



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.4.07

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ВНЕДРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ В СЖИМАЕМУЮ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

Е.Ю. Линник¹, В.Л. Котов¹, А.Ю. Константинов^{1, 2}

¹Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

²Государственный научно-исследовательский институт машиностроения им. В.В. Бахирева, Нижегородская обл., Дзержинск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 сентября 2017 г.
Принята: 9 ноября 2017 г.
Опубликована: 29 декабря 2017 г.

Ключевые слова:

проникание, упругопластическая грунтовая среда, конический ударник, пирамидальные тела, звездообразное тело, модель локального взаимодействия, задача о расширении сферической полости, трехмерное моделирование.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о нормальном ударе и проникании жестких пространственных тел в полупространство, занимаемое упругопластической средой. Для среды проникания принимается модель линейно сжимаемой упругопластической среды при линейной зависимости предела текучести от давления (условие пластичности Мизеса–Шлейхера–Боткина). Решение задачи осуществляется численно в трехмерной постановке с применением пакета программ LS-Dyna. Упругопластическая среда проникания рассматривается на неподвижной эйлеровой сетке с выделением пустых ячеек, в которые материал перетекает в процессе деформирования. Ударники моделируются жестким недеформируемым телом в лагранжевой системе координат.

Для сравнения, параметры процесса проникания – силы сопротивления внедрению и глубины проникания ударников получены также в рамках модели локального взаимодействия на основе аналитического решения задачи о расширении сферической полости. Ранее на основе данных обращенных экспериментов и численных расчетов в осесимметричной постановке показана применимость модели локального взаимодействия к определению силовых и кинематических характеристик острых конических тел. Проверка применимости модели для описания движения пространственных тел в полной трехмерной постановке ранее не проводилась.

Исследуемые тела – круговой конус, трех- и четырехгранные пирамиды, тело с звездообразным поперечным сечением – обладают одинаковой площадью основания, нормаль к боковой поверхности тел составляет с направлением движения постоянный угол 60 градусов. Особенностью построения формы рассматриваемых пространственных тел является тот факт, что в рамках модели локального взаимодействия эти тела должны обладать одинаковым сопротивлением внедрению, совпадающим с сопротивлением внедрению кругового конуса. Все эти тела имеют высоту меньше высоты конуса.

© Линник Елена Юрьевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, e-mail: ElenkaLinnik@gmail.com
Котов Василий Леонидович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: vkotov@inbox.ru
Константинов Александр Юрьевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: constantinov.al@yandex.ru

Elena Yu. Linnik – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, e-mail: ElenkaLinnik@gmail.com
Vasily L. Kotov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: vkotov@inbox.ru
Aleksandr Yu. Konstantinov – CSc in Technical Sciences, Senior Researcher, e-mail: constantinov.al@yandex.ru



Приводятся результаты трехмерных численных расчетов проникания тел по нормали в упругопластическую среду с дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями, демонстрирующие увеличение сопротивления внедрению, пропорциональное уменьшению высоты тела. Для рассмотренных тел одинаковой высоты изменения в форме поперечного сечения не приводят к существенным отличиям в силе сопротивления и глубине проникания.

© ПНИПУ

MODELING THE DYNAMIC PENETRATION PROCESSES OF DIMENSIONAL BODIES IN A COMPRESSIBLE ELASTOPLASTIC MEDIUM

E.Yu. Linnik¹, V.L. Kotov¹, A.Yu. Konstantinov^{1,2}

¹Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation

²Bakhirev State Research Institute of Engineering, Dzerzhinsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 September 2017
Accepted: 9 November 2017
Published: 29 December 2017

Keywords:

penetration, elastoplastic medium, conical impactor, pyramidal bodies, star-shaped body, model of local interaction, the problem of expanding a spherical cavity, three-dimensional modeling.

ABSTRACT

The paper considers the problem of the normal impact and penetration of rigid spatial bodies into the half-space of the elastoplastic medium. For the medium, a model of a linearly compressible elastoplastic medium is adopted with a linear dependence of the yield stress on the pressure (the Mises-Schleicher-Botkin plasticity condition). The solution of the problem is carried out numerically in a three-dimensional formulation using the software package LS-Dyna. The elastic-plastic penetration medium is considered using a fixed Euler grid with the allocation of empty cells into which the material flows during deformation. The strikers are modeled by a rigid undeformed body in the Lagrangian coordinate system.

For comparison, the parameters of the penetration process, i.e. the resistance forces to penetration and the penetration depth of the strikers, were also obtained within the framework of the local interaction model on the basis of the analytical solution of the problem of expanding the spherical cavity. Earlier the applicability of the local interaction model to the determination of the force and kinematic characteristics of sharp conical bodies is shown based on the data of the inverted experiments and numerical calculations in an axisymmetric formulation. Verification of the model applicability aimed at describing the motion of three-dimensional bodies in the full three-dimensional formulation has not been carried out before.

The investigated bodies, i.e. a circular cone, three- and tetrahedral pyramids, and a body with a star-shaped cross-section, have the same area of the base, the normal to the lateral surface of the bodies makes up a constant angle of 60° with the direction of motion. The peculiarity of constructing the shape of the three-dimensional bodies in question is the fact that within the framework of the local interaction model these bodies should have the same resistance to the introduction, which coincides with the resistance to the introduction of the circular cone. All these bodies have a height less than the height of the cone.

The results of the three-dimensional numerical calculations of the bodies' penetration along the normal into an elastoplastic medium with subsonic and supersonic velocities are presented, which demonstrate an increase in resistance to penetration proportional to a decrease in body height. For the bodies of the same height, the changes in the form of the cross section do not lead to significant differences in the strength of the resistance and penetration depth.

© PNRPU

Введение

Исследование нелинейных процессов внедрения тел различной формы в сжимаемые упругопластические среды традиционно проводится на базе экспериментальных, теоретических и численных методов. Обобщением данных эксперимента являются эмпирические формулы для глубины проникания и силы сопротивления внедрению в зависимости от параметров ударника и мишени – массы тела и его начальной скорости, плотности и прочности среды проникания, коэффициента трения и других [1, 2]. Большинство известных теоретических методов моделирования процессов удара и проникания предполагает снижение размерности исходной трехмерной задачи. На основе выделения системы уравнений одномерного движения вдоль оси проникания получены приближенные решения,

отражающие основные закономерности проникания в упругопластическую среду затупленного абсолютно твердого тела [3]. Известны аналитические решения задач о проникании тел вращения в пластический газ в предположении о движении частиц среды по нормали к оси симметрии тела (гипотеза плоских сечений) или по нормали к поверхности ударника [4]. Предложен численный метод расчета глубины проникания в пористые пластические среды в предположении, что частицы грунта движутся по прямым, исходящим из некоторого центра деформации [5]. Решение одномерной автомодельной задачи о косом ударе применялось для оценки нормальных и касательных напряжений на поверхности проникающей в грунт сферы [6]. Решение одномерной задачи о динамическом расширении полости впервые получено в работе [7] и применялось для приближенных оценок напряжений и сил, действующих на ударник [8]. Представленные подходы получили развитие в созданных на их основе численно-аналитических методиках и применялись для исследования процессов нормального и наклонного проникания в грунты, скальные породы, бетоны и металлы [9–14]. Модели, в которых напряжение на элементе контактной поверхности проникающего тела зависит только от его ориентации и не зависит от формы тела в окрестности этого элемента, получили название модели локального взаимодействия.

Современные аналитические обзорные работы по проблеме удара и проникания [15–17] свидетельствуют о широком распространении модификаций модели локального взаимодействия (МЛВ). В соответствии с одной из реализаций МЛВ давление в каждой точке боковой поверхности ударника отождествляется с давлением на внутренней поверхности сферической или цилиндрической полости, расширяющейся в безграничной среде от нулевого радиуса до радиуса ударника («Cavity Expansion Model» в зарубежной литературе). Таким образом, решения задач о расширении полости (см., например, [18–23]), имея самостоятельное значение, в то же время применяются для оценки параметров моделей локального взаимодействия. Инженерные методики на базе МЛВ для исследования процессов удара и проникания продолжают совершенствоваться и в настоящее время на основе данных экспериментов и численного моделирования [23–34]. Преимуществом подобного подхода является возможность эффективно решать задачи анализа устойчивости и оптимизации формы тел, проникающих в сопротивляющиеся среды [35–42]. В ряде случаев решение может быть получено в конечном виде в зависимости от параметров процесса, что существенно облегчает анализ основных закономерностей нестационарных процессов удара и проникания жестких тел в нелинейные сжимаемые среды.

Ранее была предложена модификация МЛВ [23], которая основана на применении решения задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде при учете нелинейной ударной адиабаты и зависимости сопротивления сдвигу от давления [22]. Постановка задачи предполагает несжимаемость среды за фронтом ударной волны для каждой скорости расширения полости и при линейной зависимости предела текучести от давления допускает аналитическое решение. Проведенные совместные экспериментальные, теоретические и численные исследования процессов нормального внедрения острых конических ударников в сухой песок показали применимость модифицированной МЛВ с погрешностью, не превышающей ошибку эксперимента [43] при прямолинейном движении тел по нормали к свободной поверхности грунтовой среды. В случае наклонного проникания острого конуса в упругопластическую среду силовые и кинематические параметры процесса, полученные в рамках МЛВ, демонстрируют большую ошибку по сравнению с данными компьютерного моделирования в трехмерной постановке [44, 45].

Следствием гипотезы локальности, применяемой в МЛВ, является существование множества тел, обладающих одинаковым сопротивлением при условии, что нормаль в каждой точке элемента боковой поверхности таких тел составляет одинаковый угол с вектором направления движения при равной площади оснований всех тел. В осесимметричной постановке единственным таким телом будет круговой конус, в пространственной постановке это могут быть пирамиды или тела звездообразного поперечного сечения. Проникание таких тел анализировалось в рамках МЛВ в работах [36, 37, 39]. Проводились прямые эксперименты для круговых конусов и тел звездообразного поперечного сечения, проникающих в пластилин и песок [46, 47].

В данной работе сравниваются силы сопротивления внедрению в сжимаемую упругопластическую среду пространственных тел, эквивалентных в рамках МЛВ сопротивлению кругового конуса, полученные численно в трехмерной постановке.

1. Постановка задачи проникания

В статье проводится исследование процессов удара и проникания жестких тел по нормали в упругопластическую среду. Математическая модель динамики упругопластической среды Григоряна записывается в прямоугольной декартовой системе координат в виде системы дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения массы и импульса и уравнений теории пластического течения с условием пластичности Мизеса–Шлейхера–Боткина:

$$\begin{aligned} d\rho/dt + \rho(u_{r,r} + u_{z,z}) &= -(\rho u_r)/r, \\ \rho du_r/dt - \sigma_{rr,r} - \sigma_{rz,z} &= (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r, \quad \rho du_z/dt - \sigma_{rz,r} - \sigma_{zz,z} = (\sigma_{rz})/r, \\ D_j s_{ij} + \lambda s_{ij} &= 2Ge_{ij}, \quad (i, j = r, z), \quad s_{ij} s_{ij} \leq \frac{2}{3} \sigma_T^2(p), \end{aligned} \quad (1)$$

где t – время; ρ – текущая плотность среды; u_i , σ_{ij} , s_{ij} , e_{ij} – компоненты вектора скорости, тензора напряжений Коши и девiatorов тензоров напряжений и скоростей деформаций соответственно; p – давление; H – функция Хевисайда; D_j – производная Яумана; d/dt – полная производная по времени; G – модуль сдвига; σ_T – предел текучести, зависящий от давления; по повторяющимся индексам производится суммирование. Параметр $\lambda = 0$ при упругом деформировании и $\lambda > 0$, если реализуется условие пластичности.

Замыкается система дифференциальных уравнений (1) линейной зависимостью давления от объемной деформации e в упругопластической среде (при сжатии):

$$p = KeH(e), \quad (2)$$

где K – модуль объемного сжатия.

Принимается [45, 48] линейная зависимость предела текучести от давления

$$\sigma_T = Y + kp \quad (3)$$

с постоянными коэффициентами Y и k , определяющими соответственно сцепление и внутреннее трение упругопластической среды.

В начальный момент времени скорости частиц ударника равны начальной скорости удара V_0 , напряжения и скорость частиц грунта равны нулю. На контактной границе выполняется условие равенства нормальных компонент векторов скоростей частиц по обе

стороны контактной поверхности, касательные напряжения равны нулю. Рассматривается плоскопараллельное движение тел, на плоскости симметрии задаются равными нулю нормальные компоненты вектора скорости и тангенциальные компоненты тензора напряжений. На внешних границах области выполняются условия равенства нулю нормальной и тангенциальной компонент тензора напряжений.

Численное решение трехмерной задачи проникания осуществляется с использованием программного продукта LS-Dуна в постановке, аналогичной работам [45, 48]. Для моделирования глубокого (несколько длин проникающего тела) внедрения ударника в грунт решение проводится в постановке FSI (*Fluid Structure Interaction*). При этом движение жестких ударников рассматривается в приближении недеформируемого твердого тела, в то время как уравнения движения среды решаются на неподвижной эйлеровой сетке. Поведение среды проникания описывается моделью *MAT_SOIL_AND_FOAM, в которой кривая объемной сжимаемости (2) задается в табличном виде, а зависимость квадрата напряжения течения от давления выражается полиномом второй степени. Дискретизация области преграды осуществляется при помощи восьмиузловых гексагональных элементов с одной точкой интегрирования в формулировке MMALE (Multi-material Arbitrary Lagrangian Eulerian Method) с возможностью одновременного присутствия нескольких материалов в одной расчетной ячейке.

Область, занимаемая упругопластической средой, представляется в виде прямоугольного параллелепипеда, размеры которого выбраны таким образом, чтобы волны растяжения-сжатия, отраженные от стенок области, не искажали результаты расчетов. Ввиду наличия плоскости симметрии рассматривается половина расчетной области. Ранее была продемонстрирована линейная сходимость результатов численных расчетов проникания конических и пирамидальных тел в упругопластическую среду в зависимости от минимального размера ячейки конечно-элементной сетки [48]. Там же приводятся параметры расчетной сетки, обеспечивающей определение величины силы сопротивления внедрению пространственных ударников в среду с относительной погрешностью не более 10 %.

Силовые и кинематические параметры внедрения тел могут также быть получены в рамках МЛВ на основе аналитического решения задачи о расширении сферической полости [23, 41, 43, 45]. Осевая компонента вектора силы сопротивления внедрению тела в сопротивляющуюся среду со скоростью V_0 в некотором диапазоне изменения скоростей может быть описана [23] двучленной квадратичной зависимостью

$$F = \sigma_n S_0, \quad \sigma_n = \rho_0 (\alpha V_n + \beta) V_n, \quad V_n = V_0 \sin \eta, \quad (4)$$

где σ_n – напряжение, действующее на боковую поверхность проникающего тела в направлении нормали; S_0 – площадь основания тела; ρ_0 – начальная плотность среды, угол $\frac{\pi}{2} - \eta$ образован направлением движения и внешней нормалью к боковой поверхности тела; α , β – константы.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров модели упругопластической среды: $\rho_0 = 2000 \text{ кг/м}^3$, $Y = 0,5 \text{ МПа}$, $\kappa = 1$, $V_0 = 150 \text{ м/с}$, $K = 320 \text{ МПа}$, $G = 160 \text{ МПа}$ [16, 19]. Радиус основания кругового конуса $R = 1 \text{ см}$, угол полураствора при вершине $\eta = 30^\circ$, геометрические параметры пирамидальных тел проникания представлены в работе [48].

Значения констант МЛВ (4) $\alpha = 1$, $\beta = 200$ м/с получены с применением аппроксимации методом наименьших квадратов решений задачи о расширении сферической полости [23] в диапазоне изменения скоростей V_n от 75 до 300 м/с.

Упрощенная модель линейно сжимаемой упругопластической среды Мизеса–Шлейхера (1)–(3) принимается для корректной оценки погрешности приближенного подхода к моделированию процессов проникания аналогично работам [44, 45]. В подобной постановке задача о расширении сферической полости имеет аналитическое решение, и модель локального взаимодействия на базе решения этой задачи может быть записана в конечном виде. Как показывают расчеты [45], силы сопротивления прониканию острых конических ударников, полученные в рамках этой МЛВ и в осесимметричных численных расчетах, оказываются близки. Таким образом, наблюдаемые отличия при описании внедрения пространственных тел не будут связаны с ошибками учета свойств среды проникания в МЛВ.

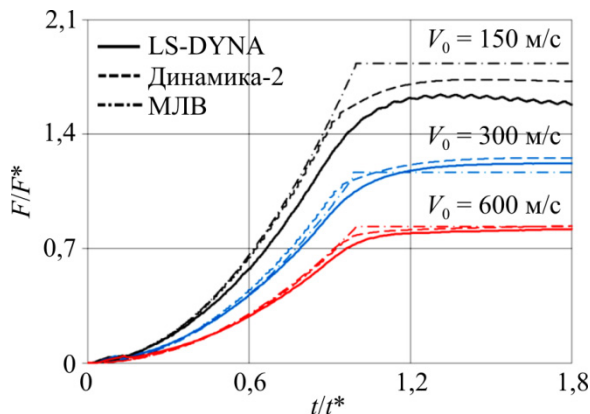


Рис. 1. Безразмерные временные зависимости осевых сил сопротивления внедрению конического ударника с постоянными скоростями $V_0 = 150, 300$ и 600 м/с

Fig. 1. The dimensionless time dependences of the axial forces of resistance to the introduction of a conical impactor with constant velocities $V_0 = 150, 300$ и 600 m/s

На рис. 1 сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями приведены безразмерные временные зависимости осевых сил сопротивления внедрению конического ударника высотой $H = R \operatorname{ctg} \eta = \sqrt{3}R$, полученные в трехмерной постановке с применением программного комплекса LS-Dyna, в осесимметричной постановке в рамках пакета программ «Динамика-2» и на основе МЛВ (4) соответственно,

$$F^* = \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S_0, \quad t^* = \frac{H}{V_0}.$$

Время t^* соответствует моменту времени, когда тело погрузится в среду на глубину, равную высоте ударника, что приблизительно соответствует достижению максимального значения силы сопротивления внедрению.

Расчеты проводились при постоянных скоростях внедрения $V_0 = 150, 300$ и 600 м/с, что при заданных параметрах среды соответствует дозвуковому и сверхзвуковому режимам проникания. Отметим хорошее совпадение результатов расчетов, полученных при использовании различных пакетов программ и МЛВ (4) при выбранных значениях констант.

Из рис. 1 видно, что при проникании конического ударника с постоянной скоростью максимальное значение силы сопротивления достигается при $t/t^* \approx 1$, далее устанавливается так называемое квазистационарное значение. Рассмотренный процесс проникания с постоянной скоростью моделирует начальную стадию обращенных экспериментов [23, 43].

2. Результаты численных расчетов проникания пространственных тел с постоянной скоростью

Безразмерные временные зависимости осевых сил сопротивления внедрению пространственных пирамидальных тел в упругопластическую среду со скоростью 150 м/с приведены на рис. 2.

Кривые 1–4 соответствуют силам сопротивления внедрению четырехгранных пирамид с отношением диагоналей в основании, равным 1, 2, 3 и 6, кривая 5 соответствует трехгранной пирамиде с равнобедренным треугольником в основании.

Обозначим символами H^* и S_0 высоту и площадь основания конуса с углом полураствора при вершине 30° и радиусом основания $R = 1$ см. Площадь основания всех рассмотренных пирамид равна S_0 , однако высоты тел $H < H^*$. Наименьшая высота $H = 0,5H^*$ наблюдается для пирамиды с отношением диагоналей в основании, равным 6.

Временные зависимости силы сопротивления внедрению пространственных тел и конуса качественно подобны – после достижения максимума изменение силы сопротивления внедрению практически отсутствует. При этом само максимальное значение растет с уменьшением высоты тела. Подобные результаты получены и при скорости проникания 600 м/с.

Также рассматривался процесс проникания тела со звездообразным поперечным сечением. Четырехлучевая звезда образована пересечением под прямым углом двух ромбов с отношением диагоналей, равным 2. Высота такого тела равна высоте четырехугольной пирамиды с отношением диагоналей, равным 3, и составляет $H \approx 0,7H^*$.

На рис. 3 приведены безразмерные временные зависимости сил сопротивления внедрению со скоростью 150 м/с (рис. 3, а) и 600 м/с (рис. 3, б) тел со звездообразным и ромбовидным сечением (кривые 1 и 2), а также круговых конусов с высотой $0,7H^*$ и H^* (кривые 3 и 4).

Для тел равной высоты отличия сил сопротивления внедрению не превосходит 10 % и составляет 25–30 % по сравнению с конусом высотой H^* как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях внедрения.

На рис. 4 приведены безразмерные временные зависимости сил сопротивления внедрению круговых конусов со скоростью 150 м/с (рис. 4, а) и 600 м/с (рис. 4, б): кривые 1–5 соответствуют высотам конусов $H/H^* = 0,46; 0,58; 0,72; 0,86$ и 1. При дозвуковых скоростях с уменьшением высоты конуса растет отличие максимального и квазистационарного значений силы сопротивления внедрению (темные и светлые кружки на рис. 4), при сверхзвуковых скоростях отличие максимального и квазистационарного значений силы сопротивления не превышает 5 % (косые крестики с интервалами $\pm 5\%$ на рис. 4).

На рис. 5 приведены безразмерные силы сопротивления внедрению ударников в зависимости от высоты, отнесенной к H^* : линии с темными и светлыми кружками соответствуют максимальным и квазистационарным значениям силы сопротивления внедре-

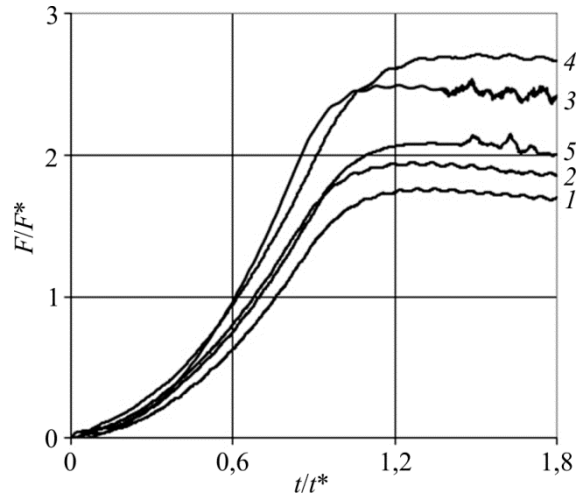


Рис. 2. Безразмерные временные зависимости осевых сил сопротивления внедрению пространственных пирамидальных тел в упругопластическую среду со скоростью 150 м/с
Fig. 2. Dimensionless time dependences of axial forces of resistance to the introduction of spatial pyramidal bodies into an elastoplastic medium at a velocity of 150 m/s

нию конусов со скоростью 150 м/с (см. рис. 4, а), линия с косыми крестиками соответствует средним значениям силы сопротивления на квазистационарной стадии внедрения со скоростью 600 м/с (см. рис. 4, б), темные и светлые ромбы, треугольник и звезда соответствуют максимальным значениям силы сопротивления внедрению четырехгранных пирамид, трехгранной пирамиды и тела со звездообразным поперечным сечением, интервалами $\pm 10\%$ показана ошибка трехмерных численных расчетов пространственных тел.

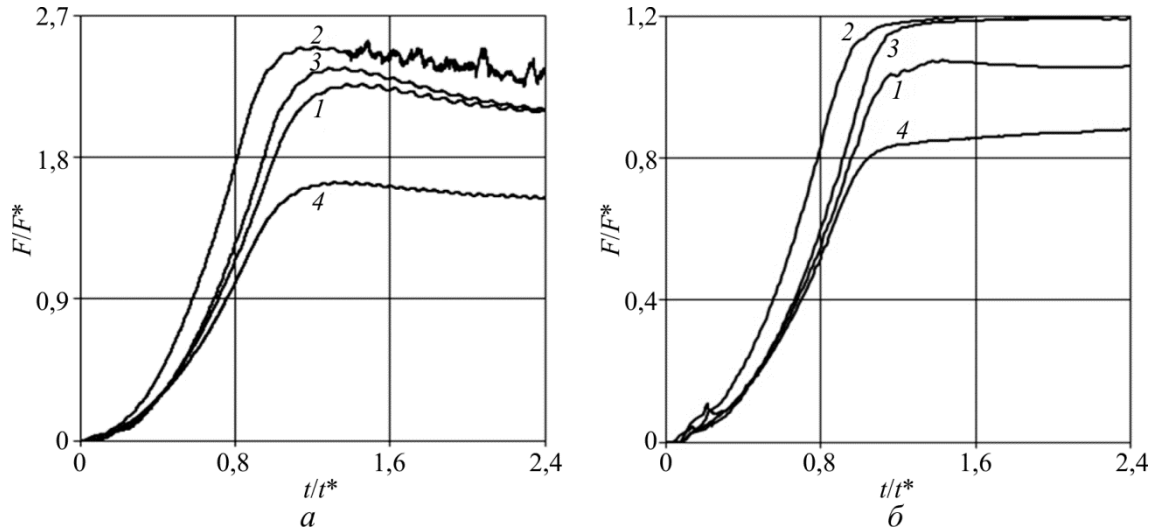


Рис. 3. Безразмерные временные зависимости сил сопротивления внедрению со скоростью 150 м/с (а) и 600 м/с (б): кривые 1, 2 соответствуют телам со звездообразным и ромбовидным сечением, кривые 3, 4 – круговым конусам с высотами $0,7H^*$ и H^*

Fig. 3. Dimensionless time dependences of the resistance to penetration at a velocity of 150 m/s (a) and 600 m/s (b): curves 1 and 2 correspond to bodies with a star-shaped and diamond-shaped section, curves 3, 4 to circular cones with a heights of $0,7H^*$ and H^*

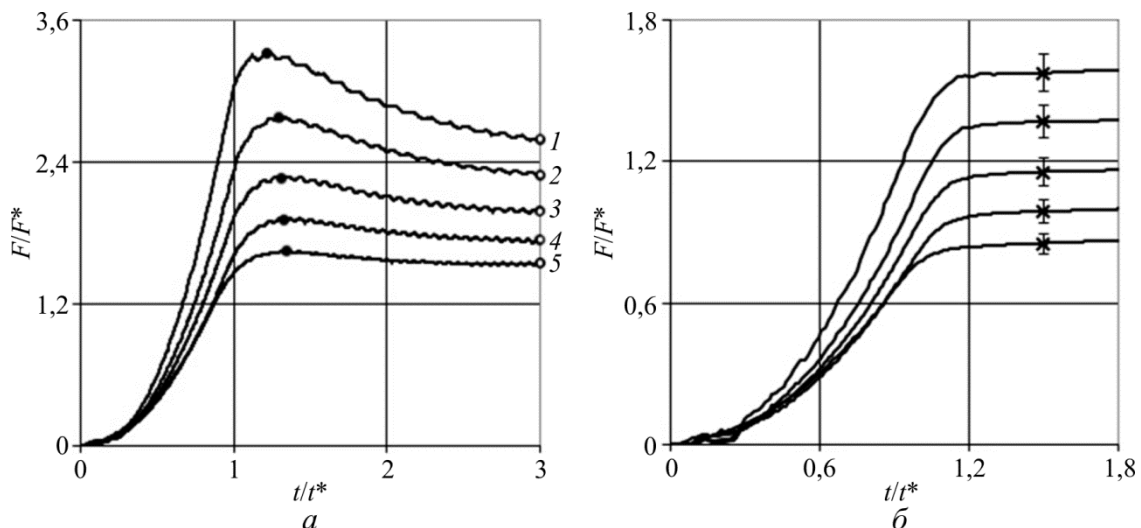


Рис. 4. Безразмерные временные зависимости сил сопротивления внедрению круговых конусов со скоростью 150 м/с (а) и 600 м/с (б): кривые 1–5 соответствуют высотам конусов $H/H^* = 0,46; 0,58; 0,72; 0,86$ и 1

Fig. 4. Dimensionless time dependences of the resistance forces on the introduction of circular cones at a velocity of 150 m/s (a) and 600 m/s (b): curves 1–5 correspond to cone heights $H/H^* = 0,46; 0,58; 0,72; 0,86$ and 1

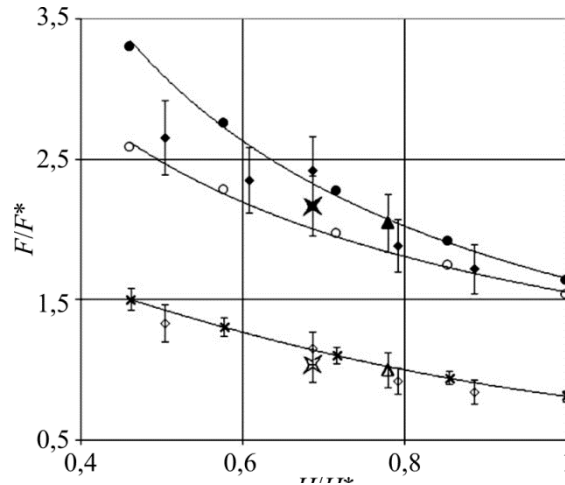


Рис. 5. Безразмерные зависимости силы сопротивления внедрению ударников от высоты

Fig. 5. Dimensionless dependencies of the resistance force to the introduction of impactors from height

Отмечается обратная пропорциональность максимальных значений силы сопротивления внедрению пространственных тел от высоты и их близость к значениям силы сопротивления внедрению конических ударников той же высоты.

3. Результаты численных расчетов проникания пространственных тел по инерции

Аналогичные исследования силовых характеристик проводились в случае движения тел заданной массы по инерции. Масса ударников m составляла 40 г.

На рис. 6 приведены осевые силы сопротивления внедрению конического ударника высотой $H = H^*$ в зависимости от скорости проникания при начальных скоростях 300, 450 и 600 м/с: сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии получены в трехмерной постановке с применением программного комплекса LS-Dyna, в осесимметричной постановке в рамках пакета программ «Динамика-2» и на основе МЛВ (4) соответственно, темные треугольники соответствуют квазистационарным значениям силы сопротивления внедрению конического ударника с постоянными скоростями 150, 300, 450 и 600 м/с.

Результаты осесимметричных расчетов получены на подробной сетке, обеспечивающей погрешность не более 3 % [23]. Близость численных результатов, полученных на основе различных программных комплексов, свидетельствует о достаточной дискретизации конечноэлементной сетки в трехмерных расчетах проникания пространственных тел. Отметим также приемлемую точность МЛВ (4) и при расчете изменения скорости острого конического ударника при движении по инерции.

На рис. 7 представлены осевые силы сопротивления внедрению пирамидального ударника высотой $H = 0,7H^*$ (отношение диагоналей в основании равно 3) в зависимости от скорости проникания при начальных скоростях 300, 450 и 600 м/с, темные ромбы соответствуют квазистационарным значениям силы сопротивления внедрению этого ударника с постоянными скоростями 150, 300, 450 и 600 м/с, пунктирная линия есть квадратичная аппроксимация вида $F(V) = AV^2 + BV$.

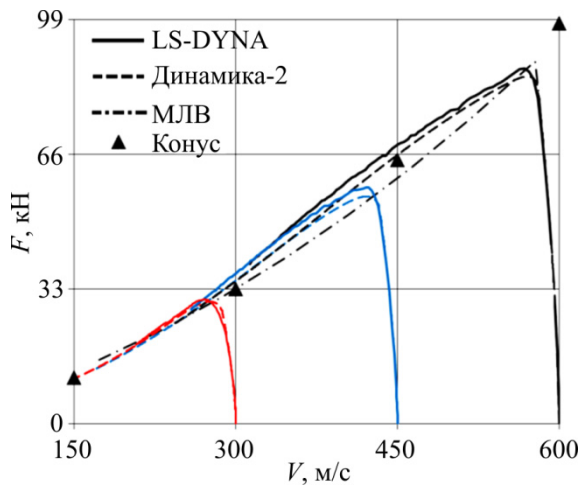


Рис. 6. Осевые силы сопротивления внедрению конического ударника высотой $H = H^*$ в зависимости от текущей скорости проникания
Fig. 6. Axial forces of resistance to the introduction of a conical impactor of $H = H^*$ height depending on the current penetration rate

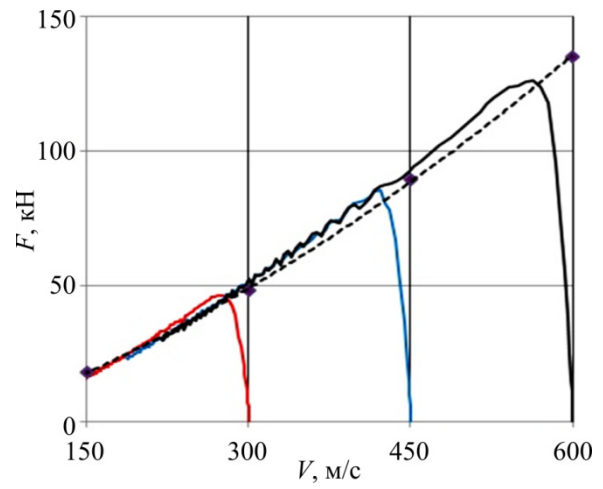


Рис. 7. Осевые силы сопротивления внедрению пирамидального ударника высотой $H = 0,7H^*$ в зависимости от текущей скорости проникания
Fig. 7. Axial forces of resistance to the introduction of a pyramidal impactor of $H = 0,7H^*$ height depending on the current penetration rate

Для звездообразного ударника проведены аналогичные расчеты, в которых получены качественно и количественно подобные результаты.

Важным обобщающим результатом является показанная возможность проводить расчет движения пространственных тел конечной массы на основе близкой к квадратичной зависимости силы сопротивления внедрению от скорости удара, полученной в расчетах квазистационарной стадии проникания с постоянными скоростями.

4. Определение глубины проникания

Квадратичная зависимость силы от скорости, полученная в расчетах, позволяет получить зависимость глубины проникания от скорости ударника в конечном виде. Для конического ударника, имеющего высоту H , площадь основания S_0 и угол полураствора η , проникающего с начальной скоростью V_0 при справедливости закона проникания в форме Резаля $F(V) = AV^2 + BV$, будем иметь

$$h^3(V) = \frac{3mH^2}{A} \ln\left(\frac{AV_0 + B}{AV + B}\right), \quad h < H, \quad (5)$$

$$h(V) = \frac{m}{A} \ln\left(\frac{AV_0 + B}{AV + B}\right) + \frac{2H}{3}, \quad h \geq H.$$

Числовые значения констант A и B в (5) могут быть определены по значениям силы сопротивления внедрению на квазистационарной стадии или в рамках МЛВ (4) по формулам

$$A = \rho_0 \alpha \sin^2 \eta S_0, \quad B = \rho_0 \beta \sin \eta S_0. \quad (6)$$

На рис. 8 представлены безразмерные зависимости текущих глубин проникания от скорости внедрения: темными и светлыми точками показаны результаты расчетов в трехмерной постановке проникания круговых конусов высотой $H = H^*$ и $H = 0,7H^*$, штрихпунктирные линии соответствуют данным, полученным для тех же конусов в рамках МЛВ (4)–(6), штриховая и пунктирная линии соответствуют глубинам проникания четырехгранной пирамиды и тела со звездообразным поперечным сечением, определенным по формулам (5). Высоты пространственных тел также равны $0,7H^*$, константы A и B закона проникания в форме Резаля определены на основе расчетных квазистационарных значений силы сопротивления внедрению с постоянными скоростями. Для ударника со звездообразным поперечным сечением получены значения $A = 0,27\rho_0 S_0$, $B = 0,27\rho_0 S_0 V_0$, для четырехгранной пирамиды $A = 0,34\rho_0 S_0$ и $B = 0,26\rho_0 S_0 V_0$ (соответствующие значения силы сопротивления отмечены ромбами на рис. 7).

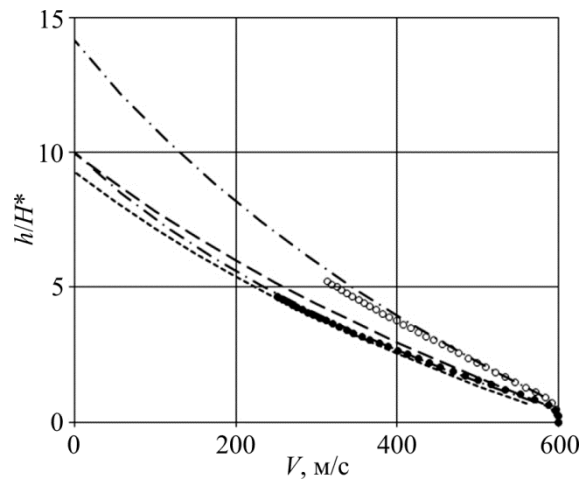


Рис. 8. Зависимости безразмерной текущей глубины проникания от скорости внедрения ударника

Fig. 8. Dependences of the dimensionless current penetration depth on the penetration rate of the impactor

Трехмерные расчеты проникания конусов по инерции проводились до момента времени, когда текущая скорость проникания составляла не менее 50 % от начальной скорости удара, расчеты до остановки ударников не проводились.

Сопоставление результатов, представленных на рис. 8 показывает, что квадратичная МЛВ (4)–(6) хорошо описывает как начальную, так и развитую стадию движения острых конических ударников в упругопластической среде. Однако для пространственных тел, эквивалентных в рамках МЛВ (4) по силе и глубине проникания конусу высотой $H = H^*$, наблюдается существенное отличие, пропорциональное отношению высот этих тел H/H^* . Для пространственных тел одинаковой высоты различия в глубинах проникания не столь существенны.

Заключение

В работе проведено изучение силовых и кинематических характеристик движения осесимметричных конических и неосесимметричных пространственных тел в сжимаемой упругопластической среде. Приводятся результаты двумерных и трехмерных численных расчетов проникания тел по нормали в упругопластическую среду с дозвуковыми и сверхзвуковыми постоянными скоростями и по инерции. Продемонстрировано увеличение сопротивления внедрению и уменьшение глубины проникания, пропорциональное уменьшению высоты тела, для тел одинаковой высоты различие в форме поперечного сечения не приводит к столь существенным изменениям. Численно показана возможность проведения расчета движения пространственных тел конечной массы на основе квадратичной зависимости силы сопротивления внедрению от скорости удара, полученной

в расчетах квазистационарной стадии проникания с постоянными скоростями. Это избавит от необходимости рассчитывать большие области среды проникания, позволив повысить точность расчетов и существенно сократить затраты машинного времени.

Благодарности

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках Программы по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (НШ-6944.2016.8) и РФФИ (16-08-60035-мол-а-дк).

Acknowledgments

The work is financially supported by the President's Programs of Support of Leading Research Schools of Russia (NSH-6944.2016.8) and also by the Russian Foundation for Basic Research (projects 16-38-60035-mol-a-dk).

Библиографический список

1. Young C.W. Depth prediction for earth-penetrating projectiles // ASCE Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering. – 1969. – Vol. 95(SM3). – P. 803–817.
2. Young C.W. Penetration Equations // Contractor Report. SAND 97-2426. – Sandia National Laboratories, Albuquerque, N.Mexico, October 1997. – 37 p.
3. Григорян С.С. О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов // ПММ. – 1962. – Т. 26. – Вып. 5. – С. 944–946.
4. Сагомоян А.Я. Проникание. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 299 с.
5. Kumano A., Goldsmith W. Projectile impact on soft, porous rock // Rock Mechanics. – 1982. – Vol. 15/3. – P. 113–132.
6. Колесников В.А. Об изменении траектории метеорита при входе в грунт // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – № 4. – С. 99–104.
7. Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. – М.: Изд-во МГУ, 1964. – 237 с.
8. Forrestal M.J., Longcope D.B., Norwood F.R. A model to estimate forces on conical penetrations into porous rock // Trans. ASME. Ser. E. Journal of Applied Mechanics. – 1981. – Vol. 48. – No. 3. – P. 25–29.
9. Любин Л.Я., Повицкий А.С. Косой удар твердого тела о грунт // ПМТФ. – 1966. – № 1. – С. 83–92.
10. Сагомоян А.Я., Филимонов В.А. К проблеме наклонного проникания осесимметричного тела в грунт // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1984. – № 6. – С. 90–93.
11. Звягин А.В., Сагомоян А.Я. Косой удар по пластине из идеально пластического материала // МТТ. – 1985. – № 1. – С. 159–163.
12. Бабаков В.А., Шабунин Е.В. Об одном методе расчета пневмопробойника в деформируемой среде // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1987. – № 1. – С. 105–110.
13. Деменьшин Д.А., Крылов С.В. Численное моделирование процессов нормального проникания жестких тел в пористые грунты // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 1991. – С. 103–106.
14. Forrestal M.J., Longcope D.B., Norwood F.R. Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength // International Journal of Solids and Structures. – 1981. – Vol. 17. – No. 9. – P. 915–924.

15. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic Impact: Recent Advances in Analytical Modeling of Plate Penetration Dynamics—A Review // *Applied Mechanics Reviews*. – 2005. – Vol. 58. – P. 355–371. DOI: 10.1115/1.2048626
16. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review // *Central European Journal Engineering*. – 2012. – Vol. 2. – No 4. – P. 473–482. DOI: 10.2478/s13531-012-0022-4
17. Omidvar M., Iskander M., Bless S. Response of granular media to rapid penetration // *International Journal of Impact Engineering*. – 2014. – Vol. 66. – P. 60–82. DOI: org/10.1016/j.ijimpeng.2013.12.004
18. Forrestal M.J, Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1988. – Vol. 55. – P. 275–279.
19. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической сжимаемой среде. Сообщ. 2. Влияние инерционных сил. Температурные эффекты // *Проблемы прочности*. – 1991. – № 12. – С. 11–14.
20. Аптуков В.Н., Хасанов А.Р. Расширение цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2017. – № 1. – С. 5–23. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.01
21. Durban D., Masri R. Dynamic spherical cavity expansion in a pressure sensitive elastoplastic medium // *International Journal of Solids and Structures*. – 2004. – Vol. 41. – P. 5697–5716. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.03.009
22. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны / Е.Ю. Линник [и др.] // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2012. – Вып. 74. – С. 49–57.
23. Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах / В.Г. Баженов [и др.] // *ПММ*. – 2014. – Т. 78. – Вып. 1. – С. 98–115. DOI: org/10.1016/j.jappmathmech.2014.05.008
24. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets // *International Journal of Impact Engineering*. – 1992. – Vol. 12. – No. 3. – P. 427–444.
25. Forrestal M.J. Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets // *International Journal of Solids and Structures*. – 1997. – Vol. 34 (31–32). – P. 4127–4146. DOI: org/10.1016/S0020-7683(97)00017-6
26. Chen X.W., Li Q.M. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics // *International Journal of Impact Engineering*. – 2002. – Vol. 27. – No. 6. – P. 619–637.
27. Rosenberg Z., Dekel E. A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics // *International Journal of Impact Engineering*. – 2008. – Vol. 35. – No. 3. – P. 147–154.
28. Forrestal M.J., Warren T.L. Penetration equations for ogive-nose rods into aluminum targets // *International Journal of Impact Engineering*. – 2008. – Vol. 35. – No. 8. – P. 727–730.
29. Forrestal M.J., Warren T.L. Perforation equations for conical and ogival nose rigid projectiles into aluminum target plates // *International Journal of Impact Engineering*. – 2009. – Vol. 36. – No. 2. – P. 220–225.
30. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-Speed Penetration Dynamics: engineering models and methods // *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2013*. – 680 p.
31. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields // *Central European Journal of Engineering*. – 2014. – Vol. 4. – No. 1. – P. 1–19. DOI: 10.2478/s13531-013-0135-4
32. A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments / Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li // *International Journal of Impact Engineering*. – 2014. – Vol. 73. – P. 112–122. DOI: org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010

33. Осипенко К.Ю. Проникание тела вращения в упругопластическую среду // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 1. – С. 169–180. DOI: 10.3103/S0025654409020174
34. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии / В.А. Велданов [и др.] // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81, № 7. – С. 94–104. DOI: 10.1134/S1063784211070231
35. Осипенко К.Ю. Об устойчивости пространственного движения тела вращения в упругопластической среде // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 2. – С. 68–77. DOI: 10.3103/S0025654412020082
36. Якунина Г.Е. Динамика пирамидальных тел в рамках модели локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. – 2003. – Т. 67, № 1. – С. 11–23.
37. Якунина Г.Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, № 3. – С. 429–449.
38. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2007. – Вып. 69. – С. 47–57.
39. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. О проникании неосесимметричных тел в твердую деформируемую среду и оптимизации формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – Т. 4. – С. 178–183.
40. Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // Докл. Акад. наук. – 2013. – Т. 449, № 2. – С. 156–159. DOI: 10.1134/S102833581303004X
41. Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. Методика численного расчета оптимальных форм тел вращения при движении в грунтовой среде // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 5–20. DOI: 10.15593/pern.mech/2015.2.01
42. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. Исследование оптимальных форм осесимметричных тел, проникающих в грунтовые среды // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 5. – С. 66–75. DOI: 10.15372/PMTF20160508
43. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт / В.Л. Котов [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 114–125. DOI: 10.1134/S0021894413040123
44. Котов В.Л., Константинов А.Ю. Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде на основе модели локального взаимодействия // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 225–233. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.15
45. Сравнительный анализ методов моделирования проникания и плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде / В.Г. Баженов [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 3. – С. 44–54. DOI: 10.15372/PMTF20150306
46. Бивин Ю.К. Сравнительная оценка проникания звездообразных и конических тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – 113 с.
47. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 6. – С. 157–191. DOI: 10.3103/S0025654410060130
48. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Константинов А.Ю. Сравнительный анализ сил сопротивления внедрению конических и пирамидальных тел в упругопластическую среду // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 3. – С. 245–255.
49. Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами / В.Г. Баженов [и др.] // Мат. моделирование. – 2000. – Т. 12, № 6. – С. 67–72.

References

1. Young C.W. Depth prediction for earth-penetrating projectiles *ASCE J. of Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1969, vol. 95(SM3), pp. 803-817.
2. Young C.W. Penetration Equations Contractor Report. SAND 97-2426. Sandia National Laboratories, Albuquerque, N.Mexico, October 1997, 37 p.
3. Grigorian S.S. O priblizhenom reshenii nekotorykh zadach dinamiki gruntov [Approximate solution of some problems of soil dynamics]. *J. of Applied mathematics and Mechanics*, 1962, vol. 26, no. 5, pp. 944-946.
4. Sagomonyan A.Ya. Pronikaniye [Penetration]. Moscow, MGU, 1974, 299 p.
5. Kumano A., Goldsmith W. Projectile impact on soft, porous rock. *Rock Mechanics*. 1982, vol. 15/3, pp. 113-132.
6. Kolesnikov V.A. Ob izmenenii traektorii meteorita pri vkhode v grunt [On the change of meteorite trajectory at the entrance to the ground]. *J. Mechanics of Solids*, 1981, no. 4, pp. 99-104.
7. Rakhmatulin Kh.A., Sagomonian A.Ia., Alekseev H.A. Voprosy dinamiki gruntov [Problems of the dynamics of soils]. *Moscow, Izd-vo MGU*, 1964, 237 p.
8. Forrestal M.J., Longcope D.B., Norwood F.R. A model to estimate forces on conical penetrations into porous rock. *Trans. ASME. Ser. E. Journal of Applied Mechanics*, 1981, vol. 48, no. 3, pp. 25-29.
9. Liubin L.Ia., Povitskii A.S. Kosoi udar tverdogo tela o grunt [Oblique solid impact on the ground]. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, no. 1, pp. 83-92.
10. Sagomonian A.Ya., Filimonov V.A. K probleme naklonnogo pronikaniia osesimmetrichnogo tela v grunt [To the problem of oblique penetration of an axisymmetric body into the ground]. *Vestnik MGU. Ser. I. Mathematics. Mekhanics*, 1984, no. 6, pp. 90-93.
11. Zviagin A.V., Sagomonian A.Ya. Kosoi udar po plastine iz ideal'no plasticheskogo materiala [Oblique impact on a plate of perfectly plastic material]. *J. Mechanics of Solids*, 1985, no. 1, pp. 159-163.
12. Babakov V.A., Shabunin E.V. Ob odnom metode rascheta pnevmoproboinika v deformiruemoi srede [On one method for calculating the air-puncher in a deformed environment]. *J. of Mining Sciences*, 1987, no. 1, pp. 105-110.
13. Demen'shin D.A., Krylov S.V. Chislennoe modelirovanie protsessov normal'nogo pronikaniia zhestkikh tel v poristye grunty [Numerical modeling of the processes of normal penetration of rigid bodies into porous soils]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Chislennoe modelirovanie fiziko-mekhanicheskikh protsessov: Mezhvuz. sb. / N. Novgorod: Izd-vo NNGU*, 1991, pp. 103-106.
14. Forrestal M.J., Longcope D.B., Norwood F.R. Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength. *International Journal of Solids and Structures*. 1981, vol. 17, no. 9, pp. 915-924.
15. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic Impact: Recent Advances in Analytical Modeling of Plate Penetration Dynamics—A Review. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, vol. 58, pp. 355-371.
16. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review. *Central European Journal Engineering*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 473-482.
17. Omidvar M., Iskander M., Bless S. Response of granular media to rapid penetration. *International Journal of Impact Engineering*, 2014, vol. 66, pp. 60-82.
18. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1988, vol. 55, pp. 275-279.
19. Aptukov V.N. Rasshirenie sfericheskoi polosti v uprugoplasticheskoi szhimaemoi spede. Soobshchenie 2. Vliianie ineptsionnykh sil. Tempepatupnye efekty [The expansion of spherical cavity in elastoplastic compressible medium. Communication 2. Effect of inertial forces. Temperature effect]. *Strength of materials*, 1991, no. 12, pp. 11-14.
20. Aptukov V.N., Khasanov A.R. Rasshirenie tsilindricheskoi polosti v szhimaemoi uprugoplasticheskoi srede [Expansion of a cylindrical cavity in a compressible elastic-plastic medium]. *PNRPU mechanics bulletin*, 2017, no. 1, pp. 5-23.
21. Durban D., Masri R. Dynamic spherical cavity expansion in a pressure sensitive elastoplastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, vol. 41, pp. 5697-5716.
22. Reshenie zadachi o rasshirenii sfericheskoi polosti v gruntovoi srede v predpolozhenii neszhimaemosti za frontom udarnoi volny / E.Yu. Linnik [et al] [The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front]. *Problems of Strength and Plasticity*, 2012, vol. 74, pp. 49-57.
23. Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigorian S.S., Kotov V.L. Analiz modelei rascheta dvizheniia tel vrashcheniia minimal'nogo soprotivleniia v gruntovykh sredakh [Analysis of models for calculating the motion of

solids of revolution of minimum resistance in soil media]. *J. of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 1, pp. 98-115.

24. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *International Journal of Impact Engineering*, 1992, vol. 12, no. 3, pp. 427-444.

25. Forrestal M.J. Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, vol. 34 (31-32), pp. 4127-4146.

26. Chen X.W., Li Q.M. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics. *International Journal of Impact Engineering*, 2002, vol. 27, no. 6, pp. 619-637.

27. Rosenberg Z., Dekel E. A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, vol. 35, no. 3, pp. 147-154.

28. Forrestal M.J., Warren T.L. Penetration equations for ogive-nose rods into aluminum targets. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, vol. 35, no. 8, pp. 727-730.

29. Forrestal M.J., Warren T.L. Perforation equations for conical and ogival nose rigid projectiles into aluminum target plates. *International Journal of Impact Engineering*, 2009, vol. 36, no. 2, pp. 220-225

30. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-Speed Penetration Dynamics: engineering models and methods. *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd*, 2013. 680 p.

31. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central European Journal of Engineering*, 2014, vol. 4, no. 1, pp. 1-19.

32. Shi Cuncheng A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments. *International Journal of Impact Engineering*, 2014, vol. 73, pp. 112-122.

33. Osipenko K.Yu. Pronikanie tela vrashcheniia v uprugoplasticheskuiu sredu [Penetration of a body of revolution into an elastoplastic medium]. *Mechanics of Solids*, 2009, no. 1, pp. 169-180.

34. Veldanov V.A. Raschet pronikaniia nedeformiruemyykh udarnikov v maloprochnye pregrady s ispol'zovaniem dannykh p'ezoakselerometrii [Computation of nondeformable striker penetration into low-strength obstacles using piezoelectric accelerometry data]. *J. Technical physics*, 2011, vol. 81, no. 7, pp. 94-104.

35. Osipenko K.Yu. Ob ustoychivosti prostranstvennogo dvizheniia tela vrashcheniia v uprugoplasticheskoi srede [Stability of spatial motion of a body of revolution in an elastoplastic medium]. *Mechanics of Solids*, 2012, no. 2, pp. 68-77.

36. Yakunina G.E. Dinamika piramidal'nykh tel v ramkakh modeli lokal'nogo vzaimodeistviia [Dynamics of pyramidal bodies in the framework of the local interaction model] *J. of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 67, no. 1, pp. 11-23.

37. Yakunina G.E. Osobennosti vysokoskorostnogo dvizheniia tel v plotnykh sredakh [Characteristic feature of the high-velocity motion of bodies in dense media]. *J. of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 3, pp. 429-449.

38. Banichuk N.V., Ivanova S.Iu. Optimizatsiia formy zhestkogo tela, vnedriaiushchegosia v sploshnuiu sredu [Shape optimization of rigid body, penetrating into continuous medium]. *Problems of strength and plasticity*, 2007, vol. 69, pp. 47-57.

39. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V. O pronikaniu neosesimmetrichnykh tel v tverduiu deformiruemuiu sredu i optimizatsiia formy [On the penetration of nonaxisymmetric bodies into a deformable solid medium and their shape optimization]. *Mechanics of Solution*, 2008, vol. 4, pp. 178-183.

40. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Linnik E.Yu. O modeliakh rascheta form osesimmetrichnykh tel minimal'nogo soprotivleniia pri dvizhenii v gruntovykh sredakh [Models of Calculation of Axisymmetrical Solids with the Lowest Drag during Motion in Soils]. *Doklady Physics*, 2013, vol. 449, no. 2, pp. 156-159.

41. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Linnik E.Yu. Metodika chislennogo rascheta optimal'nykh form tel vrashcheniia pri dvizhenii v gruntovoi srede [Method of numerical calculation of optimal forms of bodies of revolution at movement in soil medium]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 5-20.

42. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Tarasova A.A. Issledovanie optimal'nykh form osesimmetrichnykh tel, pronikaiushchikh v gruntovye sredy [Optimum Shapes of Axisymmetric Bodies Penetrating into Soil]. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 66-75.

43. Kotov V.L. Primenenie modeli lokal'nogo vzaimodeistviia dlia opredeleniia sily soprotivleniia vnedreniiu udarnikov v peschanyi grunt [Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil] *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, no 4, pp. 114-125.

44. Kotov V.L., Konstantinov A.Yu. Chislennoe modelirovanie ploskoparallel'nogo dvizheniia konicheskikh udarnikov v gruntovoi srede na osnove modeli lokal'nogo vzaimodeistviia [Numerical modeling of the plane-

parallel motion of conical projectiles in the soil environment based on a local interaction model] *Computational Continuum Mechanics*. 2014, vol. 7, no 3, pp. 225-233.

45. Bazhenov V.G. Sravnitel'nyi analiz metodov modelirovaniia pronikaniia i ploskoparallelnogo dvizheniia konicheskikh udarnikov v gruntovoi srede [Comparative Analysis of Methods for Modeling the Penetration and Plane-Parallel Motion of Conical Projectiles in Soil]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 3, pp. 44-54.

46. Bivin Yu.K. Sravnitel'naia otsenka pronikaniia zvezdoobraznykh i konicheskikh tel [Comparative evaluation of the penetration of star-shaped and conical bodies] *Mechanics of Solids*, 1999, no. 4, pp. 113

47. Bivin Yu.K., Simonov I.V. Mekhanika dinamicheskogo pronikaniia v gruntovuiu sredu [Mechanics of Dynamic Penetration into Soil Medium]. *Mechanics of Solids*, 2010, no. 6, pp. 157-191.

48. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Konstantinov A.Iu. Sravnitel'nyi analiz sil soprotivleniia vnedreniiu konicheskikh i piramidal'nykh tel v uprugoplasticheskuiu sredu [Comparative analysis of resistance to the introduction of conical and pyramidal bodies to the elastic plastic environment]. *Problems of strength and plasticity*, 2017, vol. 79, no. 3, pp. 245-255.

49. Bazhenov V.G. Paket programm «Dinamika-2» dlia resheniia ploskikh i osesimmetrichnykh nelineinykh zadach nestatsionarnogo vzaimodeistviia konstruksii so szhimaemymi sredami [The DYNAMICA-2 software package for analysing plane and axisymmetric nonlinear problems of nonstationary interaction of structures with compressible media] *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2000, vol. 12, no. 6. pp. 67-72.