , где координата β терпит разрыв, а именно: слева от оси Oy ($x = -0$) $\beta = -\pi$, а справа ($x = +0$) $\beta = +\pi$. Непосредственно в точке O_1 – $\alpha = +\infty$, а β не определено.

Будем считать, что известное постоянное значение $\alpha = \gamma$ соответствует контуру отверстия, тогда, для радиуса отверстия R и расстояния между границей полуплоскости и центром отверстия d имеют место следующие соотношения:

$$R = a / \sinh \gamma, \quad d = a \coth \gamma, \quad d/R = \cosh \gamma. \quad (3)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} определяются через бигармоническую функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$ следующим образом [26]:

$$\Delta^2 \Phi = 0, \quad \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\Phi) = 0. \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh \alpha \right] (g\Phi),$$

$$\sigma_{\beta\beta} = \left[(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (g\Phi). \quad (5)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi).$$

Бигармоническая функция напряжения $\Phi(\alpha, \beta)$ для плоской задачи, в которой содержится круговое отверстие, представляется в виде суперпозиции двух функций [27]:

$$g\Phi = g\Phi_0 + apgF, \quad \Phi_0 = \frac{1}{2} py^2, \quad (6)$$

где функция Φ_0 удовлетворяет заданным напряжениям на бесконечности, а функция F подбирается так, чтобы бигармоническая функция Φ удовлетворяла известным условиям на контуре отверстия и равнялась нулю на бесконечности, т.е.

$$(gF)_{\infty} = (gF)_{\alpha=\beta=0} = 0.$$

Для рассматриваемой задачи функция $\Phi(\alpha, \beta)$ имеет вид [27]

$$\frac{g\Phi}{ap} = \frac{\sinh^2 \alpha}{2 \cosh \alpha \cos \beta} + J\alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) + (A_1 \cosh 2\alpha + B_1 + C_1 \sinh 2\alpha) \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(\alpha) \cos n\beta,$$

$$f_n(\alpha) = A_n \cosh(n+1)\alpha + B_n \cosh(n-1)\alpha + C_n \sinh(n+1)\alpha + D_n \sinh(n-1)\alpha. \quad (7)$$

Для удовлетворения граничных условий на контуре отверстия ($\alpha = \gamma$) и на границе полуплоскости ($\alpha = 0$) представим напряжения в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} a\sigma_{\alpha\alpha} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\beta, \\ a\sigma_{\alpha\beta} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\beta, \\ a\sigma_{\beta\beta} &= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты c_k, b_k, d_k выражаются через параметры A_n, B_n, C_n, D_n, J .

2. Постановка задачи

Задача рассматривается в постановке плоской деформации. Всюду внутри тела предполагаются выполненными основные уравнения теории упругости (уравнения равновесия, совместности и закона Гука), что автоматически обеспечивается введением бигармонической функции (4).

В случае классической упругости (т.е. без учета поверхностных эффектов) граничные условия имеют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha = 0) = \sigma_{\alpha\beta}(\alpha = 0) = \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha = \gamma) = \sigma_{\alpha\beta}(\alpha = \gamma) = 0.$$

Целью задачи является нахождение неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n, J и вычисление значения $\sigma_{\beta\beta}$ на контуре отверстия. Однако если учитывать поверхностные эффекты на границах, то данные граничные условия могут не равняться нулю. Для решения задачи необходимо определить граничные условия с учетом поверхностной упругости.

В рассматриваемой теории изменения любых физических свойств, в частности упругих постоянных, с уменьшением размеров тела моделируются введением дополнительных свойств, приписываемых бесконечно тонкой поверхности, а объемные свойства предполагаются не зависящими от размера тела. Таким образом, с уменьшением размеров тела относительный вклад его поверхности возрастает, что приводит к изменению эффективных свойств с уменьшением размера.

В общем случае, с использованием обобщенного закона Лапласа – Юнга [28], граничные условия на поверхностях, редуцирующихся вследствие выполнения условий плоской деформации в линии границы полуплоскости и контура отверстия, представимы в виде

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -\nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор объемных напряжений; \mathbf{n} – вектор нормали к границе; $\boldsymbol{\sigma}^s$ – тензор поверхностных напряжений; ∇_s – поверхностный градиент [28]. Для криволинейной границы поверхностный градиент поверхностных напряжений $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s &= -\left[\frac{\sigma_{11}^s}{R_1} + \frac{\sigma_{22}^s}{R_2} \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{e}_1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 \sigma_{11}^s)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(h_1 \sigma_{21}^s)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^s - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^s \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_1 \sigma_{22}^s)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(h_2 \sigma_{12}^s)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^s - \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^s \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизн; h_1, h_2 – метрические коэффициенты; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – орты криволинейной ортогональной системы координат (α_1, α_2) . Для рассматриваемой геометрии расчетной области (см. рис. 1), когда цилиндрическая поверхность образована окружностью контура отверстия, для $\alpha = \gamma$ в биполярной (бицилиндрической) системе координат (9), параметры имеют вид [29]

$$\alpha_1 = \alpha; \alpha_2 = z; R_1 = R; \frac{1}{R_2} = 0; h_1 = \frac{1}{g}; h_2 = 1, \quad (11)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R} \sigma_{\beta\beta}^s,$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{R} \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{\sinh \alpha} \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^s}{\partial \beta}. \quad (12)$$

Аналогично для границы полуплоскости, для $\alpha = 0$ параметры имеют вид

$$\alpha_1 = \alpha; \alpha_2 = z; \frac{1}{R_1} = 0; \frac{1}{R_2} = 0; h_1 = \frac{1}{g}; h_2 = 1, \quad (13)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0. \quad (14)$$

Следовательно, компоненты $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}$ на границе полуплоскости не испытывают влияния поверхностных эффектов и равны нулю. Учитывая это, можно упростить выражение для бигармонической функции (7). Подставив (7) в (5) при $\alpha = 0$, учитывая (14), получаем

$$A_n + B_n = (n+1)C_n + (n-1)D_n = 0, \quad n \geq 1, \quad (15)$$

тогда выражение для бигармонической функции можно переписать в виде

$$\frac{g\Phi}{ap} = \frac{\sinh^2 \alpha}{2 \cosh \alpha \cos \beta} + J\alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) + A_1 (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} [A_n (\cosh(n\alpha + \alpha) - \cosh(n-1)\alpha) + E_n ((n-1)\sinh(n+1)\alpha - (n+1)\sinh(n-1)\alpha)], \quad (16)$$

где A_n, E_n, J – коэффициенты, подлежащие определению. Объединив два уравнения в (12), получим

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{\sinh \alpha} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \beta}. \quad (17)$$

Здесь поверхностное напряжение $\sigma_{\beta\beta}^s$ по-прежнему остается неизвестным. Для получения граничного условия выразим поверхностное напряжение через известные соотношения (законы Гука и Шаттлворса):

$$\sigma_{\beta\beta}^s = C_{\beta\beta\beta\beta}^s \epsilon_{\beta\beta}, \quad \epsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\beta\beta} - \nu \sigma_{\alpha\alpha}], \quad (18)$$

где $C_{\beta\beta\beta\beta}^s$ – тензор модулей поверхностной упругости; $\epsilon_{\beta\beta}$ – окружная поверхностная деформация; E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона (в данной формуле нет суммирования по повторяющемуся индексу). Из уравнений (18) следует

$$\frac{\sigma_{\beta\beta}^s}{R} = \epsilon [\sigma_{\beta\beta} - \nu \sigma_{\alpha\alpha}], \quad \epsilon = \frac{C_{\beta\beta\beta\beta}^s}{ER}. \quad (19)$$

Для характерных значений модуля Юнга и констант поверхностной упругости величину R всегда можно выбрать такой, чтобы параметр ϵ был малым. С учетом выражения (19) граничные условия (12), (17) выражаются следующим образом:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \epsilon [\sigma_{\beta\beta} - \nu \sigma_{\alpha\alpha}], \quad (20)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{\sinh \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} [\sigma_{\beta\beta} - \nu \sigma_{\alpha\alpha}]. \quad (21)$$

Решение уравнений (20), (21) получаем путем разложения напряжений по малому параметру ϵ :

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^N \epsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}, \quad b = \sum_{m=1}^N \epsilon^m b^{(m)}, \quad (22)$$

$$c = \sum_{m=1}^N \epsilon^m c^{(m)}, \quad d = \sum_{m=1}^N \epsilon^m d^{(m)}.$$

Приравнявая члены с равными степенями малого параметра при ϵ , получаем рекуррентные системы для определения коэффициентов A_n, E_n, J :

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} = \sigma_{\beta\beta}^{(0)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{\sinh \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \sigma_{\beta\beta}^{(0)}, \quad (23)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = [\sigma_{\beta\beta}^{(m-1)} - \nu \sigma_{\alpha\alpha}^{(m-1)}],$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{\sinh \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} [\sigma_{\beta\beta}^{(m-1)} - \nu \sigma_{\alpha\alpha}^{(m-1)}], \quad m \geq 1.$$

3. Нулевое приближение (классическая упругость)

Нулевое приближение поставленной задачи (23) является решением задачи классической упругости [26] и имеет вид

$$A_1^{(0)} = \frac{e^{-2\gamma}}{2 \cosh 2\gamma},$$

$$A_n^{(0)} = -\frac{n^2 \sinh^2 \gamma - n \sinh \gamma \cosh \gamma + e^{-n\gamma} \sinh n\gamma}{2(\sinh^2 n\gamma - n^2 \sinh^2 \gamma)}, \quad n \geq 2,$$

$$E_n^{(0)} = \frac{n \sinh^2 \gamma}{2(\sinh^2 n\gamma - n^2 \sinh^2 \gamma)}, \quad n \geq 2,$$

$$J^{(0)} = \frac{1}{\cosh 2\gamma}, \quad (24)$$

В данных выражениях коэффициенты, являющиеся аналогами коэффициентов в уравнении (16), отмечены дополнительным верхним индексом 0, указывающим на соответствие классическому известному решению [26] т.е. решению без учета поверхностных эффектов. Выражения (24) являются нулевым приближением в разложении по параметру ϵ решения задачи, с учетом поверхностной упругости.

3. Применение рекуррентных соотношений

С помощью соотношений (23) задача сводится к решению набора последовательных задач для каждого члена разложения по малому параметру ϵ . Если известно $(m-1)$ -е решение (т.е. известны $A_n^{(m-1)}, E_n^{(m-1)}, J^{(m-1)}$) для компонент напряжения, то аналогично (8), с помощью (5), (6) получаем

$$a\sigma_{\alpha\alpha}^{(m-1)} = c_0^{(m-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(m-1)} \cos n\beta, \quad (25)$$

$$a\sigma_{\beta\beta}^{(m-1)} = d_0^{(m-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(m-1)} \cos n\beta,$$

где $c_n^{(m-1)}, d_n^{(m-1)}$ имеют вид

$$c_0^{(m-1)} = 2A_1^{(m-1)} \sinh^2 \gamma - J^{(m-1)} \sinh \gamma \cosh \gamma,$$

$$c_n^{(m-1)} = \delta_{n1} (J^{(m-1)} \sinh \gamma - 4A_n^{(m-1)} \sinh^2 \gamma \cosh \gamma + ((n+2)(\cosh(n+1)\gamma \sinh \gamma E_{n+1}^{(m-1)} (n+1)^2 - E_{n+1}^{(m-1)} (n+1) \sinh(n+1)\gamma \cosh \gamma + A_{n+1}^{(m-1)} \sinh \gamma \sinh(n+1)\gamma (n+1))) +$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta_{n2}((2n \cosh n\gamma \sinh \gamma \times \\
 & \times (-E_n^{(m-1)}(n^2 - 1) \cosh \gamma - A_n^{(m-1)} \sinh \gamma) + \\
 & + 2 \sinh n\gamma E_n^{(m-1)}(n^2 - 1) - 2 \sinh n\gamma \sinh \gamma \cosh \gamma A_n^{(m-1)} n^2) + \\
 & + (n + 2)(\cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma E_{n+1}^{(m-1)}(n + 1)^2 - E_{n+1}^{(m-1)}(n + \\
 & + 1) \sinh(n + 1)\gamma \cosh \gamma + A_{n+1}^{(m-1)} \sinh \gamma \sinh(n + 1)\gamma(n + 1))) + \\
 & + (2n \cosh n\gamma \sinh \gamma (-E_n^{(m-1)}(n^2 - 1) \cosh \gamma - A_n^{(m-1)} \sinh \gamma) + \\
 & + 2 \sinh n\gamma E_n^{(m-1)}(n^2 - 1) - 2A_n^{(m-1)} n^2 \sinh n\gamma \sinh \gamma \cosh \gamma) + \\
 & + ((n + 2)(\cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma E_{n+1}^{(m-1)}(n + 1)^2 - E_{n+1}^{(m-1)}(n + \\
 & + 1) \sinh(n + 1)\gamma \cosh \gamma + A_{n+1}^{(m-1)} \sinh(n + 1)\gamma \sinh \gamma(n + 1))) + \\
 & + ((n - 2)(\cosh(n - 1)\gamma \sinh \gamma E_{n-1}^{(m-1)}(n - 1)^2 - E_{n-1}^{(m-1)}(n - \\
 & - 1) \sinh(n - 1)\gamma \cosh \gamma + \\
 & + A_{n-1}^{(m-1)} \sinh \gamma \sinh(n - 1)\gamma(n - 1))), \quad n \geq 1. \quad (26) \\
 & d_0^{(m-1)} = -2A_1^{(m-1)} \cosh^2 \gamma + J^{(m-1)} \cosh \gamma \sinh \gamma, \\
 & d_n^{(m-1)} = \delta_{n1}(4A_n^{(m-1)} \cosh^3 \gamma + J^{(m-1)} \sinh \gamma + \\
 & + ((n + 2)(E_n^{(m-1)}(n + 1) \cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma + (A_{n+1}^{(m-1)} \sinh \gamma - \\
 & - E_{n+1}^{(m-1)} \cosh \gamma) \sinh(n + 1)\gamma) - \\
 & - (2A_{n+1}^{(m-1)}(n + 1) \cosh \gamma \cosh(n + 1)\gamma + \\
 & + E_{n+1}^{(m-1)}(n + 1)((n + 1)^2 - 1) \cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma + \\
 & + (E_{n+1}^{(m-1)} \cosh \gamma((n + 1)^2 - \\
 & - 1) + A_{n+1}^{(m-1)}((n + 1)^2 + 1) \sinh \gamma) \sinh(n + 1)\gamma))) + \\
 & + \delta_{n2}(2A_{n-1}^{(m-1)} \cosh 2\gamma + \\
 & + ((n + 2)(E_{n+1}^{(m-1)}(n + 1) \cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma + (A_{n+1}^{(m-1)} \sinh \gamma - \\
 & - E_{n+1}^{(m-1)} \cosh \gamma) \sinh(n + 1)\gamma) - \\
 & - (2A_{n+1}^{(m-1)}(n + 1) \cosh \gamma \cosh(n + 1)\gamma + \\
 & + E_{n+1}^{(m-1)}(n + 1)((n + 1)^2 - 1) \cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma + \\
 & + (E_{n+1}^{(m-1)}((n + 1)^2 - 1) \cosh \gamma + A_{n+1}^{(m-1)}((n + 1)^2 + 1) \sinh \gamma) \times \\
 & \times \sinh(n + 1)\gamma)) + \\
 & + 2(-\sinh \gamma (A_n^{(m-1)} n \cosh n\gamma \sinh \gamma + \\
 & + (A_n^{(m-1)} \cosh \gamma + E_n^{(m-1)} \sinh \gamma(n^2 - \\
 & - 1)) \sinh n\gamma) + \cosh \gamma (2A_n^{(m-1)} n \cosh n\gamma \sinh \gamma + \\
 & + E_n^{(m-1)} n \cosh n\gamma \sinh \gamma(n^2 - \\
 & - 1) + (E_n^{(m-1)}(n^2 - 1) \cosh \gamma + A_n^{(m-1)}(n^2 + 1) \sinh \gamma) \sinh n\gamma))) + \\
 & + ((2 - n)(E_{n-1}^{(m-1)}(n - 1) \cosh(n - 1)\gamma \sinh \gamma + (A_{n-1}^{(m-1)} \sinh \gamma - \\
 & - E_{n-1}^{(m-1)} \cosh \gamma) \sinh(n - 1)\gamma) - \\
 & - (2A_{n-1}^{(m-1)}(n - 1) \cosh \gamma \cosh(n - 1)\gamma +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + E_{n-1}^{(m-1)}((n - 1)^2 - 1) \cosh \gamma + \\
 & + A_{n-1}^{(m-1)}((n - 1)^2 + 1) \sinh \gamma) \sinh(n - 1)\gamma)) + \\
 & + ((n + 2)(E_{n+1}^{(m-1)}(n + 1) \cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma + (A_{n+1}^{(m-1)} \sinh \gamma - \\
 & - E_{n+1}^{(m-1)} \cosh \gamma) \sinh(n + 1)\gamma) - \\
 & - (2A_{n+1}^{(m-1)}(n + 1) \cosh \gamma \cosh(n + 1)\gamma + \\
 & + E_{n+1}^{(m-1)}(n + 1)((n + 1)^2 - 1) \cosh(n + 1)\gamma \sinh \gamma + \\
 & + (E_{n+1}^{(m-1)} \cosh \gamma((n + 1)^2 - \\
 & - 1) + A_{n+1}^{(m-1)}((n + 1)^2 + 1) \sinh \gamma) \sinh(n + 1)\gamma)) + \\
 & + 2(-\sinh \gamma (A_n^{(m-1)} n \cosh n\gamma \sinh \gamma + \\
 & + (A_n^{(m-1)} \cosh \gamma + E_n^{(m-1)} \sinh \gamma(n^2 - \\
 & - 1) \sinh n\gamma) + \cosh \gamma (2A_n^{(m-1)} n \cosh \gamma \cosh n\gamma + \\
 & + E_n^{(m-1)} n \cosh n\gamma \sinh \gamma(n^2 - \\
 & - 1) + (E_n^{(m-1)}(n^2 - 1) \cosh \gamma + A_n^{(m-1)}(n^2 + 1) \sinh \gamma) \times \\
 & \times \sinh n\gamma)), \quad n \geq 1, \quad (27)
 \end{aligned}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

Граничные условия (последние два уравнения в (23)) могут быть представлены следующим образом:

$$a\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(m)} \cos n\beta, \quad a\sigma_{\alpha\beta}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)} \sin n\beta, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}
 s_n^{(m)} &= d_n^{(m-1)} - \nu c_n^{(m-1)}, \\
 f_n^{(m)} &= \frac{1}{2 \sinh \gamma} [(n - 1)d_{n-1}^{(m-1)} + (n + 1)d_{n+1}^{(m-1)} - 2nd_n^{(m-1)} \cosh \gamma] - \\
 & - \frac{\nu}{2 \sinh \gamma} [(n - 1)c_{n-1}^{(m-1)} + (n + 1)c_{n+1}^{(m-1)} - 2nc_n^{(m-1)} \cosh \gamma]. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Последние уравнения в (29) образуют систему для нахождения коэффициентов $A_n^{(m)}$, $E_n^{(m)}$, $J^{(m)}$, через $A_n^{(m-1)}$, $E_n^{(m-1)}$, $J^{(m-1)}$:

$$\begin{aligned}
 a\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(m)} \cos n\beta = 2A_1^{(m)} \sinh^2 \gamma - \\
 & - J^{(m)} \sinh \gamma \cosh \gamma + J^{(m)} \sinh \gamma \cos \beta - \\
 & + 4A_1^{(m)} \sinh^2 \gamma \cosh \gamma \cos \beta + 3f_2^{(m)}(\gamma) \cos \beta + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(n - 1)(n - 2)f_{n-1}^{(m)}(\gamma) + \\
 & + (n + 1)(n + 2)f_{n+1}^{(m)}(\gamma) - \\
 & - 2(n^2 - 1) \cosh \gamma f_n^{(m)}(\gamma) - 2 \sinh \gamma f_n^{(m)}(\gamma)] \cos n\beta, \\
 a\sigma_{\alpha\beta}^{(m)} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)} \sin n\beta = \\
 & = -(\cosh \gamma (J^{(m)} - 2A_1^{(m)} \sinh 2\gamma) + f_2^{(m)}(\gamma)) \sin \beta +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{J^{(m)} \sin 2\beta}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1) f_{n-1}^{(m)}(\gamma) - 2n \cosh \gamma f_n^{(m)}(\gamma) + (n+1) f_{n+1}^{(m)}(\gamma) \right] \frac{\sin n\beta}{2}, \quad (30)$$

где

$$f_n^{(m)}(\gamma) = A_n^{(m)} (\cosh(n+1)\gamma - \cosh(n-1)\gamma) + E_n^{(m)} ((n-1)\sinh(n+1)\gamma - (n+1)\sinh(n-1)\gamma). \quad (31)$$

Приравнявая коэффициенты при синусах и косинусах в (30), аргументом функции которой является вторая координата β в биполярной системе координат (в дальнейшем для упрощения записи опускаая верхний индекс (m)), получаем

$$\begin{aligned} 2s_0 &= 2A_1 \sinh^2 \gamma - J \sinh \gamma \cosh \gamma, \\ 2ns_n &= \psi_{n-1} + \psi_{n+1} - 2\psi_n \cosh \gamma - 2\psi_n' \sinh \gamma + 2\delta_{1,n} (J \sinh \gamma - 4A_1 \sinh^2 \gamma \cosh \gamma + 3f_2(\gamma)), \\ -2t_n &= \psi_{n-1}' + \psi_{n+1}' - 2\psi_n' \cosh \gamma - 2(-\delta_{1,n} (\cosh \gamma (J - 2A_1 \sinh 2\gamma) + f_2'(\gamma)) + \delta_{2,n} \frac{1}{2} J), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\psi_n = (n-1)n(n+1)f_n(\gamma), \quad \psi_n' = nf_n'(\gamma). \quad (33)$$

Предположив J известным и применяя процедуру [26], а именно – умножая третье уравнение из (32) на $e^{-n\gamma}$ и суммируя для всех n , а также учитывая условие сходимости рядов $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n' = 0$, получаем

$$\psi_1' = J - 2 \cosh \gamma (J - 2A_1 \sinh 2\gamma) e^\gamma - 2e^{2\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} t_n e^{-n\gamma}. \quad (34)$$

Из первого уравнения (32) непосредственно следует равенство

$$J = \frac{2A_1 \sinh^2 \gamma - s_0}{\sinh \gamma \cosh \gamma}. \quad (35)$$

При $n > 1$ значения ψ_n, ψ_n' вычисляются непосредственно

$$\psi_n = p_n^{(1)} J + p_n^{(2)}; \quad \psi_n = p_n^{(3)} J + p_n^{(4)}, \quad n > 1, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} p_n^{(1)} &= \sinh^{-1} \gamma (2 \sinh(n-2)\gamma - 2 \cosh \gamma \sinh(n-1)\gamma - 2 \cosh \gamma \sinh(n-2)\gamma e^\gamma), \\ p_n^{(2)} &= \sinh^{-1} \gamma (4A_1 \cosh \gamma \sinh 2\gamma \sinh(n-1)\gamma + 4A_1 \cosh \gamma \sinh 2\gamma e^\gamma \sinh(n-2)\gamma - 2e^{2\gamma} \sinh(n-2)\gamma \sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{-k\gamma} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} t_k \sinh(n-k)\gamma), \\ p_n^{(3)} &= \begin{cases} -2 \sinh \gamma, & n = 2, \\ 2\delta_{2,n-2} \sinh \gamma - 4\delta_{2,n-1} \cosh \gamma \sinh \gamma + 2 \sinh \gamma p_{n-1}^{(1)}, & n > 2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$p_n^{(4)} = \begin{cases} 2s_1 + 4A_1 \sinh^2 \gamma \cosh \gamma, & n = 2, \\ 2(n-1)s_{n-1} - (1 - \delta_{2,n-2})\psi_{n-2} + (1 - \delta_{2,n-1})\psi_{n-1} + 2 \sinh \gamma p_{n-1}^{(2)} + (-2\delta_{2,n-2}s_1 - \delta_{2,n-2} 8A_1 \sinh^2 \gamma \cosh \gamma + 4\delta_{2,n-1} \cosh \gamma s_1 + 2 \cosh \gamma \delta_{2,n-1} 8A_1 \sinh^2 \gamma \cosh \gamma), & n > 2. \end{cases} \quad (37)$$

Таким образом, используя уравнения (31), (34), находим оставшиеся неизвестные коэффициенты

$$A_1 = \frac{\psi_1'}{2 \sinh 2\gamma},$$

$$\begin{aligned} A_n &= q_n^{(1)} \psi_n' + q_n^{(2)} \psi_n = [q_n^{(1)} p_n^{(1)} + q_n^{(2)} p_n^{(3)}] J + q_n^{(1)} p_n^{(2)} + q_n^{(2)} p_n^{(4)}, \\ E_n &= q_n^{(3)} \psi_n' + q_n^{(4)} \psi_n = [q_n^{(3)} p_n^{(1)} + q_n^{(4)} p_n^{(3)}] J + q_n^{(3)} p_n^{(2)} + q_n^{(4)} p_n^{(4)}, \quad n > 1, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} q_n^{(1)} &= \frac{n \cosh n\gamma \sinh \gamma - \cosh \gamma \sinh n\gamma}{n^3 \cosh 2\gamma - n(n^2 - 1 + \cosh 2n\gamma)}, \\ q_n^{(2)} &= -\frac{\sinh \gamma \sinh n\gamma}{n^3 \cosh 2\gamma - n(n^2 - 1 + \cosh 2n\gamma)}, \\ q_n^{(3)} &= -\frac{\sinh \gamma \sinh n\gamma}{n^3 \cosh 2\gamma - n(n^2 - 1 + \cosh 2n\gamma)}, \\ q_n^{(4)} &= \frac{\sinh((n+1)\gamma)}{n(n^2 - 1)(1 - n^2 + n^2 \cosh 2\gamma + \cosh 2n\gamma)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Кроме того, используя уравнение (35) и первое уравнение в (38), определяем коэффициенты J, A_1 :

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\sinh 3\gamma} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{-k\gamma} \sinh \gamma - 2s_0 \cosh \gamma \right), \\ A_1 &= \frac{2 \sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{-k\gamma} \coth \gamma - s_0 \sinh^{-2} \gamma}{2(1 + 2 \cosh 2\gamma)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставляя найденные коэффициенты (38), (40) в уравнение (27), получим необходимую компоненту напряжения $\sigma_{\beta\beta}$. Полученное решение (38), (40) можно рассматривать как обобщенное решение в [26].

5. Результаты

Для решения задачи упругие постоянные материала принимались соответствующими константам алюминия: $E = 70,3$ ГПа, $\nu = 0,345$, а константы, характеризующие свойства поверхности, – упругими постоянными, полученными в [5]:

$$\lambda_s = 6,8511 \frac{H}{M}, \quad \mu_s = -0,376 \frac{H}{M},$$

откуда модуль поверхностной упругости рассчитывался как

$$C_{\beta\beta\beta}^{ns} = \lambda_s + 2\mu_s = 6,0991 \text{ Н/м}.$$

Концентрации напряжений в точках A, B (см. рис. 1) вычислялись для различных значений относительного расстояния между отверстием и границей полуплоскости $\lambda = d/R$ (рис. 2). Радиус отверстия для расчетов полагался равным $R = 2$ нм.

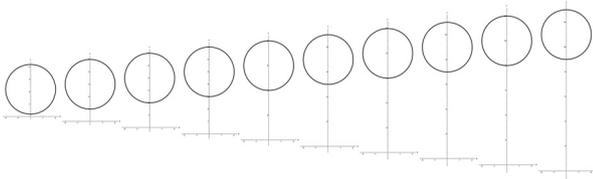


Рис. 2. Расположение отверстия в полуплоскости

Fig. 2. Location of the hole in the half-plane

На рис. 3, a, b представлены зависимости концентрации напряжений с учетом и без учета поверхностного напряжения в точках A и B соответственно. Зависимости b_1, a_1 соответствуют значениям концентрации напряжения с учетом и без учета поверхностного напряжения в точке A ; b_2, a_2 , – в точке B (см. рис. 3, b).

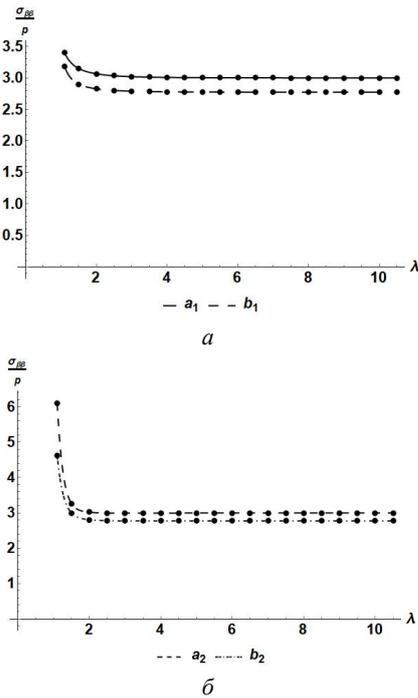


Рис. 3. Концентрации напряжений с учетом ($a_{1,2}$) и без учета ($b_{1,2}$) поверхностного напряжения: a – в точке A ; b – в точке B

Fig. 3. Concentration of stresses with account of ($a_{1,2}$) and without account of ($b_{1,2}$) of the surface stress, (a) is in the point A , (b) is in point B

На рис. 4 представлены зависимости c_1, c_2 , соответствующие значению поверхностного напряжения на контуре отверстия при относительно малом ($\lambda = 1,1$) и относительно большом ($\lambda = 10$) расстояниях между отверстием и границей полуплоскости.

Из полученных графиков видна разница между концентрациями напряжений с учетом и без учета поверхностного напряжения. При отдалении кругового отверстия от границы полуплоскости наблюдается уменьшение влияния границы полуплоскости на концентрацию напряжения на круговом отверстии.

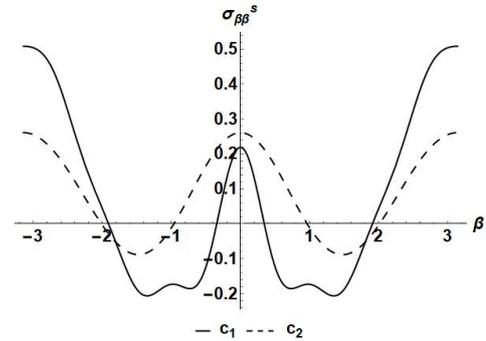


Рис. 4. Поверхностное напряжение в зависимости от координаты β на контуре отверстия

Fig. 4. Surface stress depending on coordinate β at the contour of the hole

Заключение

Получено и исследовано решение задачи теории упругости о полуплоскости, содержащей круговое отверстие с учетом поверхностных эффектов. При помощи разложения в ряды Фурье переменных, представленных в биполярной системе координат, с использованием уравнений теории упругости, дополненных уравнениями поверхностной упругости, рассчитаны величины концентрации напряжений на контуре отверстия. Полученные выражения можно рассматривать как обобщенное решение задачи в традиционной постановке, не учитывающей вклад поверхностных эффектов. Проведены сравнения концентраций напряжений с учетом и без учета вклада поверхностных эффектов в различных точках контура отверстия. Рассмотрен вклад, вносимый поверхностными эффектами в зависимости от относительного расстояния между отверстием и границей полуплоскости. Показано, что, несмотря на довольно простую геометрию, благодаря достаточно малому расстоянию между отверстием и границей полуплоскости значения концентрации напряжений с учетом и без учета поверхностных эффектов существенно отличаются друг от друга.

Благодарность

Работа выполнена по теме государственного задания ИПМех РАН АААА-А20-120011690136-2.

Acknowledgement

The work was carried out on the topic of the state assignment of the IPMech RAS АААА-А20-120011690136-2.

Библиографический список

1. Ibach H. The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // *Surf. Sci. Rep.* – 1997. – Vol. 29. – P. 195–263.
2. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
3. Исследование физико-механических характеристик наномасштабных пленок методом наноиндентирования / А.С. Гращенко, С.А. Кукушкин, А.В. Осипов, А.В. Редьков // *Изв. РАН. МТТ.* – 2018. – № 5. – С. 5–14.
4. Grekov M.A., Vikulina Y.I. Effect of a type of loading on stresses at a planar boundary of a nanomaterial // *Surface Effects in Solid Mechanics.* – 2013. – P. 69–79.
5. Греков М.А., Язовская А.А. Эффект поверхностной упругости и остаточного поверхностного напряжения в упругом теле с эллиптическим наноотверстием // *ПММ.* – 2014. – Т. 78, Вып. 2. – С. 249–261.
6. Grekov M.A., Morozov N.F. Surface effects and problems of nanomechanics // *J. Ningbo Univ.* – 2012. – Vol. 25. – P. 60–63.
7. Eshelby formalism for nanoinhomogeneities / H.L. Duan, J. Wang, Z.P. Huang, B.L. Karihaloo // *Proc. Roy. Soc. L., A.* – 2005. – Vol. 461, № 2062. – P. 3335–3353.
8. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // *Физ. мезомех.* – 2010. – Т. 13, № 5. – С. 127–138.
9. Устинов К.Б. О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // *Вестник ННГУ.* – 2011. – № 4(5). – С. 2541–2542.
10. Nanoporous materials can be made stiffer than non-porous counterparts by surface modification / H.L. Duan, J. Wang, B.L. Karihaloo, Z.P. Huang // *Acta materialia.* – 2006. – Vol. 54. – P. 2983–2990.
11. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the shell and plate theories with surface stresses. *Shell Structures. Theory and Applications* // W. Pietraszkiewicz, I. Kreja (Eds). Boca Raton, CRC Press. – 2010. – Vol. 2. – P. 47–50.
12. Gandilyan D.V., Ustinov K.B. Influence of surface effects on stress state in a body with two circular holes // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series.* – 2020. – Vol. 1474. – P. 1–11. DOI: 10.1088/1742-6596/1474/1/012014
13. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Влияние поверхностных эффектов в задачах теории упругости для областей, ограниченных неконцентрическими окружностями // *Изв. РАН. МТТ.* – 2020. [В печати.]
14. Wang L. Surface effect on deformation around an elliptical hole by surface energy density theory // *Mathematics and mechanics of solids.* – 2019. – Vol. 26. – P. 337–347.
15. Grekov M.A., Sergeeva T.S. Interaction of edge dislocation array with biomaterial interface incorporating interface elasticity // *International Journal of Engineering Science.* – 2020. – Vol. 149, № 103233. – P. 1–17.
16. Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H. Stress concentration analysis of nanosized thin-film coating with rough interface // *Continuum Mech. Thermodyn.* – 2019. – Vol. 31. – P. 1863–1871. DOI: 10.1007/s00161-019-00780-4
17. The effects of surface elasticity on the thermal stress around a circular nano-hole in a thermoelectric material / Kun Song, Hao-Peng Song, Peter Schiavone, Cun-Fa Gao // *Mathematics and mechanics of solids.* – 2019. – P. 3156–3166.
18. Об учете масштабных эффектов при моделировании механических и трибологических свойств двухфазных микро- и наномодифицированных полимерных покрытий / В.М. Бузник, С.А. Лурье, Д.Б. Волков-Богородский, А.Г. Князева, Ю.О. Соляев, Е.И. Попова // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2015. – № 4. – С. 36–54.
19. Hashin Z. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1991. – Vol. 39, № 6. – P. 745–762.
20. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. On the modeling of surface and interface elastic effects in case of eigenstrains // *Models, Simulations and Applications. Series: Advanced Structured Materials* / Altenbach H., Morozov N.F., Eds. – 2013. – XV. 30. – P. 167–180.
21. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. О построении теории поверхностной упругости для плоской границы // *Физ. мезомех.* – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 75–83.
22. Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Устинов К.Б. Шарообразное включение в упругой матрице при наличии собственных деформаций с учетом влияния свойств поверхности раздела, рассматриваемой как предел слоя конечной толщины // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* – 2019. – № 3. – С. 30–40.
23. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a pore in compression // *International Journal of Fracture.* – 1993. – Vol. 62. – P. 307–324. DOI: 10.1007/BF00017238
24. Ustinov K.B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a hole in bi-axial loading // *International Journal of Fracture.* – 1994. – Vol. 68. – P. 73–77. DOI: 10.1007/BF00013075
25. Jeffery G.B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates // *Phil. Trans of the Roy Soc of London ser. A.* – 1921. – Vol. 221. – P. 265–293.
26. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
27. Chin-Bing Ling. On the stresses in a plate containing two circular holes // *J. Appl. Phys.* – 1948. – Vol. 19, № 1. – P. 77–82.
28. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Ration. Mech. and Analysis.* – 1975. – Vol. 57, № 4. – P. 291–323.
29. Spiegel M., Lipschutz S., Spellman D. *Vector Analysis* (2nd Edition). McGraw Hill, 2009. – 254 p.
30. Shuttleworth R. The surface tension of solids // *Proc. Phys. Soc.* – 1950. – Vol. A63. – P. 444–457.
31. Vikulina Y.I., Grekov M.A., Kostyrko S.A. Model of film coating with weakly curved surface // *Mechanics of Solids.* – 2010. – Vol. 45, № 6. – P. 778–788.

References

1. Ibach H. The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures. *Surf. Sci. Rep.*, 1997, Vol. 29, pp. 195-263.
2. Podstrigach Ia.S., Povstenko Iu.Z. *Vvedenie v mekhaniku poverkhnostnykh iavlenii v deformiruemyykh tverdykh telakh* [Introduction to the mechanics of surface phenomena in deformable solids]. Kiev: Nauk. dumka, 1985, 200 p.
3. Grashhenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Red'kov A.V. Issledovanie fiziko-mekhanicheskikh harakteristik nanomasshtabnykh plenok metodom nanoindentirovaniya [Investigation of the physico-mechanical characteristics of nanoscale films by nanoindentation]. *Izv. RAN. MTT – Mechanics of Solids*, 2018, № 5, pp. 5-14.
4. Grekov M.A., Vikulina Y.I. Effect of a type of loading on stresses at a planar boundary of a nanomaterial. *Surface Effects in Solid Mechanics*, 2013, pp. 69-79.
5. Grekov M.A., Jazovskaja A.A. Jeffekt poverkhnostnoj uprugosti i ostatochnogo poverkhnostnogo naprjazhenija v uprugom tele s jellipticheskim nanootverstiem [The effect of surface elasticity and residual surface stress in an elastic body with an elliptical nanohole]. *PMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, Vol. 78, № 2, pp. 249-261.
6. Grekov M.A., Morozov N.F. Surface effects and problems of nanomechanics. *J. Ningbo Univ.*, 2012, Vol. 25, pp. 60-63.
7. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L. Eshelby formalism for nanoinhomogeneities. *Proc. Roy. Soc. L., A.*, 2005, Vol. 461, № 2062, pp. 3335-3353.
8. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.B. Vlijanie poverkhnostnykh ostatochnykh naprjazhenij i poverkhnostnoj uprugosti na deformirovanie sharoobraznykh vkljuchenij nanometrovyykh razmerov v uprugoj matricе [Effect of residual surface stress and surface deformation of nanometer spherical inclusions in an elastic matrix]. *Fizicheskaya mezomehanika – Physical Mesomechanics*, 2010, Vol. 13, № 5, pp. 127-138.
9. Ustinov K.B. O vlijanii poverkhnostnykh ostatochnykh naprjazhenij i poverkhnostnoj uprugosti na deformirovanie sharoobraznykh vkljuchenij nanometrovyykh razmerov v uprugoj matricе [On the effect of surface residual stresses and surface elasticity on the deformation of spherical inclusions of nanometer sizes in an elastic matrix]. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, № 4(5), pp. 2541-2542.
10. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L., Huang Z.P. Nanoporous materials can be made stiffer than non-porous counterparts by surface modification. *Acta materialia*, 2006, Vol. 54, pp. 2983-2990.
11. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the shell and plate theories with surface stresses. *Shell Structures. Theory and Applications*. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja (Eds). Boca Raton, CRC Press, 2010, Vol. 2, pp. 47-50.
12. Gandilyan D.V., Ustinov K.B. Influence of surface effects on stress state in a body with two circular holes. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2020, Vol. 1474, pp. 1-11. doi:10.1088/1742-6596/1474/1/012014
13. Gandilyan D.V., Ustinov K.B. Vlijanie poverkhnostnykh jeffektov v zadachah teorii uprugosti dlja oblastej, ogranichennykh nekoncentricheskimi okruzhnostjami [Influence of surface effects in problems of elasticity theory for areas bounded by non-concentric circles]. *Izv. RAN. MTT – Mechanics of Solids*, 2020. [In the press]
14. Wang L. Surface effect on deformation around an elliptical hole by surface energy density theory. *Mathematics and mechanics of solids*, 2019, Vol. 26, pp. 337–347.
15. Grekov M.A., Sergeeva T.S. Interaction of edge dislocation array with biomaterial interface incorporating interface elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 2020, Vol. 149, № 103233, pp. 1-17.
16. Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H. Stress concentration analysis of nanosized thin-film coating with rough interface. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2019, Vol. 31, pp. 1863-1871. doi:10.1007/s00161-019-00780-4
17. Kun Song, Hao-Peng Song, Peter Schiavone, Cun-Fa Gao. The effects of surface elasticity on the thermal stress around a circular nano-hole in a thermoelectric material. *Mathematics and mechanics of solids*, 2019, pp. 3156-3166.
18. Buznik V.M., Lur'e S.A., Volkov-Bogorodskij D.B., Knjazeva A.G., Soljaev Ju.O., Popova E.I. Ob uchete masshtabnykh jeffektov pri modelirovanii mehanicheskikh i tribologicheskikh svojstv dvuhfaznykh mikro- i nanomodificirovannykh polimernykh pokrytij [Consideration of scale effects in modeling the mechanical and tribological properties of two-phase micro- and nanomodified polymer coatings], *Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Mehanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, № 4, pp. 36-54.
19. Hashin Z. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, Vol. 39, № 6, pp. 745-762.
20. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. On the modeling of surface and interface elastic effects in case of eigenstrains. *Models, Simulations and Applications. Series: Advanced Structured Materials / Altenbach H., Morozov N.F., Eds.*, 2013, XV. 30, pp. 167-180.
21. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.B. O postroenii teorii poverkhnostnoj uprugosti dlja ploskoj granicy [On the construction of the theory of surface elasticity for a plane boundary], *Fizicheskaya mezomehanika – Physical Mesomechanics*. 2013, Vol. 16, № 4, pp. 75-83.
22. Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Ustinov K.B. Sharoobraznoe vkljuchenie v uprugoj matricе pri nalichii sobstvennykh deformacij s uchetom vlijaniya svojstv poverkhnosti razdela, rassmatrivaemoj kak predel sloja konechnoj tolshhiny [A spherical inclusion in an elastic matrix in the presence of intrinsic deformations, taking into account the influence of the properties of the interface, considered as the limit of a layer of finite thickness], *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 2019, № 3, pp. 30-40.
23. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a pore in compression. *International Journal of Fracture*, 1993, Vol. 62, pp. 307-324. doi: 10.1007/BF00017238
24. Ustinov K.B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a hole in bi-axial loading. *International Journal of Fracture*, 1994, Vol. 68, pp. 73-77. doi:10.1007/BF00013075
25. Jeffery G.B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. *Phil. Trans of the Roy Soc of London ser. A.*, 1921, Vol. 221, pp. 265-293.
26. Uflyand Ya.S. Bipoljarnye koordinaty v teorii uprugosti [Bipolar coordinates in theory of elasticity]. M.; L.: Gostehizdat – Moscow-Leningrad Gostehizdat, 1950, 232 p.
27. Chin-Bing Ling. On the stresses in a plate containing two circular holes. *J. Appl. Phys.*, 1948, Vol. 19, № 1, pp. 77-82.
28. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1975, Vol. 57, № 4, pp. 291–323.
29. Spiegel M., Lipschutz S., Spellman D. *Vector Analysis* (2nd Edition). McGraw Hill, 2009, 254 p.
30. Shuttleworth R. The surface tension of solids. *Proc. Phys. Soc.*, 1950, Vol. A63, pp. 444-457.
31. Vikulina Y.I., Grekov M.A., Kostyrko S.A. Model of film coating with weakly curved surface. *Mechanics of Solids*, 2010, Vol. 45, № 6, pp. 778-788.