Мыльцина О.А., Белосточный Г.Н. Устойчивость нагретой ортотропной геометрически нерегулярной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 4. – С. 109–120. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.08

Myltcina O.A., Belostochny G.N. Stability of heated orthotropic geometrically irregular plate in a supersonic gas flow. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no.4, pp. 109-120. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.08

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2017
PNRPU MECHANICS BULLETIN
http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI 10.15593/perm.mech/2017.4.08
УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ НАГРЕТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

О.А. Мыльцина, Г.Н. Белосточный

Саратовский национальный исследовательский университет
имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 29 октября 2017 г.
Принята: 23 ноября 2017 г.
Опубликована: 29 декабря 2017 г.

Ключевые слова:

квазистатика, динамика, обобщенные функции, сингулярный, ортотропный, сверхзвук, пластинка, ребра жесткости, безмоментное состояние, температура, устойчивость.

АННОТАЦИЯ

На основании линейной термоупругости рассматриваются тонкостенные геометрически нерегулярные объекты в виде ортотропных прямоугольных пластин, которые подкреплены симметричными относительно срединной плоскости ребрами жесткости и стандартным образом отнесены к декартовым координатам. Подкрепляющие ребра параллельны двум противоположным сторонам пластинки, расположенным в направлении набегающего газового потока. За основу взята континуальная модель термоупругой системы «пластинка–ребра». Сингулярные дифференциальные уравнения термоупругости системы «пластинка–ребра» содержат тангенциальные усилия и поперечную нагрузку. Тангенциальные усилия возникают при нагреве пластинки. Поперечная нагрузка, вызванная малым прогибом пластинки, определяется стандартным образом по «поршневой» теории. Тангенциальные усилия предварительно определяются путем решения сингулярных дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости геометрически нерегулярной пластинки с учетом краевых условий.

Решение сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости пластинки в сверхзвуковом потоке газа в квазистатической и динамической постановках задач разыскивается в виде сумм двойных тригонометрических рядов соответственно, с постоянными и переменными по временной координате коэффициентами. Коэффициенты, аппроксимирующие функцию прогиба рядов, определяются методом Галеркина, как решения однородных алгебраических систем или однородных систем дифференциальных уравнений второго порядка в случае динамической постановки задачи с последующим сведением к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка и обращению к критерию Гурвица. Решения приводятся во втором приближении, что соответствует двум полуволнам в направлении потока и одной полуволне в перпендикулярном направлении. На основании стандартных методов анализа статической и динамической устойчивости тонкостенных конструкций определяются критические значения скорости газового потока.

Количественные результаты представлены в виде таблиц, иллюстрирующих влияние геометрических параметров термоупругой системы «пластинка–ребра»: относительной высоты ребер, числа ребер, величины отношения длин сторон пластинки, температуры, анизотропии материала на устойчивость геометрически нерегулярной пластинки в сверхзвуковом потоке газа.

© **Мыльцина Ольга Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, ассистент, e-mail: omyltcina@yandex.ru
Белосточный Григорий Николаевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: belostochny@mail.ru

Olga A. Myltcina – CSc in Physics and Mathematics, Assistant, e-mail: omyltcina@yandex.ru
Grigory N. Belostochny – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: belostochny@mail.ru

STABILITY OF HEATED ORTHOTROPIC GEOMETRICALLY IRREGULAR PLATE IN A SUPERSONIC GAS FLOW

O.A. Myltcina, G.N. Belostochny

Saratov State University, Saratov, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 29 October 2017
Accepted: 23 November 2017
Published: 29 December 2017

Keywords:
quasistatic, dynamics, generalized functions, singular, orthotropic, supersonic, plate, ribs, membrane condition, temperature, stability.

ABSTRACT

Thin-walled geometrically irregular objects in the form of orthotropic rectangular plates are considered on the basis of the linear thermoelasticity, they are supported by the ribs symmetric with respect to middle plane. The location of the ribs coincides with the direction of the supersonic gas flow. The continuum model of the thermoelastic system "plate- ribs" was chosen. Singular differential equations of quasi-static and dynamic state of the elastic system contain tangential efforts and transverse force. Tangential efforts occur during heating of the plate. The transverse force caused by a small deflection plates is determined in the standard way via the "forcer" theory. The tangential effort is pre-determined by the solutions of singular differential equations of thermoelasticity for a geometrically irregular plate with given boundary conditions.

The solution of the singular differential equations of thermoelasticity of the plate in a supersonic gas flow in quasi-static and dynamic formulation of the objectives sought in the form of sums of double trigonometric series, respectively, with the constant and variable along the time coordinate coefficients. The coefficients – approximating the function of trough – of the ranks are determined using Galerkin method as a solution of the homogeneous algebraic systems or homogeneous systems of differential equations of the second order in the case of a dynamic formulation of the problem. The solution is given in the second approximation. The critical values of the gas flow rate are determined on the basis of the standard methods of analysis of static and dynamic stability of thin-walled structures.

Quantitative results are presented in tables illustrating the influence of the geometrical parameters of the "plate-ribs" thermoelastic system, the relative height of the ribs, number of ribs, the ratio of the sides of the plate, temperature, the material anisotropy on the stability of the geometrically irregular plate over the sound of the gas flow.

Геометрически нерегулярные тонкостенные упругие системы, обширный класс которых составляют ребристые оболочки и пластинки, являются элементами различных современных аппаратов специального назначения. Условия эксплуатации таких систем предусматривают совместное воздействие нагрева и высокоскоростного газового потока. Исследованию упругого поведения гладких пластин и оболочек на основе атермической теории посвящено большое число работ, полный перечень которых содержал бы десятки наименований. Ограничимся некоторыми из них [1, 2, 3, 4, 5]. Значительно меньше работ содержат исследования совместного воздействия температуры и сверхзвукового потока на гладкие пластинки и оболочки. Важные для практики результаты в этой области приводятся в работах [6, 7, 8].

Работы, в которых анализируется влияние подкрепляющих пластину или оболочку ребер под действием сверхзвукового потока на базе термической теории в открытой научной литературе отсутствуют. Это связано не с маловажностью проблемы, а прежде всего с чрезвычайной математической сложностью таких задач, решаемых на основе дискретной модели «оболочка–ребра».

Разработка континуальных моделей с использованием элементов теории обобщенных функций, основные положения которых содержится в работах [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], позволила сводить решения задач статической и динамической термоупругости ребристых пластин и оболочек к интегрированию систем сингулярных дифференциальных уравнений точными и приближенными методами высшего анализа [19, 20, 21].

1. В квазистатической постановке задачи сингулярное уравнение термоупругого равновесия ортотропной геометрически нерегулярной пластинки на основе континуальной модели запишется как

$$w,_{1111}+2\left(\nu_2+2\frac{D_k}{D_1}\right)w,_{1122}+\frac{E_2}{E_1}w,_{2222}+\sum_{i=1}^{n}\frac{E_2}{E}\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\Phi_{3i}\,a_i w,_{2222}\,\delta(x-x_i)+$$
$$+\frac{p_0\kappa}{D_1}Mw,_2-\frac{T^{11}}{D_1}w,_{11}-\frac{2T^{12}}{D_1}w,_{12}-\frac{T^{22}}{D_1}w,_{22}-\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i^{22}}{D_1}a_i w,_{22}\,\delta(x-x_i)=0, \tag{1}$$

где $\frac{p_0\kappa}{D_1}Mw,_2$ – относительная интенсивность поперечной нагрузки, вызванная прогибом пластинки, стандартным образом определяется по «поршневой» теории [22, 23]; $M=\frac{V_y}{c_0}$ – число Маха [6]; v_y – невозмущенная скорость набегающего газового потока; c_0 – скорость звука; w – функция прогиба; $\frac{h_i}{h}$ – относительная высота i-го ребра; a_i – ширина i-го ребра; $D_j=\frac{E_j h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$, $D_k=\frac{G_{12}h^3}{12}$ ($j=1,2$), $\Phi_{3i}=1+3\frac{h}{h_i}+\left(\frac{h}{h_i}\right)^3$; $\delta(x-x_i)$ – обобщенная δ-функция Дирака [24, 25, 26]; T^{ij} – тангенциальные усилия, вызванные нагревом пластинки до постоянной температуры θ_0, определяются на основании решения системы сингулярных дифференциальных уравнений

$$u,_{11}+\frac{G_{12}h}{B_1}u,_{22}+\left(\nu_2+\frac{G_{12}h}{B_1}\right)v,_2+\frac{G_{12}}{E_1}(1-\nu_1\nu_2)\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}a_i(u,_2+v,_1),_2\,\delta(x-x_i)=0,$$
$$\left(\nu_1+\frac{G_{12}h}{B_2}\right)u,_{12}+v,_{22}+\frac{G_{12}h}{B_2}v,_{11}+\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}a_i(v,_2+\nu u,_1),_2\,\delta(x-x_i)=0. \tag{2}$$

При неоднородных краевых условиях

$$u,_2+v,_1=0,\quad u,_1+\nu_2 v,_2=(\alpha_1+\nu_2\alpha_2)\theta_0 \text{ при } x=0,\ x=a,$$
$$u,_2+v,_1=0,\quad v=0 \text{ при } y=0,\ y=b$$

усилия запишутся в виде

$$T^{11}=T^{22}=0,\quad T^{22}=-E_2h\alpha_2\theta_0,\ T_i^{22}=-E_2h_i\,\alpha_2\theta_0. \tag{3}$$

В уравнениях (2) $B_l=\frac{E_l h}{1-\nu_1\nu_2}$ ($l=1,2$).

Решение уравнения (1), предварительно преобразованного к виду

$$w,_{1111}+2\left(\nu_2+2\frac{D_k}{D_1}\right)w,_{1122}+\frac{E_2}{E_1}w,_{2222}+\frac{E_2}{E_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\Phi_{3i}a_i w,_{2222}\,\delta(x-x_i)+p_0\frac{\kappa M}{D_1}w,_2+$$
$$+\frac{B_2}{D_1}\alpha_2(1-\nu_1\nu_2)\theta_0 w,_{22}+12\alpha_2(1-\nu_1\nu_2)\theta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{E_2}{E_1}\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{h^2}w,_{22}\,\delta(x-x_i)=0, \tag{4}$$

тождественно удовлетворяющего условиям шарнирного закрепления всех четырех сторон термоупругой системы «пластинка–ребра», зададим в виде двойного тригонометрического ряда с постоянными коэффициентами

$$w(x,y)=\sum_{km}A_{km}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}. \quad (5)$$

Коэффициенты ряда (5) на основании процедуры Галеркина [27, 28, 29] определяются как решения однородной алгебраической системы. Из равенства нулю определителя этой системы следуют соотношения для критических значений скоростей. В случае двучленной аппроксимации [6, 7]

$$w(x,y)=A_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}+A_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}, \quad (6)$$

что соответствует двум полуволнам в направлении потока и одной полуволне в перпендикулярном направлении, получим

$$\frac{16(1-\nu_1\nu_2)}{\pi^4}\frac{p_0\kappa M}{E_1}\frac{a}{b}\left(\frac{a}{h}\right)^3=H_{11}\sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}-2\right)\left(1+\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)}, \quad (7)$$

где $H_{11}=1+2\left(\nu_2+2\frac{D_k}{D_1}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{a}{b}\right)^4+2\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{a}{b}\right)^4\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\Phi_{3i}\frac{a_i}{a}\sin^2\frac{\pi x_i}{a}$,

$$H_{11}^0=3\left(\frac{a}{b}\right)^4\frac{E_2}{E_1}\left(1+2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\Phi_{3i}\frac{a_i}{a}\sin^2\frac{\pi x_i}{a}\right)-\frac{3}{4},$$

$$\alpha_2\theta_{kp}=\frac{H_{11}}{\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{\pi^2}\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^4\left[1+2\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{a}\sin^2\frac{\pi x_i}{a}\right]}.$$

В случае изотропной гладкой пластинки равенство (7) принимает вид, приведенный в работе [30], в случае ребристой – в работе [31].

Введем в рассмотрение безразмерный параметр $q^*=12(1-\nu_1\nu_2)\frac{p_0\kappa M}{\pi^4E_1}\left(\frac{a}{h}\right)^3$, тогда

$q^*=\frac{3}{4}\frac{a}{b}H_{11}\sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}-1\right)\left(1+\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)}$ и предельное значение этого параметра запишется как

$$q^*_{\text{пр}}=\frac{3}{8}\frac{b}{a}\left|H_{11}^0\right|. \quad (8)$$

Результаты расчетов для различных ортотропных материалов и значений геометрических параметров приводятся в табл. 1–3.

2. Анализ устойчивости относительного равновесия термоупругой системы «пластинка–ребра» сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$w_{,1111}+2\left(\nu_2+2\frac{D_k}{D_1}\right)w_{,1122}+\frac{E_2}{E_1}w_{,2222}+\frac{E_2}{E_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i}{h}\right)\Phi_{3i}a_iw_{,2222}\,\delta\left(x-x_i\right)+$$

$$+p_0\frac{\kappa\,M}{D_1}w,_2+\frac{B_2}{D_1}\alpha_2\theta_0\left(1-\nu_1\nu_2\right)w,_{22}+\alpha_2\theta_0\left(1-\nu_1\nu_2\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{B_{2i}}{D_1}w,_{22}\,a_i\delta\left(x-x_i\right)+$$
$$+\frac{\gamma\,h}{g\,D_1}w,_{tt}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma\,a_ih_i}{g\,D_1}w,_{tt}\,\delta\left(x-x_i\right)+\frac{\mu}{D_1}w,_t=0, \tag{9}$$

где γ – удельный вес; g – интенсивность поля тяжести; μ – параметр демпфирования.

Таблица 1

Значения q^* в случае пластинки без ребер ($n=0$)

Table 1

Values of q^* for the plate without ribs ($n=0$)

$\frac{a}{b}$	АГ-4С		СВАМ		(I)		(II)	
	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$
1/2	0,4553	0,7630	0,4758	0,7593	0,5554	0,6497	2,2500	1,4496
1	0,5759	1,2800	0,4121	1,1574	0,2250	0,7632	22,2188	2,1689
2	6,7165	2,0500	5,4069	1,4738	0,3093	1,3091	179,859	2,4174

Таблица 2

Значения q^* в случае пластинки с одним ребром ($n=1$)

Table 2

Values of q^* for the plate with one rib ($n=1$)

$\frac{a}{b}$	$\frac{h_i}{h}$	АГ-4С		СВАМ		(I)		(II)	
		q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$
1/2	1	0,4478	0,7675	0,4697	0,7629	0,5549	0,6502	2,4468	1,4765
	3	2,1771	1,5921	1,6539	1,4868	0,3827	0,7893	71,3531	2,3971
	5	51,9107	2,4093	41,8892	2,3861	2,8811	1,4671	1376,86	2,4943
1	1	0,6358	1,3083	0,4607	1,1738	0,2210	0,7684	23,7938	2,1863
	3	21,6359	2,3470	17,4501	2,2485	1,1570	1,4142	575,044	2,4837
	5	419,504	2,4913	339,332	2,4846	27,2672	1,725	1101,1	2,4991
2	1	7,1965	2,0791	5,7952	1,4966	0,3408	1,3269	192,459	2,4225
	3	175,197	2,4763	141,71	2,3855	11,3659	1,7219	4602,46	2,4965
	5	3358,15	2,4985	2717,77	2,4935	220,247	1,7485	88154,9	2,4998

Таблица 3

Значения q^* в случае пластинки с тремя ребрами ($n=3$)

Table 3

Values of q^* for the plate with three ribs ($n=3$)

$\frac{a}{b}$	$\frac{h_i}{h}$	АГ-4С		СВАМ		(I)		(II)	
		q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$	q^*	$\left(\theta/\theta_{kp}\right)^*$
1/2	1	0,4403	07720	0,4667	0,7647	0,5544	0,6507	2,6437	1,5021
	3	4,8096	1,8854	2,7187	1,6619	0,2099	0,8974	140,456	2,4459
	5	104,277	2,4534	63,0717	2,4223	6,3175	1,5876	2751,47	2,4971
1	1	0,6958	1,3309	0,5092	1,1898	0,2171	0,7740	25,3687	2,2019
	3	42,6959	2,4183	34,488	2,3613	2,5391	1,5477	1127,87	2,4916
	5	838,433	2,4956	678,252	2,4923	54,7594	1,7373	22016	2,4995
2	1	7,6765	2,0984	6,1835	1,5184	0,3723	1,3433	205,059	2,4271
	3	343,677	2,4878	278,013	2,4393	22,4224	1,7355	9025,06	2,4982
	5	6709,57	2,4993	5428,13	2,4967	440,184	1,7492	176130	2,4999

В этом случае решение зададим в виде двойного тригонометрического ряда с переменными по временной координате коэффициентами

$$w\left(x,y,t\right)=\sum_{k,m}\xi_{km}\left(t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}. \tag{10}$$

Коэффициенты ряда (10) во втором приближении определяются как решения системы двух однородных линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\xi_{11}}{dt^2}+\frac{\mu\, g}{h\,p_1\gamma}\frac{d\xi_{11}}{dt}+\frac{g\;D_1}{\gamma\;h}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\frac{H_{11}}{p_1}\left(1-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)\xi_{11}-\frac{8}{3}\frac{p_0}{p_1}\frac{\kappa Mg}{\gamma hb}\xi_{12}=0,\\
\frac{8}{3}\frac{p_0}{p_1}\frac{\kappa Mg}{\gamma hb}\xi_{11}+\frac{d^2\xi_{12}}{dt^2}+\frac{\mu\, g}{h\,p_1\gamma}\frac{d\xi_{12}}{dt}+\\
+4\frac{g\;D_1}{\gamma\;h}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\frac{H_{11}}{p_1}\left(1+\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)\xi_{11}-\frac{8}{3}\frac{p_0}{p_1}\frac{\kappa Mg}{\gamma hb}\xi_{12}=0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $p_1=1+2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a}\frac{h_i}{h}\sin^2\frac{\pi x_i}{a}$.

Подстановками

$$\begin{gathered}
\xi_{11}(t)=\frac{8}{3}\frac{p_0}{p_1}\frac{\kappa Mg}{\gamma hb}\eta(t),\\
\xi_{12}(t)=\frac{d^2\eta_{11}}{dt^2}+\frac{\mu\, g}{h\,p_1\gamma}\frac{d\eta}{dt}+\frac{gD_1}{\gamma\, h}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\frac{H_{11}}{p_1}\left(1-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)\eta
\end{gathered} \tag{12}$$

система (11) сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4\eta}{dt^4}+2e_1\frac{d^3\eta}{dt^3}+e_3\frac{d^2\eta}{dt^2}+e_4\frac{d\eta}{dt}+e_5\eta=0, \tag{13}$$

где $e_1=\frac{\mu\, g}{h\,p_1\gamma}$, $e_3=e_1^2+\frac{gD_1}{\gamma\, h}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\frac{H_{11}}{p_1}\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)$,

$$e_4=e_1\frac{gD_1}{\gamma\, h}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\frac{H_{11}}{p_1}\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right),$$

$$e_5=\left(\frac{8}{3}\frac{p_0}{p_1}\frac{\kappa\, Mg}{\gamma\, h\, b}\right)^2+4\left(\frac{gD_1}{\gamma\, h}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\frac{H_{11}}{p_1}\right)^2\left(1-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right).$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4+2e_1\lambda^3+e_3\lambda^2+e_4\lambda+e_5=0 \tag{14}$$

в случае отсутствия демпфирования $\mu=0$ примет вид

$$\lambda^4+e_2\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)\lambda^2+e_5=0\,. \tag{15}$$

Из условия

$$-e_2\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)+\sqrt{e_2^2\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)^2-4e_5}>0,\ (e_5<0), \qquad (16)$$

при котором хотя бы один из четырех корней алгебраического уравнения (15) будет положительным, определим интервал изменения относительной скорости потока газа V_y/c_0, при котором прогиб термоупругой системы растет:

$$1<\frac{V_y}{c_0}<\frac{\pi^4 H_{11}}{16(1-\nu_1\nu_2)}\left(\frac{h}{a}\right)^3\frac{b}{a}\frac{E_1}{p_0\kappa}\sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}-1\right)\left(1+\frac{H_{11}{}^0}{H_{11}}-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)} \qquad (17)$$

при $\dfrac{\theta_0}{\theta_{kp}}\in\left(1,1+\dfrac{H_{11}{}^0}{H_{11}}\right)$.

При учете демпфирования ($\mu\neq 0$) возникает вопрос об устойчивости системы (11), которая сведена к одному дифференциальному уравнению (13). На основании критерия Гурвица [32]

$$\Delta_1=2e_1>0,\ \Delta_2=2e_1e_3-e_4>0,\ \Delta_3=2e_1e_3e_4-e_4^2-4e_1^2e_5>0$$

получим

$$1<\frac{V_y}{c_0}<\frac{E_1\pi^4}{64(1-\nu_1\nu_2)}\left(\frac{h}{a}\right)^3\frac{b}{a}\frac{H_{11}}{\kappa p_0}\times$$
$$\times\sqrt{\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)^2+\frac{24(1-\nu_1\nu_2)\mu^2 g}{\pi^4\gamma E_1 p_1 H_{11}}\left(\frac{a}{h}\right)^4\left(5+4\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)+16\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}-1\right)\left(1+\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)} \qquad (18)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Значения критических скоростей при различных геометрических параметрах и модулей упругости

Table 4

Critical speed values at different geometrical parameters and Young's modulus

$E_1=3{,}05\cdot10^5$, $E_2=1{,}88\cdot10^5$, $\nu_2=0{,}12$, $G_{12}=0{,}49\cdot10^5$					$E_1=1{,}88\cdot10^5$, $E_2=3{,}05\cdot10^5$, $\nu_1=0{,}12$, $G_{12}=0{,}49\cdot10^5$				
$\mu=0{,}1$, $\theta_0/\theta_{kp}=6$	$\frac{h_i}{h}$	a/b			$\mu=0{,}1$, $\theta_0/\theta_{kp}=6$	$\frac{h_i}{h}$	a/b		
		2	1	1/2			2	1	1/2
нет		2354	659	612	нет		258	244	382
$n=1$	3	7326	1281	690	$n=1$	3	7832	1255	509
	5	101544	13058	2162		5	160685	20362	2897
$n=5$	3	17301	2528	846	$n=5$	3	24014	3278	762
	5	299953	37859	5262		5	482571	60598	7927

Окончание табл. 4

$E_1 = 3{,}05 \cdot 10^5$, $E_2 = 1{,}88 \cdot 10^5$, $\nu_2 = 0{,}12$, $G_{12} = 0{,}49 \cdot 10^5$					$E_1 = 1{,}88 \cdot 10^5$, $E_2 = 3{,}05 \cdot 10^5$, $\nu_1 = 0{,}12$, $G_{12} = 0{,}49 \cdot 10^5$				
$\mu = 50$ $\theta_0/\theta_{kp} = 6$	$\frac{h_i}{h}$	a/b			$\mu = 50$ $\theta_0/\theta_{kp} = 6$	$\frac{h_i}{h}$	a/b		
		2	1	$1/2$			2	1	$1/2$
нет		2332	644	587	нет		251	228	357
$n = 1$	3	7313	1258	661	$n = 1$	3	7815	1226	474
	5	101529	13027	2109		5	160669	20330	2839
$n = 5$	3	17287	2502	812	$n = 5$	3	23998	3249	719
	5	299939	37831	5208		5	48557	60569	7871

Количественный анализ выявил следующие закономерности влияния геометрических параметров на поведение термоупругой ортотропной системы в потоке газа:

1. Во всех рассмотренных случаях параметр относительной высоты ребра, как и увеличение числа ребер (параметр *n*), ведут к существенному росту предельной скорости потока:

$$\frac{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=3, n=1\right)}{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=0, n=0\right)} = 37; \quad \frac{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=3, n=1\right)}{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=1, n=1\right)} = 24; \quad \frac{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=1, n=5\right)}{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=0, n=0\right)} = 110.$$

материал АГ-4С

2. С увеличением параметра a/b (что ведет к уменьшению относительной длины ребер) величина относительной скорости потока значительно возрастает:

$$\frac{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=2, \frac{h_1}{h}=3, n=1\right)}{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=3, n=1\right)} = 8{,}097; \quad \frac{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=2, \frac{h_1}{h}=3, n=1\right)}{q^*_{kp}\left(\frac{a}{b}=\frac{1}{2}, \frac{h_1}{h}=3, n=1\right)} = 80{,}047.$$

материал АГ-4С

Эта тенденция сохраняется и для других ортотропных материалов, а также в случае изотропных [26].

3. Главная ось упругости, для которой модуль упругости наибольший, должна быть параллельна скорости потока, так как при выполнении этого требования существенно повышается устойчивость геометрически нерегулярной пластинки – увеличивается наименьшее значение скорости потока, при которых прогибы термоупругой системы неограниченно возрастают во времени.

4. Влияние параметра μ (учет демпфирования) на величины наименьших скоростей незначительно, и тем меньше, чем больше относительная высота ребер, их число и величина модуля упругости в направлении потока.

5. С увеличением температуры (параметр θ_0/θ_{kp}) наименьшие скорости потока, при прочих равных условиях, убывают.

6. Существенное влияние на устойчивость ортотропной пластинки оказывает параметр a/b, увеличение которого ведет к значительному росту относительной скорости потока. В случае гладкой пластинки эта закономерность нарушается.

Важно отметить, что перечисленные закономерности выявлены для случая двух полуволн в направлении газового потока и одной полуволны в перпендикулярном направлении.

Благодарности

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.8570.2017/8.9.

Acknowledgments

The results have been obtained within the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation Nr. 9.8570.2017/8.9.

Библиографический список

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

2. Амбарцумян С.А. Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1961. – № 4. – С. 91–96.

3. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Выпучивание и установившийся флайтер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке // Инж. журн. – 1961. – № 2. – С. 82–96.

4. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикладная математика и механика. – 1956. – № 2. – С. 211–222.

5. Дун Мин дэ. Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // ДАН СССР. – 1958. – № 4. – С. 726–729.

6. Огибалов П.М., Грибанов В.Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. – М.: Изд-во МГУ, 1968. – 520 с.

7. Огибалов П.М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. – М.: Изд-во МГУ, 1963. – 417 с.

8. Болотин В.В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Расчеты на прочность. – М.: Машгиз, 1960. – Вып. 6. – С. 190–216.

9. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1970. – Вып. 4. – С. 150–166.

10. Белосточный Г.Н., Ульянова О.И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 32–40.

11. Белосточный Г.Н., Рассудов В.М. Континуальная модель термочувствительной ортотропной системы «оболочка–ребра» с учетом влияния больших прогибов // Механика деформируемых сред: сб. ст. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та. – 1983. – Вып. 8. – С. 10–22.

12. Белосточный Г.Н., Рассудов В.М. Континуальный подход к термоустойчивости упругих систем «пластинка–ребра» // Прикладная теория упругости: сб. ст. – Саратов: Изд-во Сарат. политехн. ин-та, 1980. – С. 94–99.

13. Белосточный Г.Н., Рассудов В.М. Секвенциальный подход к построению моделей термоупругих систем в виде пологих оболочек переменной толщины и оболочек, подкрепленных ребрами жесткости сложного очертания / Сарат. политехн. ин-т. – Саратов, 1982. – 23 с. Деп. В ВИНИТИ 28.12.82. № 6449-82.

14. Жилин П.А. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Изв. АН СССР. МТТ. – 1966. – № 5. – С. 139–142.

15. Жилин П.А. Общая теория ребристых оболочек. Прочность гидротурбин // Тр. ЦКТИ. Вып. 8. – Л., 1968. – С. 46–70.

16. Карпов В.В., Сальников А.Ю. Вариационный метод вывода нелинейных уравнений движения пологих ребристых оболочек // Вестн. гражд. инженеров. – 2008. – № 4 (17). – С. 121–124.

17. Ильин В.П., Карпов В.В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемешениях. – Л.: Стройиздат. Ленингр. отделение, 1986. – 168 с.

18. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Уравнения термоупругости композиций из оболочек вращения // Вестн. Сарат. техн. ун-та. – 2011. – Т. № 4, № 1. – С. 56–64.

19. Онанов Г.Г. Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных // Докл. Акад. наук СССР. – 1970. – Т. 191, № 5. – С. 997–1000.

20. Белосточный Г.Н., Гущин Б.А. Секвенциальный подход к интегрированию линейного дифференциального уравнения // Прикладная теория упругости: межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. политехн. ин-та. – 1989. – С. 92–99.

21. Белосточный Г.Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Докл. Акад. воен. наук. – 1999. – № 1. – С. 14–26.

22. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамики больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. – 1956. – № 6. – С. 733–755.

23. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 888 с.

24. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций (Секвенциальный подход). – М.: Мир, 1976. – 311 с.

25. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, гл. ред.я физ.-мат. лит., 1976. – 280 с.

26. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 470 с.

27. Канторович Л.В., Крылов В.И. приближенные методы высшего анализа. – Л., М.: Гос. изд-во техн. теор. лит., 1949. – 695 с.

28. Пратусевич Я.А. Вариационные методы в строительной механике. – Л., М.: Гос. изд-во техн. теор. лит., 1948. – 400 с.

29. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 589 с.

30. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

31. Белосточный Г.Н., Рассудов В.М. Термоупругие системы типа «пластинка–ребра» в сверхзвуковом потоке газа // Прикл. теория упругости: межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. политехн. ин-та, 1983. – С. 114–121.

32. Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования: учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1967. – 648 с.

References

1. Vol'mir A.S. Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. [The shells in flow liquid and gas] *Moscow, Nauka*, 1979, 320 p.

2. Ambartsumian S.A. Bagdasarian Zh.E. Ob ustoichivosti ortotropnykh plastinok, obtekaemykh sverkhzvukovym potokom gaza [Of the stability of orthotropic plates streamlined by a supersonic gas flow]. *Izvestia Akademii nauk SSSR, OTN., Mekhan. i mashinostroenie*, no. 4, 1961, pp. 91-96.

3. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. Vypuchivanie i ustanovivsheisia flaiter termicheski szhatykh panelei, nakhodiashchikhsia v sverkhzvukovom potoke [Buckling and steady-state flayter thermally compressed panels in supersonic flow]. *Inzhenernyi zhurnal 1*, no. 2, 1961, pp. 82-96.

4. Movchan A.A. O kolebaniiakh plastinki, dvizhushcheisia v gaze [Oscillations of the plate moving in the gas]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 211-222.

5. Dun Min – de. Ob ustoichivosti uprugoi plastinki pri sverkhzvukovom obtekanii [On stability of elastic plate in supersonic flow]. *Doklady akademii nauk SSSR*, 1958, vol. 120, no. 4, pp. 726-729.

6. Ogibalov P.M., Gribanov V.F. Termoustoichivost' plastin i obolochek. [Thermostability of plates and shells]. *Moscow, Moskovskii gosudarstvennyi universitet*, 1968, 520 p.

7. Ogibalov P.M. Voprosy dinamiki i ustoichivosti obolochek. [The problems of dynamics and stability of shells. *Moscow, Moskovskii gosudarstvennyi universitet*, 1963, 417 p.

8. Bolotin V.V. Temperaturnoe vypuchivanie plastin i pologikh obolochek v sverkhzvukovom potoke gaza [Thermal buckling of plates and shallow shells in a supersonic gas flow]. *V kn. «Raschety na prochnost'». Moscow, Mashgiz*, 1960, vol. 6, pp. 190-216.

9. Zhilin P.A. Lineinaia teoriia rebristykh obolochek [Linear theory of ribbed shells]. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Mekhanika tverdogo tela*, 1970, vol. 4, pp. 150-166.

10. Belostochny G.N., Ul'yanova O.I Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness. *Mechanics of Solids*. 2011, vol. 46, no. 2. pp. 184-191

11. Belostochny G.N., Rassudov V.M. Kontinual'naia model' termochuvstvitel'noi ortotropnoi sistemy «obolochka-rebra» s uchetom vliianiia bol'shikh progibov [Continuum model of orthotropic heat-sensitive system «shell-ribs» taking into account the influence of large deflection]. *Mekhanika deformiruemykh sred*: *Sb. statei, Saratov, izd-vo Saratovskogo gosuniversiteta*, 1983, vol. 8, pp. 10-22.

12. Belostochny G.N., Rassudov V.M. Kontinual'nyi podkhod k termoustoichivosti uprugikh sistem «plastinka-rebra» [Continuum approach to the thermal stability of elastic systems, «plate-ribs»]. *Prikladnaia teoriia uprugosti: Sb. statei, – Saratov, izd-vo Sarat. politekhn. in-ta*, 1980, pp. 94-99.

13. Belostochny G.N., Rassudov V.M. Sekventsial'nyi podkhod k postroeniiu modelei termouprugikh sistem v vide pologikh obolochek peremennoi tolshchiny i obolochek podkreplennykh rebrami zhestkosti slozhnogo ochertaniia [A sequential approach to constructing models of thermoelastic systems in the form of shallow shells of variable thickness and shells supported with ribs of complex shape]. *Saratovsk. politekh. in-t – Saratov, 1982. 23 p. Rukopis' deponirovannaia v VINITI 28.12.82.*, no. 6449-82.

14. Zhilin P.A. Osesimmetrichnaia deformatsiia tsilindricheskoi obolochki, podkreplennoi shpangoutami [Axisymmetric deformation of a cylindrical shell, supported by frames]. *Izvestia Akademii Nauk SSSR. MTT*, no. 5, 1966, p. 139-142.

15. Zhilin P.A. Obshchaia teoriia rebristykh obolochek. Prochnost' gidroturbin [General theory of ribbed shells. The strength of turbines]. *Tr. TsKTI*, 1968, vol. 8, pp. 46-70.

16. Karpov V.V., Sal'nikov A.Iu. Variatsionnyi metod vyvoda nelineinykh uravnenii dvizheniia pologikh rebristykh obolochek [Variational method output nonlinear equations of motion of shallow ribbed shells]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*, 2008, no. 4 (17), pp. 121-124.

17. Il'in V.P., Karpov V.V. Ustoichivost' rebristykh obolochek pri bol'shikh peremesheniiakh. [Stability of ribbed shells under large displacements.]. *Leningrad, Stroiizdat. Leningr. otdelenie*, 1986,168 p.

18. Belostochny G.N., Myltcina O.A. Uravneniia termouprugosti kompozitsii iz obolochek vrashcheniia [Thermoelasticity equations of shells compositions]. *Vestnik Saratovskogo tekhnicheskogo universiteta, g. Saratov, izdatel'stvo Saratovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 56-64.

19. Onanov G.G. Uravneniia s singuliarnymi koeffitsientami tipa del'ta – funktsii i ee proizvodnykh. [Equations with singular coefficients type of Delta – function and its derivatives.] *Doklady akademii nauk SSSR*, 1970, vol. 191, no. 5. pp. 997-1000.

20. Belostochny G.N., Gushchin B.A. Sekventsial'nyi podkhod k integrirovaniiu lineinogo differentsial'nogo uravneniia [A Sequential approach to the integration of linear differential equations]. *Mezhvuz. nauch. sb. «Prikladnaia teorii uprugosti», izd-vo Sarat. polit. Inst*, 1989. pp. 92-99.

21. Belostochny G.N. Analiticheskie metody opredeleniia zamknutykh integralov singuliarnykh differentsial'nykh uravnenii termouprugosti geometricheski nereguliarnykh obolochek [Analytical methods for the determination of closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity, geometrically irregular shells]. *Doklady akademii voennykh nauk*. 1999, no. 1. pp. 14-26.

22. Il'iushin A.A. Zakon ploskikh sechenii v aerodinamiki bol'shikh sverkhzvukovykh skorostei [Law of plane sections in aerodynamics of high supersonic velocity]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, no. 6, 1956, pp. 733-755.

23. Abramovich G.N. Prikladnaia gazovaia dinamika [Applied gas dynamics]. *Moscow, Izd-vo «Nauka», Glavn. redaktsiia fiz.-mat. Lit.*, 1976. 888 p.

24. Antosik P., Mikusinskii Ia., Sikorskii R. Teoriia obobshchennykh funktsii (Sekventsial'nyi podkhod). [Theory of generalized functions (Sequential approach)] M.: Mir, 1976. 311 p.

25. Vladimirov V.S. Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike. [Generalized functions in mathematical physics]. *Moscow, Izd-vo «Nauka», Glavn. redaktsiia fiz.-mat. lit.,* 1976. 280 p.

26. Gel'fand I.M., Shilov G.E. Obobshchennye funktsii i deistviia nad nimi. [Generalized functions and operations over them]. *Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit.*, 1959. 470 p.

27. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]. *Leningrad, Moscow, Gos. izd-vo tekhn. teoretich literatury*, 1949. 695 p.

28. Pratusevich Ia.A. Variatsionnye metody v stroitel'noi mekhanike [Variational methods in structural mechanics]. *Leningrad, Moscow, OGIZ, Gos. izd-vo tekhn. teoretich literatury*, 1948, 400 p.

29. Rektoris K. Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike. [Variational methods in mathematical physics and engineering]. *Moscow, Mir*, 1985. 589 p.

30. Vol'mir A.S. Ustoichivost' deformiruemykh sistem. [Stability of deformable systems]. *Moscow, Nauka*, 1967, 984 p.

31. Belostochny G.N., Rassudov V.M. Termouprugie sistemy tipa «plastinka-rebra» v sverkhzvukovom potoke gaza [Thermoelastic system of type "plate-ribs" in a supersonic gas flow]. *Prikladnaia teoriia uprugosti. Mezhvuzovskii nauchnyi sbornik. Saratovsk. politekh. in-t.*, 1983, pp. 114-121.

32. Egorov K.V. Osnovy teorii avtomaticheskogo regulirovaniia. [Fundamentals of the theory of automatic control]. *Moscow, Energiia*, 1967, 648 p.