



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.4.15

УДК 539.3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ И ОЦЕНКА УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

И.С. Никитин<sup>1,3</sup>, Н.Г. Бурого<sup>2</sup>, А.Д. Никитин<sup>1,3</sup>, В.Л. Якушев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 30 августа 2017 г.  
Принята: 10 декабря 2017 г.  
Опубликована: 29 декабря 2017 г.

#### Ключевые слова:

циклическое нагружение, усталостное разрушение, критерий для многоосного напряженного состояния, критическая плоскость, малоцикловая усталость, сверхмногоцикловая усталость, долговечность элемента конструкции.

### АННОТАЦИЯ

Получены аналитические решения для определения ориентации критической плоскости развития усталостных повреждений при циклическом нагружении для многоосного напряженного состояния. Рассмотрены случаи синфазного и противофазного циклического нагружения для классического диапазона усталости (малоцикловая и многоцикловая усталость).

Предложены обобщения критерия усталостного разрушения Финдли с учетом ориентации критической плоскости для режима сверхмногоцикловой усталости при синфазной и противофазной циклической многоосной нагрузке. Эти обобщения основаны на подобию левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой. Описана процедура определения параметров обобщенного критерия по данным двух одноосных усталостных испытаний на растяжение-сжатие при различных коэффициентах асимметрии цикла.

Напряженное состояние компрессорного диска газотурбинного двигателя рассчитано методом конечных элементов для малоцикловой усталости (полетные циклы нагружения) и для сверхмногоцикловой усталости (вибрации лопаток). Для малоцикловой усталости учитывается влияние аэродинамических, центробежных и контактных нагрузок для контактной системы диска и лопаток. Для сверхмногоцикловой усталости рассчитаны дополнительные напряжения, вызванные высокочастотными крутильными колебаниями лопаток. В обоих случаях определена зона концентрации напряжений в окрестности контакта диска и лопаток, в которой происходит зарождение усталостной поврежденности.

Полученные распределения напряжений и предложенные обобщения критериев усталостного разрушения использовались для получения оценок долговечности диска

© Никитин Илья Степанович – доктор физико-математических наук, e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru)

Бурого Николай Георгиевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: [burago@ipmnet.ru](mailto:burago@ipmnet.ru)

Никитин Александр Дмитриевич – кандидат технических наук, научный сотрудник, e-mail: [nikitin\\_alex@bk.ru](mailto:nikitin_alex@bk.ru)

Якушев Владимир Лаврентьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: [yakushev@icad.org.ru](mailto:yakushev@icad.org.ru)

Ilya S. Nikitin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru)

Nikolay G. Burago – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: [burago@ipmnet.ru](mailto:burago@ipmnet.ru)

Aleksandr D. Nikitin – CSc in Technical Sciences, Researcher, e-mail: [nikitin\\_alex@bk.ru](mailto:nikitin_alex@bk.ru)

Vladimir L. Yakushev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, e-mail: [yakushev@icad.org.ru](mailto:yakushev@icad.org.ru)



для малоциклового и сверхмногоциклового усталости. Численный анализ показал, что расчетные долговечности в реальном времени с учетом характерного периода цикла для рассмотренных режимов усталости могут быть достаточно близкими. Поэтому в прогнозах безопасного срока эксплуатации необходимо учитывать оба механизма усталости.

© ПНИПУ

## DETERMINATION OF THE CRITICAL PLANE AND ASSESSMENT OF FATIGUE DURABILITY UNDER VARIOUS CYCLIC LOADING REGIMES

I.S. Nikitin<sup>1,3</sup>, N.G. Burago<sup>2</sup>, A.D. Nikitin<sup>1,3</sup>, V.L. Yakushev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 30 August 2017  
Accepted: 10 December 2017  
Published: 29 December 2017

#### Keywords:

cyclic loading, fatigue fracture, criterion for a multiaxial stress state, critical plane, low cycle fatigue, very-high-cycle fatigue, durability of a structural element.

### ABSTRACT

Analytical solutions are obtained to determine the critical plane orientation for multiaxial stress state. This critical plane is the plane of development of fatigue damage under cyclic loading. The cases of in-phase and antiphase cyclic loadings are considered for the classical fatigue range (low-cycle and high-cycle fatigue).

Generalizations of the Findley fatigue criterion are proposed taking into account the orientation of the critical plane for modes of very-high-cycle fatigue under in-phase and antiphase cyclic multiaxial loadings. These generalizations are based on the similarity of the left and right branches of the bimodal fatigue curve. The procedure aimed at determining the parameters of the generalized criterion is described according to the data of two uniaxial fatigue tests for tension-compression at various coefficients of the cycle asymmetry.

The stressed state of the compressor disk of the gas turbine engine are calculated by the finite element method for a low-cycle fatigue (take off-flight-landing cycles) and for very-high-cycle fatigue (vibrations of blades). For low-cycle fatigue the effect of aerodynamic, centrifugal and contact loads for the contact system of disk, blades, fixing pins and shroud are taken into account. For very-high-cycle fatigue the additional stresses due to high-frequency torsional vibrations of blades and shroud are calculated. In both cases, a stress concentration zone was defined in the vicinity of the contact between the disc and the blades, in which the fatigue damage originates.

The distribution of stresses and the proposed generalizations of the fatigue fracture criteria were used to obtain estimates of disk durability for both low-cycle fatigue and very-high-cycle fatigue modes. Numerical analysis showed that real time durability for the considered fatigue modes can be very close taking into account the characteristic cycle period. Therefore, in predictions of a safe operation life both mechanisms of fatigue must be taken into account.

© PNRPU

## 1. Определение критической плоскости для многоосного напряженного состояния в режимах МЦУ и МНЦУ

Для оценки усталостной долговечности различных элементов конструкций в реальных условиях эксплуатации существуют различные модели и критерии усталостного разрушения с учетом многоосного напряженного состояния [1–5].

В современных подходах к построению многоосных критериев усталостного разрушения часто используется понятие критической плоскости [6–14]. Один из первых критериев с определением критической плоскости для классических режимов малоциклового (МЦУ, число циклов до разрушения  $10^3 < N < 10^5$ ) и многоциклового (МНЦУ, число циклов до разрушения  $10^5 < N < 10^7$ ) усталости был предложен Финдли [15]. Согласно этому критерию, развитие усталостных повреждений в циклическом процессе нагружения происходит по плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  (с компонентами  $n_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ), на которой максимум

комбинации  $(\Delta\tau_n/2 + \alpha_F \sigma_n)$  достигает определенного критического значения. Такая плоскость называется критической.

В этой комбинации  $\Delta\tau_n$  – размах касательного напряжения в цикле,  $\sigma_n$  – нормальное напряжение на этой плоскости,  $\sigma$  – тензор напряжений, который определяет напряженное состояние в материальной частице деформируемого тела, и

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|.$$

Для определения долговечности одноосного циклического нагружения образца вплоть до его усталостного разрушения существует соотношение Баскина [16], которое аналитически представляет усталостную кривую при различных коэффициентах асимметрии цикла (левая ветвь бимодальной усталостной кривой [17] (рис. 1):

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_c N^\beta,$$

где  $\sigma_u$  – предел усталости;  $\sigma_c$  – коэффициент усталостной прочности;  $\beta$  – показатель усталостной прочности;  $N$  – число циклов до разрушения. На рис. 1 по оси ординат схематически показаны значения амплитуд  $\sigma_a$  циклического процесса нагружения при различных коэффициентах асимметрии цикла в зависимости от  $N$ .

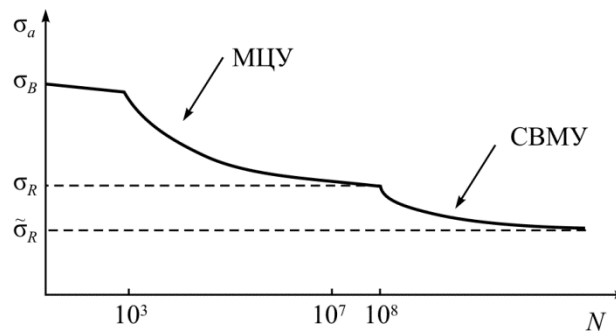


Рис. 1. Бимодальная усталостная кривая для режимов МЦУ и СВМУ  
 Fig. 1. Bimodal fatigue curve for LCF and VHCF modes

Обобщение соотношения Баскина на многоосный случай для критерия Финдли имеет вид [1]

$$(\Delta\tau_n / 2 + \alpha_F \sigma_n)_{MAX_n} = S_F + A_F N^{\beta_F},$$

где  $\beta_F < 0$ ,  $\alpha_F$ ,  $S_F$ ,  $A_F$  – параметры, определяемые по данным эксперимента.

Расчет усталостной долговечности по критерию Финдли требует определения ориентации плоскости, проходящей через заданную материальную точку, на которой внутри цикла  $t \in [0, T]$  достигается максимальное выражение функции Финдли  $F = \Delta\tau_n + 2\alpha_F \max_{t \in [0, T]} \sigma_n$ . Для многоосного напряженного состояния это непростая задача, которая при необходимости решается численно. Построим ее аналитическое решение для синфазного и противофазного циклического нагружения.

### 1.1. Синфазное многоосное циклическое нагружение

Рассмотрим трехосное циклическое нагружение в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений. Предполагаем, что эти оси не изменяются в тече-

ние цикла, а главные значения тензора напряжений меняются по гармоническому закону без сдвига фаз относительно друг друга:

$$\sigma_1(t) = \sigma_{1m} + \sigma_{1a} \sin \omega t, \quad \sigma_2(t) = \sigma_{2m} + \sigma_{2a} \sin \omega t, \quad \sigma_3(t) = \sigma_{3m} + \sigma_{3a} \sin \omega t, \quad \sigma_{1,2,3a} \geq 0,$$

где дополнительным индексом  $m$  помечены средние за цикл значения напряжений, а индексом  $a$  их амплитуды.

Размах главных напряжений в цикле

$$\Delta\sigma_1 = 2\sigma_{1a} \geq 0, \quad \Delta\sigma_2 = 2\sigma_{2a} \geq 0, \quad \Delta\sigma_3 = 2\sigma_{3a} \geq 0.$$

Выберем главные оси так, чтобы максимумы главных напряжений удовлетворяли неравенствам  $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$ , где  $\Sigma_1 = \sigma_{1m} + \sigma_{1a}$ ,  $\Sigma_2 = \sigma_{2m} + \sigma_{2a}$ ,  $\Sigma_3 = \sigma_{3m} + \sigma_{3a}$ .

Введем следующие обозначения:  $\Sigma_{12} = \Sigma_1 - \Sigma_2$ ,  $\Sigma_{13} = \Sigma_1 - \Sigma_3$ ,  $\Sigma_{23} = \Sigma_2 - \Sigma_3$ ,  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2$ ,  $\Delta\sigma_{13} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$ ,  $\Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3$ .

В главных осях тензора напряжений можно получить формулы (см. Приложение)

$$\Delta\tau_n = \sqrt{(\Delta\sigma_{12})^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_{13})^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_{23})^2 n_2^2 n_3^2}, \quad \max_{t \in [0, T]} \sigma_n = \Sigma_1 n_1^2 + \Sigma_2 n_2^2 + \Sigma_3 n_3^2.$$

С учетом этих формул определим ориентацию критической плоскости с компонентами нормали:  $x_1 = n_1^2 \geq 0$ ,  $x_2 = n_2^2 \geq 0$ ,  $x_3 = n_3^2 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

Можно показать, что задача определения критической плоскости для трехосного напряженного состояния сводится к определению максимума функции (см. Приложение):

$$F(x_2, x_3) = \sqrt{\Delta\sigma_{12}^2 x_2 + \Delta\sigma_{13}^2 x_3 - (\Delta\sigma_{12} x_2 + \Delta\sigma_{13} x_3)^2} + 2\alpha_F \Sigma_1 - 2\alpha_F (\Sigma_{12} x_2 + \Sigma_{13} x_3)$$

при ограничениях  $0 \leq x_2 + x_3 \leq 1$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .

Приведем результаты решения этой задачи для всевозможных значений максимумов и размахов главных напряжений.

Вначале ищем экстремум функции  $F(x_2, x_3)$  внутри зоны ограничений  $0 < x_2 + x_3 < 1$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ :  $\partial F(x_2, x_3) / \partial x_2 = 0$ ,  $\partial F(x_2, x_3) / \partial x_3 = 0$ .

При этом возникают следующие возможные случаи соотношений между главными значениями напряжений.

I. Случай  $\Sigma_{12} / \Delta\sigma_{12} \neq \Sigma_{13} / \Delta\sigma_{13}$ ,  $\Delta\sigma_{12} \neq 0$ ,  $\Delta\sigma_{13} \neq 0$ .

Примем обозначения

$$\beta_{12} = 4\alpha_F \Sigma_{12} / \Delta\sigma_{12}, \quad \beta_{13} = 4\alpha_F \Sigma_{13} / \Delta\sigma_{13}, \quad \Delta = 2(\beta_{13} - \beta_{12}) \neq 0, \quad \Delta_S = \Delta\sigma_{12} \beta_{13} - \Delta\sigma_{13} \beta_{12},$$

$$\Delta_T = 2(\Delta\sigma_{13} - \Delta\sigma_{12}), \quad \Delta_2 = \Delta\sigma_{13} \Delta_S / \Delta - (\Delta_S^2 + \Delta_T^2) / \Delta^2, \quad \Delta_3 = (\Delta_S^2 + \Delta_T^2) / \Delta^2 - \Delta\sigma_{12} \Delta_S / \Delta.$$

I-а. Если  $\Delta\sigma_{12} \neq \Delta\sigma_{13}$ , условия экстремума  $F(x_2, x_3)$  имеют вид

$$x_2 = \Delta_2 / (\Delta\sigma_{12} \Delta\sigma_{23}), \quad x_3 = \Delta_3 / (\Delta\sigma_{13} \Delta\sigma_{23}).$$

I-б. Если  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$ , условия экстремума  $F(x_2, x_3)$  имеют вид

$$x_2 + x_3 = \Delta_S / (\Delta\sigma_{12} \Delta).$$

II. Если  $\Sigma_{12} / \Delta\sigma_{12} = \Sigma_{13} / \Delta\sigma_{13}$ , необходимо  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$ ,  $\Sigma_{12} = \Sigma_{13}$ .

Условия экстремума  $F(x_2, x_3)$ :  $x_2 + x_3 = \left(1 - \beta_{12} / \sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right) / 2$ .

Найденные значения  $x_2, x_3$  должны удовлетворять условиям  $x_2 > 0, x_3 > 0, x_2 + x_3 < 1$  и условиям максимума  $F(x_2, x_3)$ , которые имеют вид

$$\Delta\sigma_{12}^2 + 4\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23}x_3 > 0, \quad \Delta\sigma_{13}^2 - 4\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}x_2 > 0.$$

Эти неравенства следуют из условия отрицательности квадратичной формы

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} (dx_2)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} (dx_3)^2 < 0.$$

Если таких значений не существует, то необходимо искать максимум  $F(x_2, x_3)$  на границах зоны ограничений: либо  $x_2 = 0$ , либо  $x_3 = 0$ , либо  $x_2 + x_3 = 1$ .

III. В этом случае максимум  $F(x_2, x_3)$  достигается при значениях

$$x_2 = 0, \quad x_3 = \left(1 - \beta_{13} / \sqrt{4 + \beta_{13}^2}\right) / 2,$$

$$x_3 = 0, \quad x_2 = \left(1 - \beta_{12} / \sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right) / 2,$$

$$x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 = \left(1 + \beta_{23} / \sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right) / 2, \quad x_3 = \left(1 - \beta_{23} / \sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right) / 2.$$

Из этих трех пар  $x_2, x_3$  следует выбрать ту, где функция  $F(x_2, x_3)$  принимает наибольшее значение. Таким образом, для режима синфазного многоосного циклического нагружения получено аналитическое решение задачи определения ориентации критической плоскости. Определив компоненты нормали к этой плоскости, можно вычислить значение функции Финдли и соответствующее ему число  $N$ , т.е. усталостную долговечность элемента конструкции, находящегося в многоосном напряженном состоянии [18].

## 1.2. Противофазное многоосное циклическое нагружение

Важным практическим примером противофазного циклического многоосного нагружения являются усталостные испытания на чистое кручение или изгиб с кручением.

Нетрудно видеть, что в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений, противофазное циклическое нагружение с гармоническим законом изменения по времени всегда можно представить в виде

$$\sigma_1(t) = \sigma_{1m} + \sigma_{1a} \sin \omega t, \quad \sigma_2(t) = \sigma_{2m} + \sigma_{2a} \sin \omega t,$$

$$\sigma_3(t) = \sigma_{3m} + \sigma_{3a} \sin(\omega t + \pi) = \sigma_{3m} - \sigma_{3a} \sin \omega t, \quad \sigma_{1,2,3a} \geq 0.$$

В этом случае  $\Delta\sigma_1 = 2\sigma_{1a} \geq 0, \Delta\sigma_2 = 2\sigma_{2a} \geq 0, \Delta\sigma_3 = -2\sigma_{3a} \leq 0$ .

Выражение для  $\Delta\tau_n$  по сравнению с синфазным циклическим режимом не меняется:

$$\Delta\tau_n = \sqrt{(\Delta\sigma_{12})^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_{13})^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_{23})^2 n_2^2 n_3^2}.$$

Нормальное напряжение на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  в противофазном режиме зависит от времени по закону

$$\sigma_n(t) = (\sigma_{1m}n_1^2 + \sigma_{2m}n_2^2 + \sigma_{3m}n_3^2) + (\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2) \sin \omega t.$$

Поэтому для определения  $\max_{t \in [0, T]} \sigma_n$ , входящего в функцию Финдли, рассмотрим два случая.

I. Если  $\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2 \geq 0$ , то  $\max_{t \in [0, T]} \sigma_n = \Sigma_1 n_1^2 + \Sigma_2 n_2^2 + \Sigma_3 n_3^2$  при  $\sin \omega t = 1$ , где  $\Sigma_1 = \sigma_{1m} + \sigma_{1a}$ ,  $\Sigma_2 = \sigma_{2m} + \sigma_{2a}$ ,  $\Sigma_3 = \sigma_{3m} - \sigma_{3a}$ .

Перенумеруем значения  $\Sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  так, чтобы они удовлетворяли неравенствам  $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$ . После этого проводится такой же анализ и расчет ориентации критической плоскости для перенумерованных значений  $\Sigma_k$ ,  $\Delta \sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , как и для синфазного режима.

Полученные значения компонент нормали проверяются на выполнение условия  $\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2 \geq 0$ . Если это условие не выполняется, то рассматриваем следующий альтернативный случай.

II. Если  $\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2 \leq 0$ , то  $\max_{t \in [0, T]} \sigma_n = \Sigma_1 n_1^2 + \Sigma_2 n_2^2 + \Sigma_3 n_3^2$  при  $\sin \omega t = -1$ , где  $\Sigma_1 = \sigma_{1m} - \sigma_{1a}$ ,  $\Sigma_2 = \sigma_{2m} - \sigma_{2a}$ ,  $\Sigma_3 = \sigma_{3m} + \sigma_{3a}$ .

И в этом случае перенумеруем значения  $\Sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  так, чтобы они удовлетворяли неравенствам  $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$ . После этого проводится такой же анализ и расчет ориентации критической плоскости для перенумерованных значений  $\Sigma_k$ ,  $\Delta \sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , как и для синфазного режима. Полученные значения компонент нормали проверяются на выполнение условия  $\sigma_{1a}n_1^2 + \sigma_{2a}n_2^2 - \sigma_{3a}n_3^2 \leq 0$ .

Если выполняются оба условия, то следует выбрать такую ориентацию нормали, при которой значение функции Финдли имеет большее значение.

### 1.3. Определение параметров многоосного критерия усталостного разрушения

Ранее в [18] была предложена процедура определения параметров классических многоосных критериев (Сайнса [19], Кроссланда [20]) в диапазоне МЦУ и МНЦУ по результатам одноосных испытаний с двумя разными коэффициентами асимметрии цикла (левая ветвь бимодальной одноосной усталостной кривой [17] (рис. 1). Приведем результаты этой процедуры для определения параметров многоосного критерия Финдли.

Многоосный критерий Финдли для одноосного нагружения с коэффициентом асимметрии цикла  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$  будет выглядеть так:

$$\sigma_{\max} (\alpha_F + \sqrt{(1-R)^2 + 4\alpha_F^2} / 2) / 2 = S_F + A_F N^{\beta_F} \text{ при } n_1 = 1/2 + \alpha_F / \sqrt{(1-R)^2 + 4\alpha_F^2}.$$

Сравнивая с представлением Баскина одноосной усталостной кривой  $\sigma_{\max} (1-R) / 2 = \sigma_R + \sigma_{CR} N^{\beta_F}$  и имея данные испытаний при  $R = -1$  и  $R_0$ , получаем

$$S_F = \sigma_{-1} (\alpha_F + \sqrt{1 + \alpha_F^2}) / 2, \quad A_F = (\sigma_B - \sigma_{-1}) (\alpha_F + \sqrt{1 + \alpha_F^2}) 10^{-3\beta_F} / 2,$$

$$\alpha_F = \left( \sqrt{(2\kappa / (1 - R_0) - 1)^2 + \kappa^2} - 1 - 2\kappa / (1 - R_0) + \kappa^2 \right) / \kappa / (4 / (1 - R_0) - \kappa),$$

где  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_{R_0}$  – классические пределы усталости по усталостным кривым при коэффициентах асимметрии цикла  $-1$  и  $R_0$  соответственно;  $\sigma_B$  – статический предел прочности;  $\kappa = \sigma_{-1} / \sigma_{R_0}$ .

Анализ критерия Финдли для реверсного режима чистого кручения дает формулы

$$\tau_{-1} = \sigma_{-1} \left( 1 + \alpha_F / \sqrt{1 + \alpha_F^2} \right) / 2, \quad \tau_c = (\sigma_B - \sigma_{-1}) \left( 1 + \alpha_F / \sqrt{1 + \alpha_F^2} \right) 10^{-3\beta_F} / 2.$$

После вычисления этих параметров по результатам двух одноосных испытаний с разными коэффициентами асимметрии цикла задача вычисления ориентации критической плоскости и долговечности для многоосного напряженного состояния решается с помощью полученных выше формул для компонент нормали и уравнения для числа циклов до разрушения  $N$ .

## 2. Обобщение многоосного критерия усталостного разрушения в режиме СВМУ

В настоящее время установлено, что относительно небольшие циклические напряжения (меньше классического предела усталости материала), действующие с высокой частотой (порядка 1 кГц и выше), могут приводить к разрушению конструкций [21–25]. Высокочастотное нагружение приводит к значительным наработкам ( $N \sim 10^9 - 10^{10}$  циклов) за время расчетного срока службы изделия. Указанный диапазон долговечностей  $N > 10^8$  известен в литературе как сверхмногоцикловая усталость (СВМУ).

В последние годы разработаны и реализованы методики СВМУ испытаний [25–27] для весьма ограниченного набора циклических нагружений, в первую очередь для реверсивного и пульсирующего растяжения-сжатия [26, 27], а также кручения образцов [28–30]. Однако для оценок долговечности различных элементов конструкций, подверженных высокочастотным длительным воздействиям в условиях сложного нагружения, необходимы критерии многоосного СВМУ-разрушения. В данной работе предлагается простая и естественная форма такого рода критериев, основанная на обобщении известных многоосных моделей для классических усталостных режимов.

Опишем предлагаемую схему обобщения многоосного критерия разрушения на режим СВМУ (см. рис. 1, правая ветвь одноосной бимодальной усталостной кривой при  $N > 10^8$ ).

В основе обобщенного многоосного критерия типа Финдли лежит подобие поведения левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой. Это обобщение заключается в замене параметров левой ветви бимодальной усталостной кривой на параметры правой ветви:  $\sigma_B \rightarrow \sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{-1} \rightarrow \tilde{\sigma}_{-1}$ ,  $\sigma_R \rightarrow \tilde{\sigma}_R$ ,  $3\beta_F \rightarrow 8\tilde{\beta}_F$ , где  $\tilde{\sigma}_{-1}$  и  $\tilde{\sigma}_R$  – «новые» пределы усталости на правой ветви усталостной кривой для коэффициентов асимметрии  $R = -1$  и  $R = R_0$ .

Для режима СВМУ имеем (все параметры отмечены знаком  $\sim$ )

$$\tilde{S}_F = \tilde{\sigma}_{-1} (\tilde{\alpha}_F + \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}) / 2, \quad \tilde{A}_F = (\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_{-1}) (\tilde{\alpha}_F + \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}) 10^{-8\tilde{\beta}_F} / 2, \quad \tilde{\kappa} = \tilde{\sigma}_{-1} / \tilde{\sigma}_{R_0},$$

$$\tilde{\alpha}_F = \left( \sqrt{(2\tilde{\kappa} / (1 - R_0) - 1)^2 + \tilde{\kappa}^2} - 1 - 2\tilde{\kappa} / (1 - R_0) + \tilde{\kappa}^2 \right) / \tilde{\kappa} / (4 / (1 - R_0) - \tilde{\kappa}).$$

Для реверсного режима чистого кручения  $\tilde{\tau}_a = \tilde{\tau}_{-1} + \tilde{\tau}_c N^{\tilde{\beta}_F}$  получаем

$$\tilde{\tau}_{-1} = \tilde{\sigma}_{-1} \left(1 + \tilde{\alpha}_F / \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}\right) / 2, \quad \tilde{\tau}_c = (\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_{-1}) \left(1 + \tilde{\alpha}_F / \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}\right) 10^{-8\tilde{\beta}_F} / 2.$$

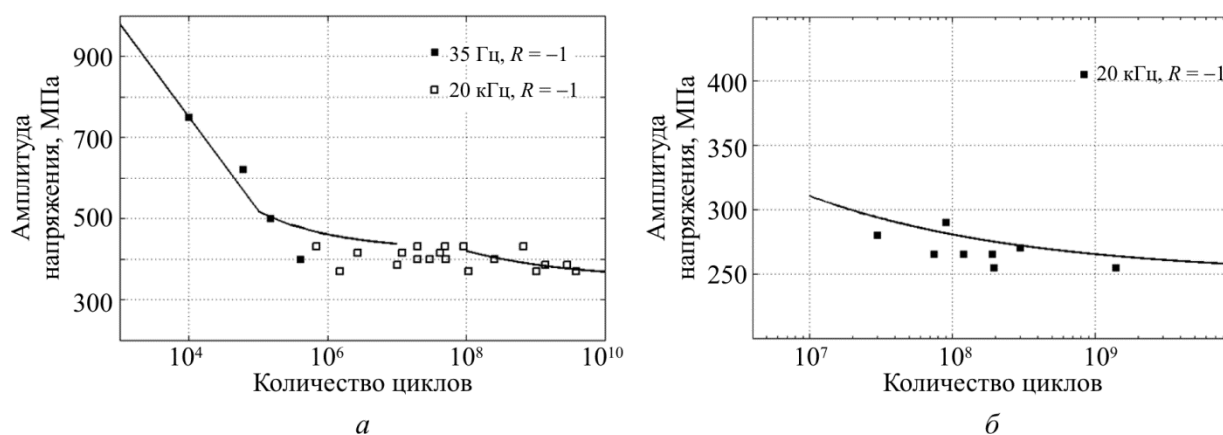


Рис. 2. СВМУ экспериментальные данные для сплава ВТ3-1: *a* – растяжение-сжатие; *б* – кручение  
 Fig. 2. VHCF experimental data for the alloy VT3-1: *a* – tension-compression; *b* – torsion

Были определены параметры обобщенного критерия СВМУ разрушения по результатам испытаний титановых образцов:  $\sigma_B = 1100$  МПа,  $\sigma_{-1} = 400$  МПа,  $\tilde{\sigma}_{-1} = 365$  МПа,  $\tilde{\sigma}_{0,1} = 215$  МПа,  $\tilde{\beta} = -0,24$ . На рис. 2, *a* приведены экспериментальные данные для  $R = -1$  (растяжение-сжатие).

Полученные значения параметров были использованы для расчетной оценки долговечности образцов при СВМУ-испытаниях на реверсное кручение. Сравнение показало близость расчетных и экспериментальных результатов (см. рис. 2, *б*, где сплошной линией проведена расчетная ветвь усталостной кривой).

Таким образом, подтверждена возможность использования обобщенного критерия многоосного усталостного разрушения в режиме СВМУ и предложенной схемы определения его параметров для приближенной оценки долговечности элементов конструкций. Формулы для параметров обобщенного СВМУ-критерия и его формулировка на основе подобия левой и правой ветвей усталостной кривой позволяют определить ориентацию критической плоскости и для этого режима циклического нагружения.

### 3. Примеры расчета долговечности в МЦУ и СВМУ-режиме

Рассмотрим задачу усталостного разрушения диска компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения в условиях малоциклового усталости. Аналитическим и численным методам расчета напряженно-деформированного состояния дисков и лопаток ГТД на различные воздействия посвящена обширная литература [31–35].

В нашем случае предполагается, что циклом многоосного нагружения системы диск-лопатка является полетный цикл нагружения (ПЦН, взлет–полет–посадка). В качестве границ цикла примем нагрузки на крейсерской скорости полета воздушного судна и соответствующие угловые скорости вращения диска компрессора. Задача состоит в определении долговечности диска  $N$  (число ПЦН до разрушения) из многоосного критерия Финдли для режима МЦУ. Для этого был проведен конечно-элементный расчет напряженно-



деформированного состояния (НДС) системы диск–лопатка при учете центробежных нагрузок, распределенного аэродинамического давления на лопатку, а также сил нелинейного контактного взаимодействия диска, лопаток и иных дополнительных учитываемых элементов конструкции (рис. 3, *а*). Численные методы решения контактных задач описаны в работах [36, 37]. Параметры расчета принимались такими: угловая скорость вращения  $\omega = 314$  рад/с (3000 об/мин), скоростной напор на бесконечности  $\rho v_\infty^2 / 2 = 26000$  Н/м<sup>2</sup>, что соответствует скорости потока 200 м/с при плотности 1,3 кг/м<sup>3</sup>. Свойства материалов принимались следующими: диск (титановый сплав):  $E = 116$  ГПа,  $\nu = 0,32$ ,  $\rho = 4370$  кг/м<sup>3</sup>; лопатки (алюминиевый сплав):  $E = 69$  ГПа,  $\nu = 0,33$ ,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; фиксирующие штифты (сталь):  $E = 207$  ГПа,  $\nu = 0,27$ ,  $\rho = 7860$  кг/м<sup>3</sup>. Расчеты показали, что наиболее опасными с точки зрения зарождения усталостных трещин являются окрестности зон контакта диска и лопаток, имеющих вид соединения типа «ласточкин хвост». На рис. 3, *б* представлена зона концентрации максимальных растягивающих напряжений в левом (скругленном) углу паза в диске, в который вставляется лопатка.

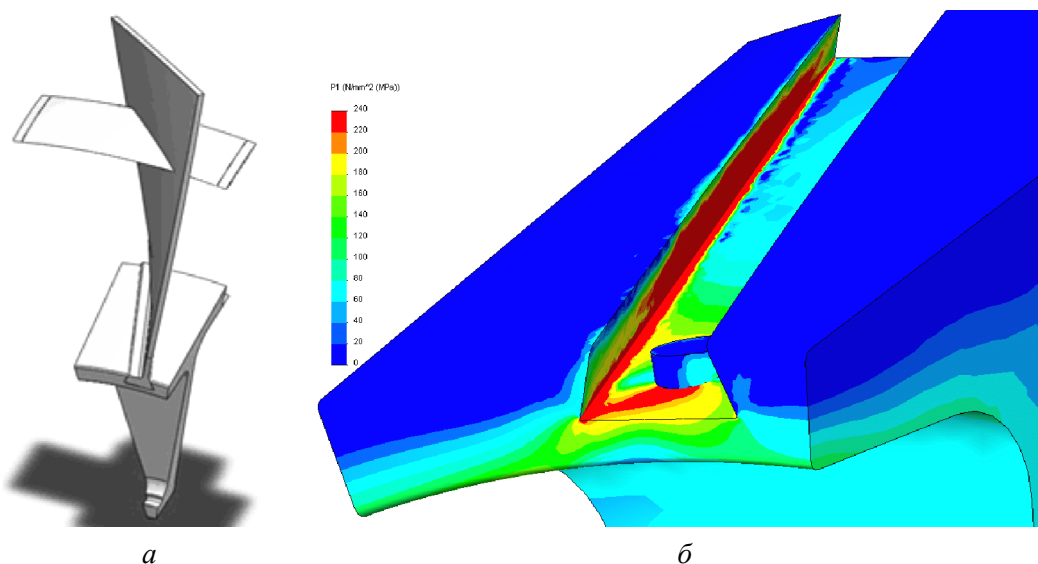


Рис. 3. Сектор диска с лопаткой, нагружаемый центробежными силами (*а*); максимальное главное напряжение в соединении диска и лопатки (*б*)

Fig. 3. Is the sector of the disk with the blade which is loaded with centrifugal forces (*a*), is the maximum main stress in the connections of the disk and the blade (*b*)

Наименьшая долговечность получилась для окрестности левого угла контактного соединения диска и лопатки, которая выделена на рис. 4, *а* сплошными линиями.

На рис. 4, *б* показаны рассчитанные величины числа полетных циклов до разрушения  $N$  для выбранного критерия многоосного усталостного разрушения. По горизонтальной оси отложена безразмерная координата закругления левого угла паза соединения, по вертикальной оси отложена безразмерная координата по глубине паза. Наименьшее значение  $N$  составило величину  $\sim 30\,000$  циклов. Если принять среднюю протяженность цикла за 2 ч, то в реальном времени долговечность элемента конструкции составит 60 000 ч.

Дополнительно исследовался альтернативный механизм циклического нагружения, связанный с наблюдаемыми высокочастотными осевыми колебаниями бандажных полок. Амплитуды этих колебаний и вызываемые ими возмущения напряженного состояния в окрестности концентратора напряжений относительно невелики, однако число циклов при

высокой частоте колебаний за время эксплуатации может достичь величин  $10^9$ – $10^{10}$ , что приводит к необходимости исследования режима сверхмногоциклового усталости (СВМУ) и возможности усталостного разрушения при уровне напряжений, меньшем классического предела усталости материала. На рис. 5, *a* показана схема приложения низкоамплитудных

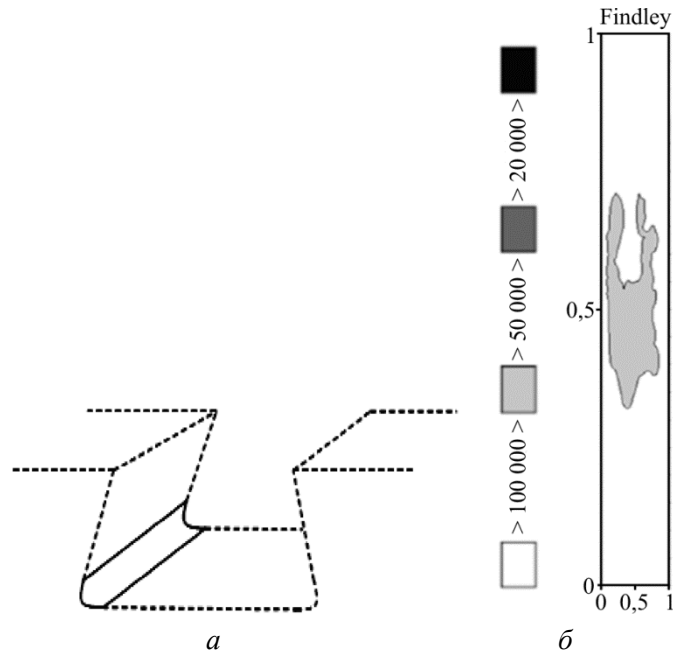


Рис. 4. Выделенная зона максимальной концентрации напряжений (*a*); уровни долговечности в выделенной зоне (*б*)

Fig. 4. Is the maximum stress concentration zone (*a*); is the durability levels in the allocated zone (*b*)

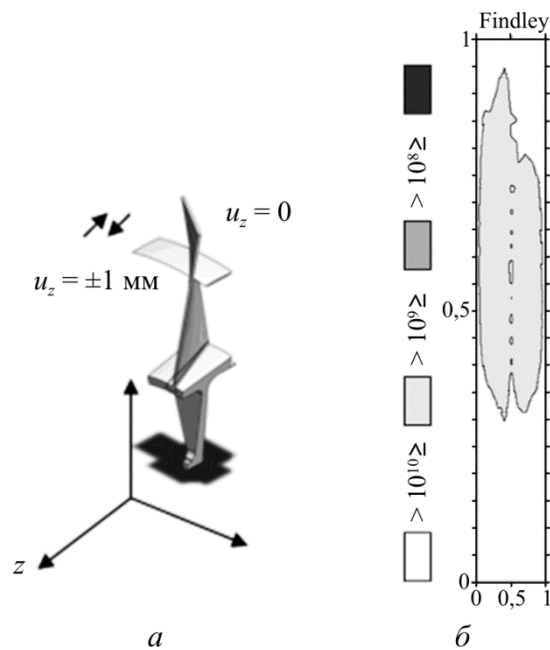


Рис. 5. Схема высокочастотных воздействий на диск и лопатку (*a*); уровни долговечности в выделенной зоне (*б*)

Fig. 5. Is the scheme of high-frequency loading on the disk and blade (*a*), is the levels of durability in the allocated zone (*b*)

осевых смещений. Таким образом, рассматриваются случаи, когда на левую границу приходится максимум или минимум амплитуды колебаний, равной  $\pm 1$  мм, при частоте 3000 об/мин. Как и в случае режима МЦУ, зона концентрации напряжений сосредоточена в левом углу паза. Несмотря на относительно невысокий уровень амплитуд напряжений в цикле, и в этом случае возникают зоны возможного усталостного разрушения, расположенные в тыльной зоне левого угла паза диска, примерно там же, где и в случае полетных циклов нагружения. Величина  $N$ , при которой они появляются, имеет порядок  $10^9$ – $10^{10}$  (см. рис. 5, б), что в пересчете на реальное время процесса с периодом цикла 0,02 с (при выбранной частоте колебаний) дает величину 50 000 ч, вполне достижимую в процессе эксплуатации.

Таким образом, значения долговечностей в реальном времени для двух различных режимов усталостного разрушения получились достаточно близкими. Хотя эти оценки весьма приблизительны, они указывают на принципиальную возможность развития усталостного разрушения в указанных зонах диска компрессора как по механизму МЦУ (полетный цикл нагружения), так и по механизму СВМУ (высокочастотные, низкоамплитудные вибрации элементов конструкции).

## **Заключение**

Получено аналитическое решение задачи определения ориентации критической плоскости для многоосного напряженного состояния при синфазном и противофазном циклическом нагружении для классического диапазона МЦУ-МНЦУ (левая ветвь бимодальной усталостной кривой).

Построено обобщение многоосного критерия усталостного разрушения на случай сверхмногоциклового усталости, предложена процедура определения параметров этого обобщенного критерия по результатам одноосных экспериментов для двух коэффициентов асимметрии цикла, определена критическая плоскость развития усталостных повреждений для многоосного напряженного состояния (правая ветвь бимодальной усталостной кривой).

Проведены расчеты напряженного состояния, и на этой основе даны сравнительные оценки усталостной долговечности ответственного элемента конструкции – диска компрессора газотурбинного двигателя для режимов нагружения МЦУ и СВМУ. Анализ показал, что с учетом характерных частот рассматриваемых циклических процессов значения долговечностей в реальном времени могут быть достаточно близки и, следовательно, при определении условий безопасной эксплуатации должны учитываться оба механизма усталостного разрушения.

## **Благодарности**

Работа частично выполнена по проекту РФФ № 16-19-10376.

## **Acknowledgments**

The work has been carried out with the financial support from the Russian Science Foundation, RSF (Grant Nr. 16-19-10376).

## Приложение

Выведем полезные формулы для касательного напряжения и его размаха на произвольно ориентированной площадке с нормалью  $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ . В системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений, имеем для нормального напряжения  $\sigma_n$  на выбранной площадке и компонент касательного напряжения  $\tau_i$  следующие формулы (по повторяющимся индексам  $k$  и  $l$  производится суммирование):

$$\sigma_n = \sigma_{kl} n_k n_l = \sigma_k n_k^2, \quad \tau_i = \sigma_{ik} n_k - \sigma_n n_i = (\sigma_i - \sigma_n) n_i.$$

Для размаха компонент касательного напряжения и его модуля имеем

$$\Delta \tau_i = (\Delta \sigma_i - \Delta \sigma_n) n_i, \quad \Delta \tau = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\Delta \sigma_k - \Delta \sigma_n)^2 n_k^2}, \quad \Delta \sigma_n = \Delta \sigma_k n_k^2.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\Delta \tau = \sqrt{\Delta \sigma_k^2 n_k^2 - 2 \Delta \sigma_n \Delta \sigma_k n_k^2 + \Delta \sigma_n^2 \sum_{k=1}^3 n_k^2} = \sqrt{\Delta \sigma_k^2 n_k^2 - \Delta \sigma_n^2},$$

так как  $\Delta \sigma_k n_k^2 = \Delta \sigma_n$ ,  $\sum_{k=1}^3 n_k^2 = 1$ .

Окончательно

$$\Delta \tau = \sqrt{\Delta \sigma_k^2 n_k^2 - (\Delta \sigma_k n_k^2)^2}.$$

Раскрывая скобки, эту формулу можно преобразовать к виду

$$\Delta \tau = \sqrt{\Delta \sigma_k^2 n_k^2 - (\Delta \sigma_k n_k^2)^2} = \sqrt{(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2}.$$

Введя обозначения  $\Delta \sigma_{12} = \Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2$ ,  $\Delta \sigma_{13} = \Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3$ ,  $\Delta \sigma_{23} = \Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3$ , получим компактное выражение для размаха касательных напряжений

$$\Delta \tau_n = \sqrt{(\Delta \sigma_{12})^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta \sigma_{13})^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta \sigma_{23})^2 n_2^2 n_3^2}.$$

Исключая  $n_1^2$ , получим формулу, используемую для вычисления максимума функции  $F$ :

$$\Delta \tau = \sqrt{\Delta \sigma_{12}^2 n_2^2 + \Delta \sigma_{13}^2 n_3^2 - (\Delta \sigma_{12} n_2^2 + \Delta \sigma_{13} n_3^2)^2}.$$

## Библиографический список

1. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading // Proceedings of 19<sup>th</sup> Int. Congress of Mech. Eng. – Brasilia, DF, 2007.
2. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. of Fatigue. – 2009. – Vol. 31. – P. 2031–2040.
3. Ying-Yu Wang, Wei-Xing Yao. Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria // Int. J. of Fatigue. – 2004. – Vol. 26. – P. 17–25.

4. Investigation of multiaxial fatigue in the prospect of turbine disc applications: Part II – Fatigue criteria analysis and formulation of a new combined one / V. Bonnard, J.L. Chaboche, H. Cherouali, P. Kanoute, E. Ostoja-Kuczynski, F. Vogel // Proceedings the 9-th Intern. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9) – Italy, Parma, 2010. – P. 691–698.
5. Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V // ASME J. Eng. Mater. Technol. – 2002. – Vol. 124. – P. 229–237.
6. Mataka T. An explanation on fatigue limit under combined stress // Bull JSME. – 1977. – Vol. 20. – P. 257 – 263.
7. McDiarmid D.L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1999. – Vol. 17. – P. 1475–1484.
8. Morel F. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading // Int. J. of Fatigue. – 2000. – Vol. 22. – No 2. – P. 101–119.
9. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals / I.V. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, A. Bernasconi // Int. J. of Fatigue. – 1997. – Vol. 19. – No. 3. – P. 219–235.
10. Papadopoulos I.V. Long life fatigue under multiaxial loading // Int. J. of Fatigue. – 2001. – Vol. 23. – P. 839–849.
11. Susmel L., Taylor D. A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading // Int. J. of Fatigue. – 2012. – Vol. 38. – P. 7–24.
12. Expected position of the fatigue fracture plane by using the weighted mean principal Euler angles / A. Carpinteri, A. Karolczuk, E. Macha, S. Vantadori // Int. J. of Fatigue. – 2002. – Vol. 115. – P. 87–99.
13. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane-based criterion // Int. J. of Fatigue. – 2011. – Vol. 33. – P. 969–976.
14. Fatemi A., Socie D.F. A critical plane approach to multiaxial damage including out-of-phase loading // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1988. – Vol. 11. – No 3. – P. 149–166.
15. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // J. of Eng. for Indust. – 1959. – P. 301–306.
16. Collins J.A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. – New York, John Wiley, 1993. – 654 p.
17. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. – Уфа: Монография, 2007. – 498 с.
18. Bourago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46. – No. 6. – P. 828–838.
19. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. – Metal fatigue. – McGraw-Hill, 1959. – P. 145-169.
20. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. – London, 1956. – P. 138–149.
21. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. – New York, Dekker, 2005.
22. Marines I., Bin X., Bathias C. An understanding of very high cycle fatigue of metals // Int. J. of Fatigue. – 2003. – Vol. 25 – P. 1101–1107.
23. Mughrabi H. Specific features and mechanisms of fatigue in the ultrahigh-cycle regime // Int. J. of Fatigue. – 2006. – Vol. 28. – P. 1501–1508.
24. Bathias C. Piezoelectric fatigue testing machines and devises // Int. J. of Fatigue. – 2006. – Vol. 26. – P. 1438–1445.
25. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A., Bathias C. Fatigue behavior of titanium alloy Ti-6Al-4Mo in bifurcation area at 20 kHz // Proceeding of ECF-19 conference. – Russia: Kazan, 2012.
26. НИКИТИН А.Д., НИКИТИН И.С. Экспериментальное исследование сверхмногоциклового усталости титановых сплавов // Наукоемкие технологии. – 2015. – № 7. – С. 51–58.
27. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A. Crack initiation in VHCF regime on forged titanium alloy under tensile and torsion loading modes // Int. J. of Fatigue. – 2016. – Vol. 93. – P. 318–325.

28. Fatigue properties of carburised alloy steel in very high cycle regime under torsion loading / H. Ishii, K. Tohgo, T. Fujii, T. Yagasaki, M. Harada, Y. Shimamura, K. Narita // *Int.J. of Fatigue*. – 2014. – Vol. 60. – P. 57–62.
29. Nikitin A., Bathias C., Palin-Luc T. A new piezoelectric fatigue testing machine in pure torsion for ultrasonic gigacycle fatigue tests: application to forged and extruded titanium alloys // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2015. – Vol. 38. – P. 1294–1304.
30. Stanzl-Tschegg S.E., Mayer H.R., Tschegg E.K. High frequency method for torsion fatigue testing // *Ultrasonics*. – 1993. – Vol. 31. – No. 4. – P. 275–280.
31. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М: Машиностроение, 1978. – 247 с.
32. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. – М.: Изд. дом МЭИ, 2007. – 476 с.
33. Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2008. – 204 с.
34. Shlyannikov V.N., Yarullin R.R., Gizzatullin R.Z. Structural integrity prediction of turbine disk on a critical zone concept basis// *Proceedings of 11<sup>th</sup> International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment*. – UK. Manchester, 2011. – P. 1–10.
35. Residual life prediction of power steam turbine disk with fixed operating time / B.V. Ilchenko, R.R. Yarullin, A.P. Zakharov, R.Z. Gizzatullin // *Proceeding of ECF-19 conference*. – Russia: Kazan, 2012.
36. Bourago N.G., Kukudzhанov V.N. A review of contact algorithms // *Mechanics of Solids*. – 2005. – Vol. 40. – No. 1. – P. 35–71.
37. Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2006. – 320 с.

## References

1. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading. *Proceedings of 19<sup>th</sup> Int. Congress of Mech. Eng*, 2007, Brasilia, DF.
2. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy. *Int. J. of Fatigue*, 2009, vol. 31, pp. 2031-2040.
3. Ying-Yu Wang, Wei-Xing Yao. Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria. *Int. J. of Fatigue*, 2004, vol. 26, pp. 17-25.
4. Bonnard V., Chaboche J.L., Cherouali H., Kanoute P., Ostoja-Kuczynski E., Vogel F. Investigation of multiaxial fatigue in the prospect of turbine disc applications: Part II – Fatigue criteria analysis and formulation of a new combined one. *Parma, Italy, Proceedings the 9-th Intern. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture*, 2010, pp. 691-698.
5. Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V. *ASME J. Eng. Mater. Technol*, 2002, V. 124, pp.229-237.
6. Mataka T. An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bull JSME*, 1977, vol. 20, pp. 257-263.
7. McDiarmid D.L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 1999, vol.17, pp. 1475-1484.
8. Morel F. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading. *Int. J. of Fatigue*, 2000, vol. 22, no 2, pp. 101-119.
9. Papadopoulos I.V., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *Int. J. of Fatigue*, 1997. vol. 19, no. 3, pp. 219-235.
10. Papadopoulos I.V. Long life fatigue under multiaxial loading. *Int. J. of Fatigue*, 2001, vol. 23, pp. 839-849.
11. Susmel L., Taylor D. A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading. *Int. J. of Fatigue*, 2012, vol. 38, pp. 7-24.
12. Carpinteri A., Karolczuk A., Macha E., Vantadori S. Expected position of the fatigue fracture plane by using the weighted mean principal Euler angles. *Int. J. of Fatigue*, 2002, vol. 115, pp. 87-99.
13. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane-based criterion. *Int. J. of Fatigue*, 2011, vol. 33, pp. 969-976.
14. Fatemi A., Socie D.F. A critical plane approach to multiaxial damage including out-of-phase loading. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 1988, vol. 11, no. 3, pp.149-166.

15. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *J. of Eng. for Indust.*, 1959, pp. 301-306.
16. Collins J.A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. *New York, John Wiley*, 1993, 654 p.
17. Shanyavsky A.A. Modeling of Metal Fatigue fracture. *Ufa, «Monografia»*, 2007, 498 p.
18. N. G. Bourago, A. B. Zhuravlev, I. S. Nikitin. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 828-838.
19. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. *Metal fatigue. McGraw-Hill*, 1959. pp. 145-169.
20. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel. *London, Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, 1956, pp. 138-149.
21. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. *New York, Dekker*, 2005.
22. Marines I., Bin X., Bathias C. An understanding of very high cycle fatigue of metals. *Int. J. of Fatigue*, 2003, vol. 25, pp. 1101-1107.
23. Mughrabi H. Specific features and mechanisms of fatigue in the ultrahigh-cycle regime. *Int. J. of Fatigue*, 2006, vol. 28, pp.1501-1508.
24. Bathias C. Piezoelectric fatigue testing machines and devises. *Int.J.of Fatigue*, 2006, vol. 26, pp. 1438-1445.
25. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A., Bathias C. Fatigue behavior of titanium alloy Ti-6Al-4Mo in bifurcation area at 20 kHz. *Kazan, Proceeding of ECF-19 conference*, 2012.
26. Nikitin A.D., Nikitin I.S. Experimental study of the very-high-cycle fatigue of titanium alloys. *High technology*, no. 7, 2015, pp. 51-58.
27. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A. Crack initiation in VHCF regime on forged titanium alloy under tensile and torsion loading modes. *Int. J. of Fatigue*, 2016, vol. 93, pp. 318-325.
28. Ishii H., Tohgo K., Fujii T., Yagasaki T., Harada M., Shimamura Y., Narita K. Fatigue properties of carburised alloy steel in very high cycle regime under torsion loading. *Int. J. of Fatigue*, 2014, vol. 60, pp. 57-62.
29. Nikitin A., Bathias C., Palin-Luc T. A new piezoelectric fatigue testing machine in pure torsion for ultrasonic gigacycle fatigue tests: application to forged and extruded titanium alloys, *Fatigue Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2015, vol. 38, pp. 1294-1304.
30. Stanzl-Tschegg S.E., Mayer H.R., Tschegg E.K. High frequency method for torsion fatigue testing. *Ultrasonics*, 1993, vol. 31, no 4, pp.275-280.
31. Demyanushko I.V., Birger I.A. Calculation of the strength of the rotating discs. *Moscow, Mashinostroenie*, 1978, 247 p.
32. Kostyuk A.G. Dynamics and strength of turbomachines. *Moscow, Publishing House MEI*, 2007, 476 p.
33. Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.A., Sandratskiy V.L. Dynamics and strength of aircraft engines and energy plants. *Moscow, Mashinostroenie*, 2008, 204 p.
34. Shlyannikov V.N., Yarullin R.R., Gizzatullin R.Z. Structural integrity prediction of turbine disk on a critical zone concept basis. *Manchester, Proceedings of 11<sup>th</sup> International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment*, 2011, pp. 1-10.
35. Ilchenko B.V., Yarullin R.R., Zakharov A.P., Gizzatullin R.Z. Residual life prediction of power steam turbine disk with fixed operating time. *Kazan, Proceeding of ECF-19 conference*, 2012,
36. Bourago N.G., Kukudzhyanov V.N. A review of contact algorithms. *Mechanics of Solids*, 2005, vol. 40, no. 1, pp. 35-71.
37. Kukudzhyanov V.N. Computational Mechanics of Continuous Media. *Moscow, FIZMATLIT*, 2006, 320 p.