



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.04

УДК 539.374

## ПЛАСТИЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ И НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

**В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, В.К. Петров**

Московский политехнический университет, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 21 июня 2017 г.

Принята: 22 августа 2017 г.

Опубликована: 30 сентября 2017 г.

### Ключевые слова:

пластичность, циклическое нагружение, микронапряжения, дополнительное упрочнение, посадка петли, вышагивание петли, повреждение.

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается математическое моделирование упругопластического деформирования материалов при пропорциональных (простых) и непропорциональных (сложных) циклических нагружениях. В частности, весьма простой вариант теории пластичности, являющийся частным вариантом теории неупругости. Вариант теории пластичности относится к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном упрочнении. Область применимости варианта теории пластичности ограничивается малыми деформациями начально изотропных металлов при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь. Рассматриваются материалы, обладающие эффектом дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональном циклическом нагружении. Приводятся результаты расчетных и экспериментальных исследований упругопластического деформирования и усталостного разрушения материалов при разнообразных непропорциональных циклических нагружениях. На основе анализа результатов экспериментальных исследований деформирования материалов в условиях жесткого несимметричного циклического нагружения формулируется принцип симметрии циклических свойств. Приводятся следствия из принципа симметрии для мягких несимметричных циклических нагружений. Рассматриваются расчетные и экспериментальные результаты исследования процессов несимметричных циклических нагружений. Адекватное описание процессов сложного нагружения, эффектов дополнительного изотропного упрочнения и вышагивания (ratcheting), а также процессов разрушения в рамках одного, довольно простого варианта теории пластичности, является несомненным достоинством рассматриваемого математического моделирования. Причем число материальных функций (в данном случае 14 параметров и 1 функция) значительно меньше числа материальных функций и параметров, замыкающих современные теории. К тому же базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций рассматриваемого варианта теории пластичности четко определены и являются достаточно простыми и легко реализуемыми. Сравнение результатов расчетов и экспериментов говорит об адекватности предложенного математического моделирования.

© ПНИПУ

© **Бондарь Валентин Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, e-mail: v.s.bondar@mospolytech.ru

**Абашев Дмитрий Рустамович** – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tm@mospolytech.ru

**Петров Владимир Кириллович** – кандидат технических наук, доцент, e-mail: tm@mospolytech.ru

**Valentin S. Bondar** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: v.s.bondar@mospolytech.ru

**Dmitriy R. Abashev** – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: tm@mospolytech.ru

**Vladimir K. Petrov** – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: tm@mospolytech.ru



## PLASTICITY OF MATERIALS UNDER PROPORTIONAL AND NONPROPORTIONAL CYCLIC LOADING

V.S. Bondar, D.R. Abashev, V.K. Petrov

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 21 June 2017  
Accepted: 22 August 2017  
Published: 30 September 2017

#### Keywords:

plasticity, cyclic loading, microstresses, additional hardening, loop landing, loop ratcheting, damage.

### ABSTRACT

The mathematical modeling of elastoplastic deformation of materials under proportional (simple) and nonproportional (complex) cyclic loading is considered. In this paper we consider a very simple version of the theory of plasticity, which is a particular version of the theory of inelasticity. The version of the theory of plasticity refers to the class of single-reversed flow theories with a combined hardening. The applicability range of the version of the theory of plasticity is limited to small deformations of initially isotropic metals at the temperatures without phase transformations and strain rates, when dynamic and rheological effects can be neglected. Materials with the additional isotropic hardening effect under nonproportional cyclic loading are considered. The results of computational and experimental studies of the elastoplastic deformation and fatigue destruction of materials are presented for various nonproportional cyclic loadings. Based on the analysis of the experimental results related to the material deformation under rigid asymmetrical cyclic loading, the principle of the symmetry of cyclic properties is formulated. Corollaries are given from the principle of symmetry for soft asymmetric cyclic loads. The calculated and experimental results of investigating the asymmetric cyclic loading are given. An adequate description of the processes of complex loading, the effects of the additional isotropic hardening and ratcheting, as well as the destruction processes within the framework of a single, rather simple version of the theory of plasticity are the obvious advantages of the mathematical modeling under consideration. Meanwhile the number of the material functions (in this case 14 parameters and 1 function) is much less than the number of the material functions and parameters that finalize modern theories. In addition, the basic experiment and the method of identifying the material functions of the considered version of the theory of plasticity are clearly defined and are fairly simple and easily implemented. The comparison of the calculation and experimental results indicate the adequacy of the proposed mathematical modeling.

© PNRPU

---

## Введение

Развитие теории пластичности и разработка определяющих уравнений до восьмидесятых годов прошлого столетия шли «спокойным эволюционным путем» [1]. Неожиданности начались, когда при экспериментальных исследованиях [2–24] непропорционального (сложного) циклического нагружения некоторых нержавеющей сталей было обнаружено весьма сильное упрочнение – более чем в два раза по сравнению с упрочнением при пропорциональном циклическом нагружении. Это явление, названное эффектом дополнительного изотропного упрочнения, не описывалось ни одной теорией.

Впервые описание этого эффекта было предпринято в работах [5–9]. Дальнейшее развитие этого подхода содержится в работах [10–27]. Но в каждой работе параметр, реагирующий на степень непропорциональности нагружения, был разным. Определенные соображения о параметрах непропорциональности приводятся в работе [1], а обоснование выбора параметра непропорциональности предпринято в работе [28]. Наиболее полное обоснование выбора параметра непропорциональности на критериях соответствия эффектам непропорционального нагружения, полученным при экспериментальных исследованиях, а также уравнения, описывающие эти эффекты, содержатся в работах [29–31].

При несимметричных жестких циклических режимах нагружения конструкционных сталей и сплавов первоначально несимметричная петля пластического гистерезиса в процессе деформирования стремится стать симметричной, т.е. осуществляется так называемый эффект симметризации.

мая «посадка» петли пластического гистерезиса. При нестационарных несимметричных жестких циклических нагружениях имеет место эффект малого цикла в большом, заключающийся в том, что петля малого несимметричного цикла практически возвращается в ту же начальную точку, из которой и начался малый цикл. При несимметричных циклических как пропорциональных мягких, так и непропорциональных мягких и смешанных режимах нагружения конструкционных сталей и сплавов происходит одностороннее накопление деформации (вышагивание петли пластического гистерезиса *ratcheting*), интенсивность которого увеличивается с возрастанием несимметричности процесса нагружения. Явления посадки и высагивания петли пластического гистерезиса являются следствием принципа симметрии циклических свойств материалов. Принцип и следствие говорят, что при жестком несимметричном циклическом нагружении напряженное состояние стремится к напряженному состоянию, соответствующему симметричному циклическому нагружению, а при мягком несимметричном циклическом нагружении деформированное состояние должно увеличивать свою несимметричность. Математическое моделирование явлений посадки и высагивания предпринималось в большом количестве работ, обзор и анализ которых содержится в [32–50]. В данной работе рассматривается математическое моделирование этих явлений на основе варианта одноповерхностной теории пластического течения при комбинированном упрочнении. Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова–Шабоша, подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение. Здесь в качестве первого эволюционного уравнения, описывающего смещение первого типа, принимается уравнение Ишлинского–Прагера, обобщенное согласно принципу симметрии циклических свойств [31] на процессы высагивания. В качестве эволюционного уравнения, описывающего смещение второго типа, принимается уравнение Армстронга–Фредерика–Кадашевича. Гипотеза Новожилова–Шабоша совместно с эволюционными уравнениями Ишлинского–Прагера и Армстронга–Фредерика–Кадашевича эквивалентны эволюционному уравнению с трехчленной структурой, применяемому в теории неупругости [29].

Разрушение конструкционных сталей и сплавов при несимметричных циклических нагружениях мало зависит от несимметричности в условиях жесткого нагружения и существенно зависит от несимметричности при мягком нагружении. При нестационарных циклических нагружениях переход с меньших амплитуд деформации (напряжения) на большую увеличивает суммарную долговечность а переход с большей амплитуды на меньшую уменьшает суммарную долговечность, по сравнению с долговечностью, соответствующей правилу линейного суммирования повреждений. Для описания этих явлений формулируются кинетические уравнения накопления повреждений, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимаются работа добавочных напряжений (остаточных микронапряжений, тензор смещения) на поле пластических деформаций. Приводятся результаты расчетных и экспериментальных исследований упругопластического деформирования и усталостного разрушения материалов при разнообразных непропорциональных циклических нагружениях. На основе анализа результатов экспериментальных исследований деформирования материалов в условиях жесткого несимметричного циклического нагружения формулируется принцип симметрии циклических свойств. Приводятся следствия из принципа симметрии для мягких несимметричных циклических нагружений. Рассматриваются расчетные и экспериментальные результаты исследования процессов несимметричных циклических нагружений.

## 1. Математическое моделирование упругопластического деформирования

В настоящей работе рассматривается весьма простой вариант теории пластичности [30, 51, 52], являющейся частным вариантом теории неупругости [29, 31]. Вариант теории пластичности относится к классу одноповерхостных теорий течения при комбинированном упрочнении. Область применимости варианта теории пластичности ограничивается малыми деформациями начально изотропных металлов при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь. Рассматриваются материалы, обладающие эффектом дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональном циклическом нагружении.

Далее приводится сводка основных уравнений варианта теории пластичности.

$$1. \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p.$$

$$2. \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})].$$

$$3. f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} + a_{ij}) - C^2 = 0.$$

$$4. \dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2}, q_\varepsilon = q_{\varepsilon 0} + q_{\varepsilon A}, q_{\varepsilon 0} = \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p}, q_{\varepsilon A} = \theta_A(C_A - C),$$

$$\theta_A = (1-A)\theta_0 + A\theta_1, C_A = (1-A)C_0 + AC_1, C_0 = C_p + d_0(C_{\max} - C_p),$$

$$C_1 = d_1 C_p, A = 1 - \left( \frac{\dot{s}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{\sigma}_u \dot{\varepsilon}_u} \right)^2, \dot{\sigma}_u = \left( \frac{3}{2} \dot{s}_{ij} \dot{s}_{ij} \right)^{1/2}, \dot{\varepsilon}_u = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)^{1/2}.$$

$$5. \dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left( \frac{2}{3} g_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a a_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, g = E_a + \beta \sigma_a, g_\varepsilon = \beta E_a, g_a = -\beta,$$

$$E_a = E_{a0} / \left[ 1 + K_E (\varepsilon_{u^*}^p)^{n_E+1} \right].$$

$$6. \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{df}{d\sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}, \sigma_u^* = \left( \frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{1/2}, \dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_*} \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*},$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{3G}{E_* + 3G} \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_u^*}, E_* = q_\varepsilon + g + g_\varepsilon \varepsilon_{u^*}^p + g_a a_u^*, \varepsilon_{u^*}^p = \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\sigma_u^*}, a_u^* = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}}{\sigma_u^*}.$$

$$7. \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^p \leq 0 \quad - \text{упругость}, \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^p > 0 \quad - \text{пластичность}.$$

$$8. \dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{W_A}, \alpha = (\sigma_a / a_u^{(2)})^{n_\alpha}, a_u^{(2)} = \left( \frac{3}{2} a_{ij}^{(2)} a_{ij}^{(2)} \right)^{1/2}, a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{2}{3} E_a \varepsilon_{ij}^p,$$

$$W_A = (1-A)W_0 + AW_1, \omega = 1 \quad - \text{разрушение}.$$

Здесь  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  – тензоры скоростей упругой, полной и пластической деформаций;  $e_{ij}$  – девиатор деформаций;  $\sigma_{ij}$ ,  $s_{ij}$ ,  $s_{ij}^*$ ,  $a_{ij}$  – тензор напряжений, девиаторы напряжений, активных напряжений и микронапряжений;  $\varepsilon_{u^*}^p$  – накопленная пластическая деформация;  $\omega$  – поврежденность;  $A$  – параметр непропорциональности;  $C_{\max}$  – максимальный радиус поверхности нагружения.

Вариант теории пластичности замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$E, \nu$  – упругие параметры;

$E_{a0}, \beta, \sigma_a$  – параметры анизотропного упрочнения;

$K_E, n_E$  – модули вышагивания;

$C_p(\epsilon_{u^*}^p)$  – функция изотропного упрочнения;

$W_0$  – энергия разрушения при пропорциональном нагружении;

$n_\alpha$  – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

$\theta_0, \theta_1, d_0, d_1$  – модули дополнительного изотропного упрочнения и разупрочнения;

$W_1$  – энергия разрушения при непропорциональном нагружении.

Первые десять материальных функций определяются по результатам испытаний в условиях пропорционального одноосного напряженного состояния. Базовый эксперимент в этом случае включает в себя следующий набор данных:

- упругие параметры, которые определяются традиционными методами;
- диаграмма пластического деформирования при растяжении;
- диаграмма пластического деформирования при растяжении после предварительного сжатия;
- данные по посадке петли пластического гистерезиса при несимметричном жестком циклическом нагружении;
- данные по одноблочному и двухблочному циклическому растяжению-сжатию при постоянном размахе пластической деформации: число циклов до разрушения и зависимость максимальных значений напряжений на цикле от числа циклов нагружения.

Остальные пять материальных функций определяются по результатам испытаний при непропорциональном циклическом нагружении. Базовый эксперимент в этом случае включает в себя следующий набор данных:

- диаграмма максимальных значений интенсивности напряжений на цикле  $\sigma_{u\max}$  от накопленной пластической деформации  $\epsilon_{u^*}^p$  при пропорциональном циклическом нагружении;
- диаграмма  $\sigma_{u\max}(\epsilon_{u^*}^p)$  при непропорциональном циклическом нагружении по траектории деформаций в виде окружности до стабилизации дополнительного упрочнения и последующем пропорциональном циклическом нагружении до стабилизации разупрочнения;
- данные по усталостному разрушению при непропорциональном циклическом нагружении по траекториям деформаций в виде окружностей с различными радиусами.

Метод идентификации материальных функций по данным базовых экспериментов подробно изложен в работах [29–31, 51]. Там же приведены материальные функции рассматриваемых в настоящей работе сталей.

Во всех работах [5–24], предпринимающих попытку описать эффект дополнительного изотропного упрочнения, используется параметр непропорциональности, предложенный Беналлом и Марки [5–9],

$$A = 1 - \left( \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\sigma}_{ij}}{\dot{\epsilon}_{u^*}^p \dot{\sigma}_u} \right)^2,$$

соответствующий квадрату косинуса угла между векторами скоростей пластической деформации и скорости напряжения. В работах Коротких

и Маковкина [26,27] предлагается параметр непропорциональности  $A = 1 - \left( \frac{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}}{3 \dot{\epsilon}_{u*}^p \dot{\epsilon}_u} \right)^2$ , рав-

ный квадрату косинуса угла между векторами скорости пластической деформации и скорости деформации. Как показано в работе [30], использование этих параметров не способно описать основную закономерность дополнительного изотропного упрочнения, заключающуюся в возрастании дополнительного упрочнения при циклическом нагружении по траекториям деформаций в виде окружностей с увеличением радиусов окружностей. Эти параметры при возрастании радиуса практически не меняют свою величину, и при описании ими дополнительного изотропного упрочнения имеет место одинаковый уровень упрочнения при различных радиусах. Параметр, предложенный Кадашевичем и Мосоловым [25],

$A = 1 - \left( \frac{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{s}_{ij}}{\dot{\epsilon}_u \dot{\sigma}_u} \right)^2$ , равный квадрату косинуса угла между векторами скорости деформаций и

скорости напряжений, прошел [28–30] полное обоснование соответствия закономерностям дополнительного изотропного упрочнения, что позволило использовать его при математическом моделировании упругопластических процессов непропорционального циклического деформирования.

## 2. Дополнительное изотропное упрочнение при непропорциональных циклических нагружениях

Вначале рассматриваются процессы упрочнения, т.е. когда траектории деформаций следуют в порядке возрастания степени непропорциональности нагружения, например крест, квадрат, окружность или окружности с возрастающим радиусом. Соответственно, и уровень дополнительного упрочнения на этих траекториях возрастает. На рис. 1 и 2 приведены результаты экспериментов [5, 7, 20] (кружки) и расчетов (сплошные кривые) при нагружении по такого типа траекториям деформаций. Экспериментальные исследования

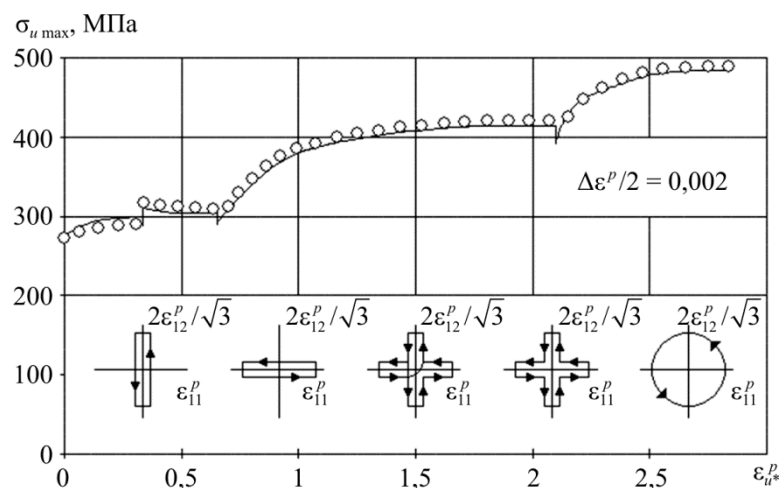


Рис. 1. Нержавеющая сталь 316. Дополнительное изотропное упрочнение при циклическом пропорциональном и непропорциональном нагружении по траекториям деформаций с возрастающей степенью непропорциональности  
 Fig. 1. Stainless steel 316. Additional isotropic hardening under cyclic proportional and disproportional loading along the deformation trajectories with an increasing degree of disproportionalty

проводились на тонкостенных трубчатых образцах из нержавеющей стали 316, и нагружение осуществлялось осевой силой и крутящим моментом ( $P, M$  – опыты) с контролем осевой и сдвиговой деформаций при комнатной температуре. На рис. 2 кривая 1 соответствует расчету с учетом, а кривая 2 – без учета дополнительного упрочнения. Наблюдается более чем двукратное увеличение упрочнения за счет эффекта дополнительного изотропного упрочнения. На рис. 1 при изменении направления пропорционального циклического нагружения (вначале знакопеременное кручение, а затем растяжение-сжатие) наблюдается эффект поперечного упрочнения – вначале дополнительное упрочнение, а затем медленное разрушение. Следует также отметить, что с увеличением радиуса окружности (см. рис. 2) степень непропорциональности нагружения возрастает и увеличивается дополнительное упрочнение, хотя и кривизна траектории деформаций уменьшается от траектории большой кривизны до траектории малой кривизны. Эти результаты говорят о том, что сложность процесса нагружения определяется не только кривизной траектории деформаций, но и расположением траектории относительно начала координат (нулевого напряженно-деформированного состояния).

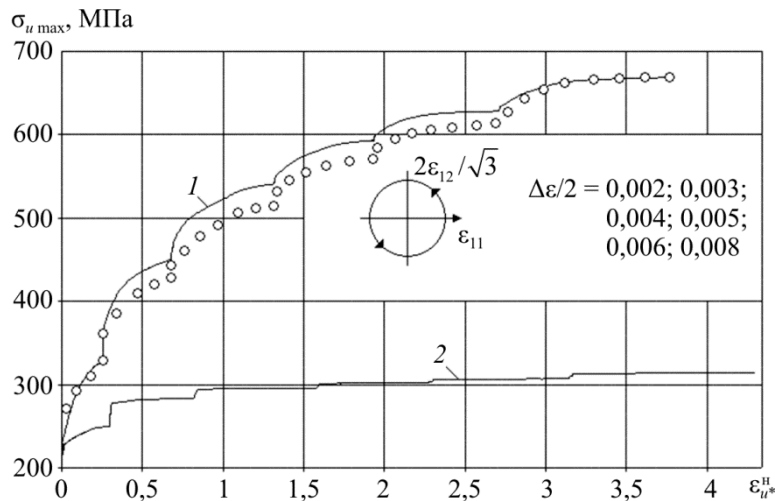


Рис. 2. Нержавеющая сталь 316. Дополнительное изотропное упрочнение при циклическом непропорциональном нагружении по траекториям деформаций в виде окружностей с увеличивающимся радиусом

Fig.2. Stainless steel 316. Additional isotropic hardening under cyclic disproportional loading along the deformation trajectories in the form of a circumference with an increasing radius

Далее рассматриваются процессы нагружения, в которых после упрочнения имеет место и разупрочнение. На рис. 3 приведены результаты расчета (сплошная кривая) и эксперимента [5,7] (кружки) при весьма сложном процессе циклического нагружения.

Здесь имеет место увеличение уровня дополнительного упрочнения по мере возрастания степени непропорциональности при нагружении по траекториям деформаций в виде лучевой, восьмиступенчатой, четырехступенчатой, двухступенчатой, одноступенчатой, квадрата, окружности. Далее при нагружении по траекториям деформаций в виде квадрата, одноступенчатой, двухступенчатой, четырехступенчатой, восьмиступенчатой степень непропорциональности уменьшается и происходит разупрочнение.

Расчетные и экспериментальные исследования дополнительного упрочнения и усталостного разрушения при непропорциональных циклических нагружениях в условиях растяжения-сжатия и знакопеременность кручения проводились на нержавеющей стали 304 при комнатной температуре. На рис. 4 приведены результаты расчетов (сплошные кривые) и экс-

периментов [53] (крестики, светлые и темные кружки, темные треугольники, ромбы и квадраты) по усталостному разрушению как при пропорциональных, так и при непропорциональных циклических нагружениях. Траектории деформаций циклических нагружений показаны на рис. 4.

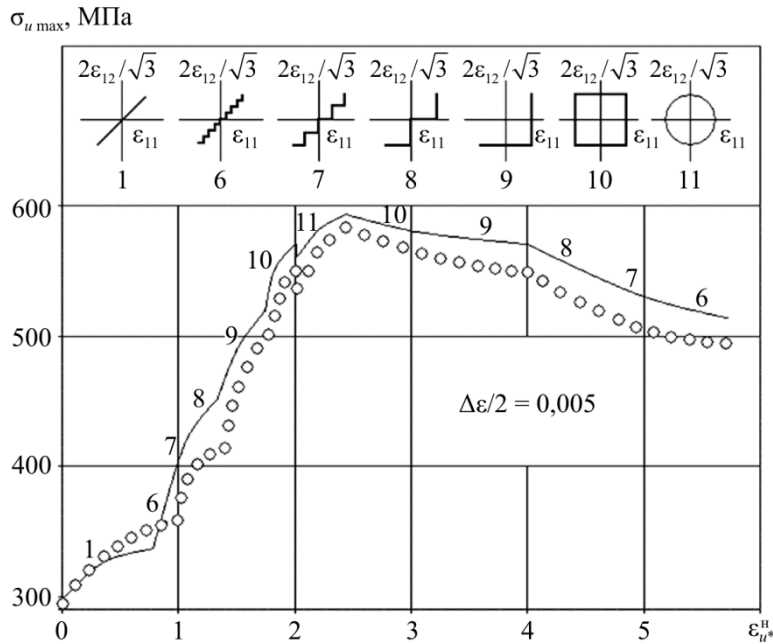


Рис. 3. Нержавеющая сталь 316. Дополнительное упрочнение и разупрочнение при циклическом пропорциональном и непропорциональном нагружении по траекториям деформаций с возрастающей и убывающей степенью непропорциональности  
 Fig. 3. Stainless steel 316. Additional hardening and softening under cyclic disproportional and disproportional loading along the deformation trajectories with an increasing and decreasing degree of disproportionalty

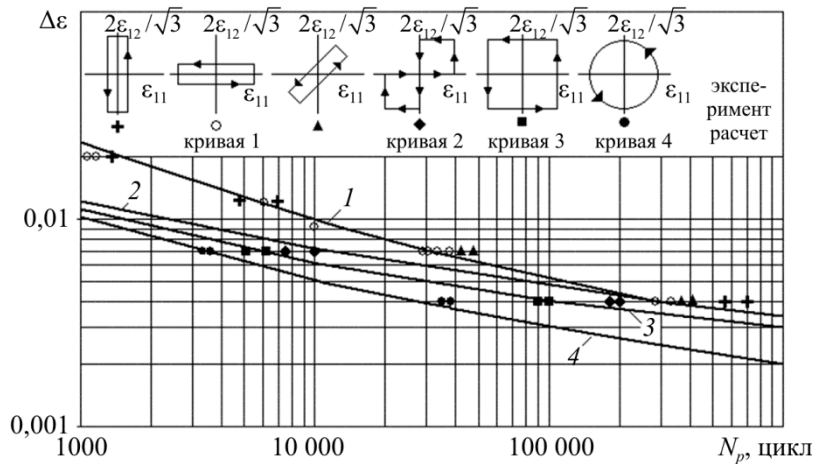


Рис. 4. Нержавеющая сталь 304. Усталостное разрушение при пропорциональных и непропорциональных циклических нагружениях  
 Fig. 4. Stainless steel 304. Fatigue fracture under proportional and disproportional cyclic loadings

Анализ расчетных и экспериментальных результатов показывает, что при одинаковом размахе деформаций непропорциональные циклические нагружения обладают бóльшим повреждающим эффектом, нежели пропорциональные циклические нагружения и снижение



долговечности может достигать порядка. Влияние эффекта дополнительного упрочнения на усталостное разрушение при непропорциональном циклическом нагружении показано на рис. 5. Сплошная кривая 4 соответствует расчету с учетом эффекта дополнительного упрочнения, а кривая 5 – без учета этого эффекта. Темные кружки соответствуют эксперименту [53]. Из результатов, представленных на рис. 5, следует, что расчет без учета эффекта дополнительного упрочнения и зависимости энергии разрушения от степени непропорциональности может привести как к завышению, так и к занижению прогнозируемой долговечности по сравнению с реальной долговечностью материала, обладающего этим эффектом.

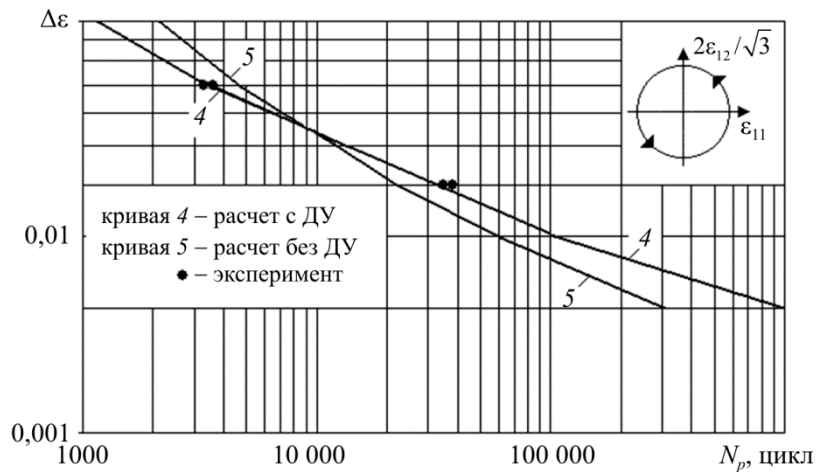


Рис. 5. Нержавеющая сталь 304. Влияние учета эффекта дополнительного изотропного упрочнения на усталостное разрушение  
 Fig. 5. Stainless steel 304. The influence of accounting the additional isotropic hardening effect on fatigue fracture

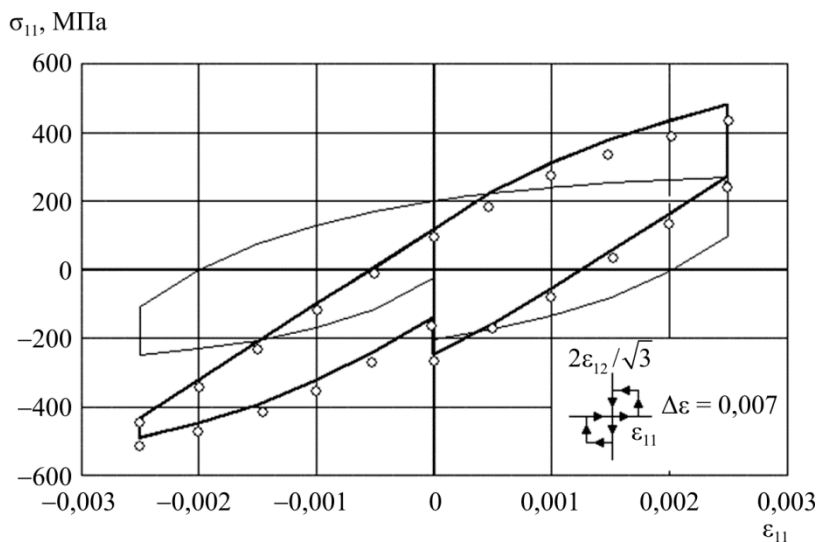


Рис. 6. Нержавеющая сталь 304. Влияние дополнительного изотропного упрочнения на траекторию напряжений при деформировании по траектории деформаций в виде двойного квадрата  
 Fig. 6. Stainless steel 304. The influence of the additional isotropic hardening on the trajectory of stresses during the deformation along the deformation trajectory in the form of a double square

Учет влияния дополнительного изотропного упрочнения демонстрируется на рис. 6–8, на которых показаны циклические диаграммы, рассчитанные с учетом (толстые кривые) и без учета (тонкие кривые) эффекта дополнительного упрочнения. Экспериментальные результаты [53] показаны светлыми кружками.

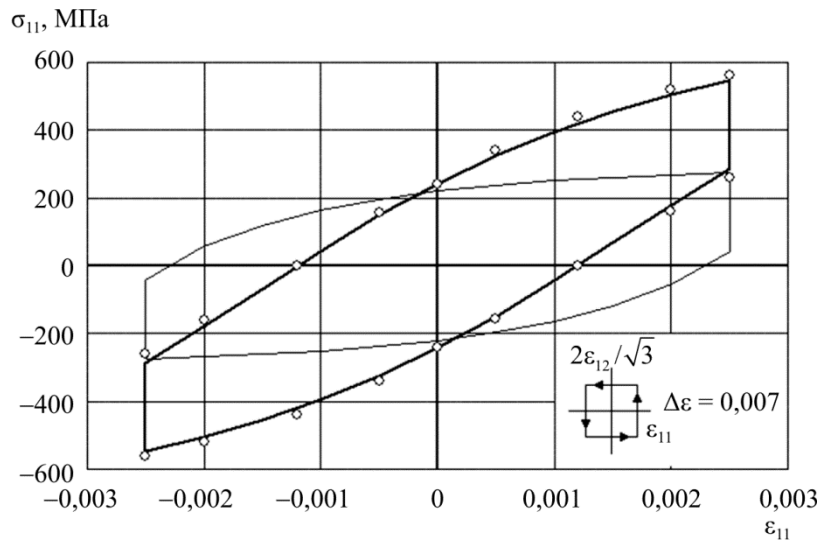


Рис. 7. Нержавеющая сталь 304. Влияние дополнительного изотропного упрочнения на траекторию напряжений при деформировании по траектории деформаций в виде квадрата  
 Fig. 7. Stainless steel 304. The influence of the additional isotropic hardening on the trajectory of stresses during the deformation along the deformation trajectory in the form of a square

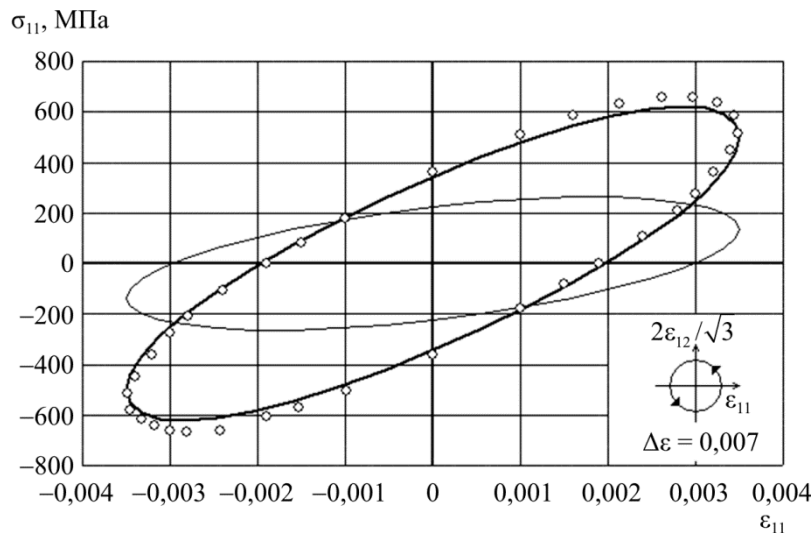


Рис. 8. Нержавеющая сталь 304. Влияние дополнительного изотропного упрочнения на траекторию напряжений при деформировании по траектории деформаций в виде окружности  
 Fig. 8. Stainless steel 304. Influence of the additional isotropic hardening on the stresses trajectory under deformation along the deformations trajectory in the form of a circumference

Наблюдается существенное количественное отличие циклических диаграмм, рассчитанных с учетом и без учета эффекта дополнительного упрочнения при удовлетворительном качественном соответствии.

### 3. Принцип симметрии циклических свойств

Рассматриваются результаты экспериментальных исследований деформирования материалов в условиях жесткого несимметричного (относительно нулевого напряженно-деформированного состояния) циклического нагружения. Вначале рассматривается пропорциональное циклическое нагружение. На рис. 9 приведены циклические диаграммы для 1-го и 300-го циклов жесткого нагружения нержавеющей стали 12Х18Н9 при температуре  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  с амплитудой деформации  $\varepsilon_a = 0,005$  и средней деформацией  $\varepsilon_m = 0,045$ . Изменения максимальных  $\sigma^+$  и минимальных  $\sigma^-$  напряжений на цикле, а также среднего напряжения цикла  $\sigma_m$  приведены на рис. 10. Кружками на этих рисунках показаны экспериментальные результаты, полученные в НИИ Механики ННГУ [52].

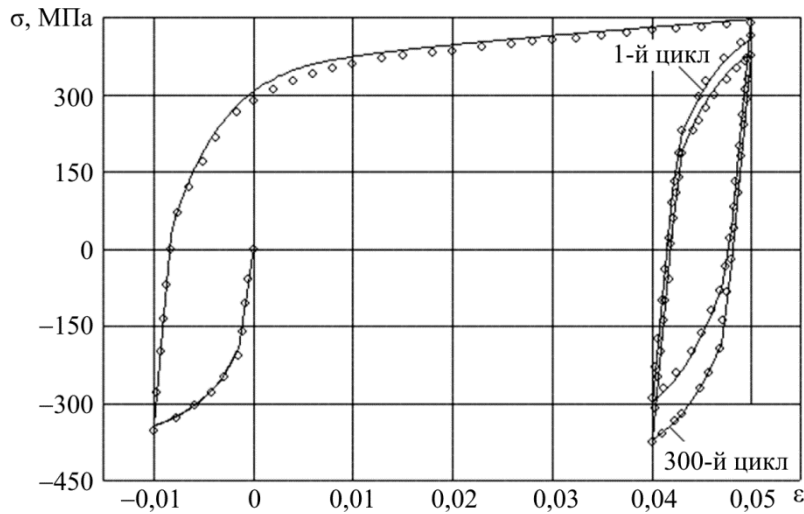


Рис. 9. Нержавеющая сталь 12Х18Н9. Процесс деформирования  
Fig. 9. Stainless steel 12X18H9. Deformation process

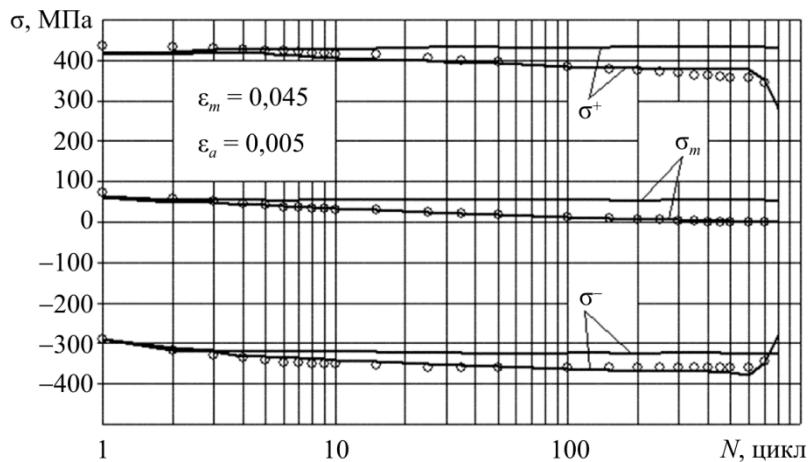


Рис. 10. Нержавеющая сталь 12Х18Н9. Изменения максимального, минимального и среднего напряжений при циклическом деформировании  
Fig. 10. Stainless steel 12X18H9. Alteration of maximal, minimal and average stresses under cyclic deformation

Приведенные результаты показывают, что среднее напряжение цикла в процессе циклического нагружения уменьшается и стремится к нулю, а циклическая диаграмма

становится симметричной. То есть напряженное состояние стремится к напряженному состоянию, соответствующему симметричному циклическому нагружению.

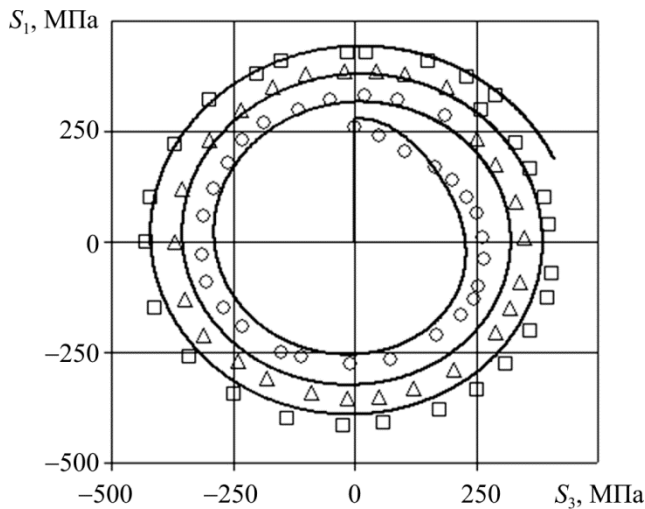


Рис. 11. Сталь 40X16H9T2C. Траектория напряжений при циклическом деформировании по траектории деформаций в виде окружности со смещенным центром

Fig. 11. Steel 40X16H9T2C. Trajectory of stresses under cyclic deformation along the deformations trajectory in the form of a circumference with a shifted center

Далее рассматриваются непропорциональные (сложные) циклические нагружения. На рис. 11 приведена траектория напряжений для трех витков нагружения стали 40X16H9T2C при температуре  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  по траектории деформаций в виде окружности радиусом 0,01 с центром, смещенным по оси  $\mathcal{E}_1$  на величину 0,009. Траектории деформаций и напряжений реализовывались в векторном пространстве Ильюшина [54]. Кружками, треугольниками и квадратами на рис. 11 показаны экспериментальные результаты [55].

Приведенные экспериментальные результаты показывают, что траектория напряжений стремится к окружности с центром в начале координат. То есть напряженное состояние стремится к напряженному состоянию, соответствующему симметричному относительно начала координат циклическому нагружению.

Для пространственной траектории деформаций в виде плоского винта [56] изменения компонент вектора напряжений приведены на рис. 12 и 13. Исследование проводилось на образцах из стали 45 при температуре  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  при нагружении по траектории деформаций (рис. 12) с параметрами  $\mathcal{E}_{10} = 0,015$ ,  $\mathcal{E}_{20} = 0,0072$  и  $R = 0,015$ . Кружками на рис. 12 и 13 показаны экспериментальные результаты [56].

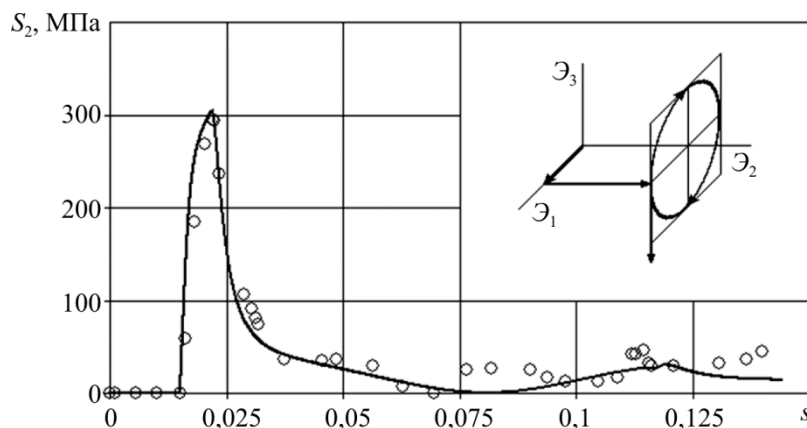


Рис. 12. Сталь 45. Изменение компоненты вектора напряжений  $S_2$  при деформировании по траектории деформаций в виде плоского винта

Fig. 12. Steel 45. Alteration of the stress vector component  $S_2$  under deformation along the deformation trajectories in the form of a flat screw

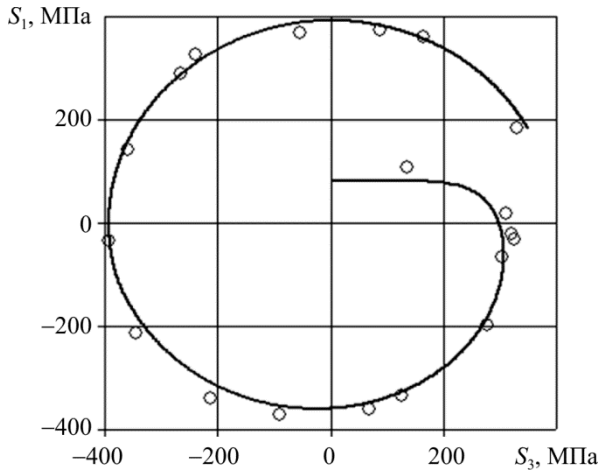


Рис. 13. Сталь 45. Траектория напряжений при деформировании по траектории деформаций в виде плоского винта  
 Fig. 13. Steel 45. Trajectory of stresses under deformation along the deformation trajectory in the form of a flat screw

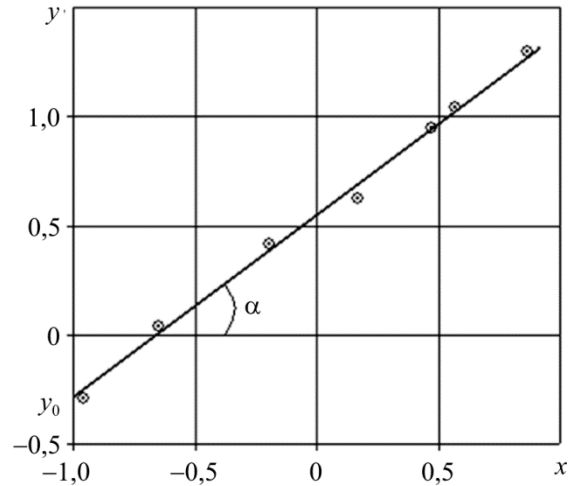


Рис. 14. Нержавеющая сталь 12Х18Н9. Определение модулей вышагивания  
 Fig. 14. Stainless steel 12X18H9. Determination of the ratcheting modules

Приведенные экспериментальные результаты показывают, что траектория напряжений стремится к окружности с центром в начале координат. Это следует из того, что компонента вектора напряжений  $S_2$  становится пренебрежимо малой по величине (см. рис. 12), а траектория напряжений для компонент  $S_1$  и  $S_3$  стремится к окружности с центром в начале координат. Таким образом, напряженное состояние стремится к напряженному состоянию, соответствующему симметричному циклическому нагружению.

Приведенный выше анализ результатов экспериментальных исследований позволяет сформулировать следующий принцип симметрии циклических свойств материалов:

– при жестком несимметричном циклическом нагружении напряженное состояние стремится к напряженному состоянию, соответствующему симметричному циклическому нагружению.

На основании принципа симметрии циклических свойств можно сформулировать следующие следствия:

– при мягком несимметричном циклическом нагружении деформированное состояние должно увеличивать свою несимметричность;

– при уменьшении несимметричности мягкого циклического нагружения возможно временное уменьшение несимметричности деформированного состояния;

– при увеличении несимметричности мягкого циклического нагружения интенсивность возрастания несимметричности деформированного состояния увеличивается.

Принцип симметрии циклических свойств и следствия из него находят свое отражение в результатах интенсивно развивающихся в настоящее время исследований таких явлений, как циклические ползучесть и (или) вышагивание (ratchetting).

Описание рассмотренных выше эффектов возможно в рамках варианта теории пластичности. Изменение будет состоять только в том, что параметр  $E_a$ , входящий в уравне-

ние для смещения поверхности нагружения, принимается зависящим от накопленной пластической деформации  $\varepsilon_{u*}^P$ . Для этой зависимости была получена [52] следующая формула:

$$E_a = E_{a0} / [1 + K_E (\varepsilon_{u*}^P)^{n_E + 1}],$$

где  $E_{a0}$  – параметр анизотропного упрочнения, определяемый на основе изложенного в работе [29] метода. Параметры  $K_E$  и  $n_E$ , именуемые в дальнейшем модулями вышагивания, определяются по результатам одноосных испытаний при жестком несимметричном циклическом нагружении (см. рис. 9). Полученная экспериментальная зависимость между средним напряжением цикла  $\sigma_m$  и числом циклов  $N$  строится в логарифмических координатах

$$y = \lg(E_{a0} \varepsilon_m^P / \sigma_m - 1), \quad x = \lg(\varepsilon_m^P + 4\varepsilon_a^P N).$$

На рис. 14 показаны экспериментальные данные (сталь 12X18Н9, рис. 9, 10), построенные в этих логарифмических координатах. Полученная линейная зависимость позволила по наклону прямой и точке пересечения с осью ординат определить модули вышагивания  $K_E = 4,5$  и  $n_E = -0,2$  по формулам

$$\lg K_E = y_0, \quad n_E + 1 = \text{tg}\alpha.$$

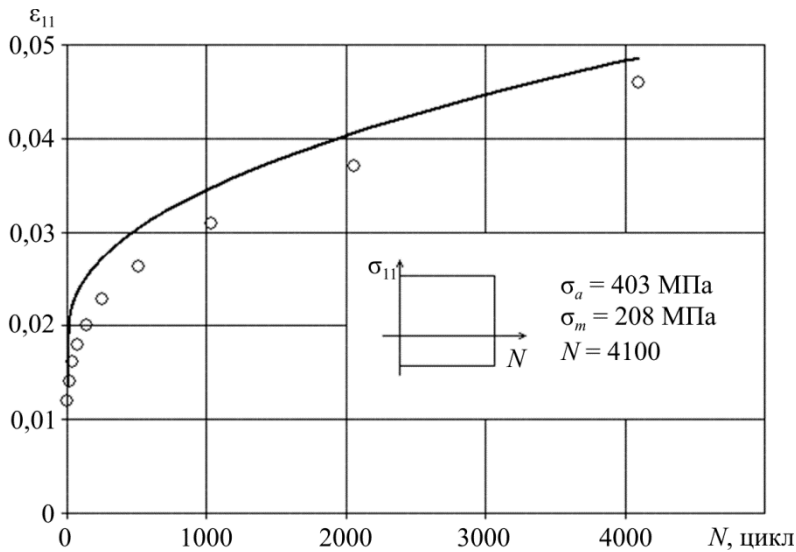


Рис. 15. Сталь 1070. Процесс вышагивания при одноблочном мягком несимметричном циклическом нагружении

Fig. 15. Steel 1070. Ratcheting process during a single-pack soft nonsymmetric cyclic loading

Следует отметить, что по величине модуля вышагивания  $n_E$  можно классифицировать процесс вышагивания следующим образом:

- $n_E < 0$  – затухающее вышагивание;
- $n_E = 0$  – постоянное вышагивание;
- $n_E > 0$  – прогрессирующее вышагивание.

Результаты расчетов, проведенных на основе предложенного варианта теории пластичности, для жестких несимметричных циклических нагружений показаны на рис. 9 – 13 сплошными кривыми. На рис. 10 приведены также результаты расчета без учета принципа симметрии циклических свойств. Результаты исследования процессов мягких несимметричных циклических нагружений стали 1070 при температуре  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  показаны на рис. 15–18. Здесь сплошные кривые – расчет на основе предложенного варианта теории, а кружки – экспериментальные данные [57, 58].

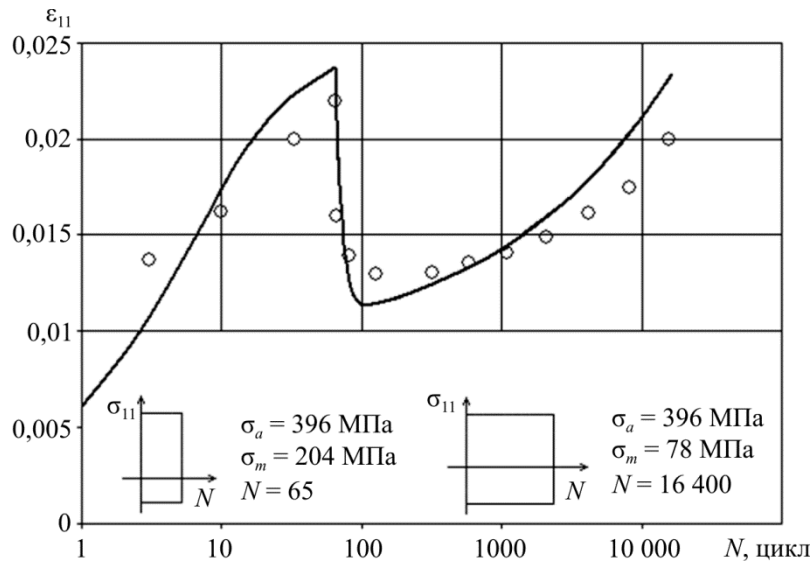


Рис. 16. Сталь 1070. Процесс вышагивания при двухблочном мягком несимметричном циклическом нагружении

Fig. 16. Steel 1070. Ratcheting process during a double-pack soft nonsymmetric cyclic loading

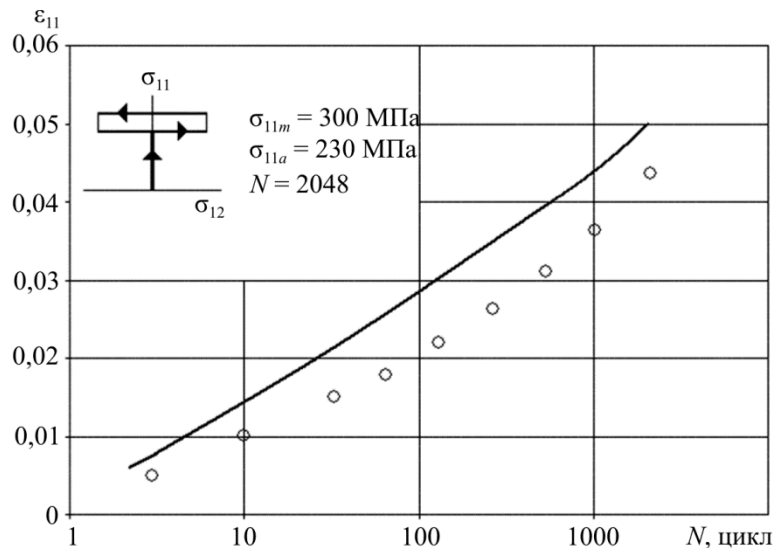


Рис. 17. Сталь 1070. Процесс вышагивания при сложном мягком несимметричном циклическом нагружении

Fig. 17. Steel 1070. Ratcheting process during a complex soft nonsymmetric cyclic loading

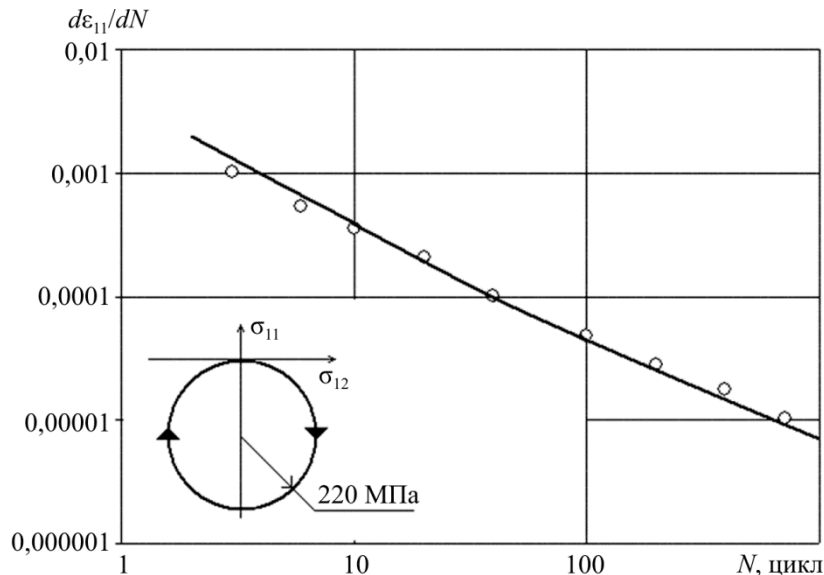


Рис. 18. Сталь 1070. Затухающая интенсивность процесса вышагивания при сложном циклическом нагружении по траектории напряжений в виде окружности со смещенным центром  
 Fig. 18. Steel 1070. Fading intensity of the ratcheting process under a complex cyclic loading along the stress trajectory in the form of a circumference with a shifted center

Первые два режима нагружения (см. рис. 15 и 16) соответствуют пропорциональному циклическому нагружению, а остальные два (см. рис. 17 и 18) – непропорциональному (сложному) циклическому нагружению. Режимы, представленные на рис. 15, 17 и 18, имеют постоянную несимметричность мягкого циклического нагружения, а на режиме, представленном на рис. 16, имеет место уменьшение несимметричности нагружения. Процессы вышагивания для этих режимов полностью соответствуют сформулированным выше следствиям из принципа симметрии циклических свойств.

## Заключение

Адекватное описание процессов сложного нагружения, эффектов дополнительного изотропного упрочнения, посадки и вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса, а также процессов разрушения в рамках одного, довольно простого варианта теории пластичности является несомненным достоинством рассматриваемого математического моделирования. Причем число материальных функций (в данном случае 14 параметров и 1 функция) значительно меньше числа материальных функций и параметров, замыкающих современные теории [5–27, 32–50]. К тому же базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций рассматриваемого варианта теории пластичности четко определены и являются достаточно простыми и легко реализуемыми. Сравнение результатов расчетов и экспериментов говорит об адекватности предложенного математического моделирования.

## Библиографический список

1. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Об эффекте непропорциональности при сложном циклическом нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических систем: межвуз. сб. – М.: Товарищ. науч. изд. КМК. – 1995. – С. 171–175.



2. Lamba H.S., Sidebottom O.M. Cyclic plasticity for nonproportional paths: Part I and 2-comparison with predictions of three incremental plasticity models // *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1978. – Vol. 100. – P. 96–111.
3. McDowell D. L. An Experimental Study of the Structure of Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Plasticity // *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1985. – Vol. 4. – P. 307–315.
4. Ohashi Y., Kawai M., Kaito T. Inelastic Behavior of Type 316 Stainless Steel Under Multiaxial Nonproportional Cyclic Stressings at Elevated Temperature // *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1985. – Vol. 2. – P. 6–15.
5. Benallal A., Calloch S., Laborde C., Marquis D. Hardening of metals under cyclic nonproportional loadings in tension-torsion and triaxial tension // *International seminar on Multiaxial plasticity*. 1-4 September 1992. Cachan France. – Cachan, 1992. – P. 1–7.
6. Nonproportional Loadings in Plasticity and Viscoplasticity: Experimentation and Modelling / A. Benallal, J. Lemaitre, D. Marquis, M. Ronsset // *Proceedings the International Conference on Non Linear Mechanics*. – China, Shanghai, 1985.
7. Benallal A., Marquis D. Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Elasto-Viscoplasticity // *Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1987. – Vol. 109. – P. 326–337.
8. Benallal A., Marquis D. An Experimental Investigation of Cyclic Hardening of 316 SS Under Complex Multiaxial Loadings // *Proc. Of the 9<sup>th</sup> SMIRT Conf.*, paper L 10/3. Lausanne, 17-21 August 1987. – Lausanne, 1987.
9. Benallal A., Le Gallo P., Marquis D. An experimental investigation of cyclic hardening of 316 stainless steel and of 2024 aluminum alloy under multiaxial loading // *Nucl. Eng. Des.* – 1989. – Vol. 114. – P. 345–353.
10. Delobelle P., Robinet P., Bocher L. Experimental study and phenomenological modelization of ratcheting under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel // *Int. J. Plasticity*. – 1995. – Vol. 11. – P. 295–330.
11. Haupt P., Kamlah M. Representation of cyclic hardening and softening properties using continuous variables // *Int. J. Plasticity*. – 1995. – Vol. 11. – P. 267–291.
12. An experimental study on uniaxial and multiaxial strain cyclic characteristics and ratcheting of 316L stainless steel / G.Z. Kang, Q. Gao, X.J. Yang, Y.F. Sun // *J. Mater. Sci. Technol.* – 2001. – Vol. 17. – P. 219–223.
13. Kanazawa K., Miller K.J., Brown M.W. Cyclic Deformation of 1% Cr. Mo. V. Steel Under Out-of-Phase Loads // *Fat. Of Eng. Mat. and Struc.* – 1979. – Vol. 2. – P. 217.
14. Kremple E., Lu H. The Hardening and Rate Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room Temperature // *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1984. – Vol. 106. – P. 376–382.
15. Krieg R.D. A Practical Two Surface Plasticity Theory // *Journal of Applied Mechanics*. – 1975. – Vol. 42. – P. 641–646.
16. McDowell D.L., Socie D.F. Transient and Stable Deformation Behavior Under Cyclic Nonproportional Loadings. ASTM – STP 853 // *Proceedings of the International Symposium on Biaxial-Multiaxial Fatigue*. – San Francisco, 1982. – P. 64–87.
17. Olschewski J., Pilvin P. Phenomenological vs. micromechanical approaches for multiaxial loading // *Preprints of MECAMAT'92. International Seminar on Multiaxial Plasticity*. 1-4 September 1992. Cachan France. – Cachan, 1992.
18. Tasnim H., Stelios K. Ratcheting of Cyclically hardening and softening materials: II Multiaxial behavior // *Inter. J. of Plasticity*. – 1994. – Vol. 10. – No. 2. – P. 185–212.
19. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of Plastic Strain Amplitudes on Non-proportional Cyclic Plasticity // *Acta Mech.* – 1985. – Vol. 57. – P. 167–182.
20. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1985. – Vol. 33. – No. 6. – P. 559–575.

21. Tanaka E. A non-proportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening // *Eur. J. Mech. A/Solids*. – 1994. – Vol. 13. – P. 155–173.

22. Ziebs J., Meersmanu J., Kuhn H.-J. Effects of proportional and nonproportional staining sequences on hardening/softening behaviour of IN 738 LC at elevated temperatures // *Preprints of MECAMAT'92. International Seminar on Multiaxial Plsticity. Cachan France, 1-4 September 1992*. – Cachan, 1992.

23. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1863–1889. DOI:10.1016/j.ijplas.2008.04.008

24. Zhang J., Jiang Y. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation of a pure polycrystalline copper // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1890–1915. DOI:10.1016/j.ijplas.2008.02.008

25. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. О соотношениях эндохронной теории пластичности с «новой» мерой внутреннего времени при сложном циклическом нагружении // *Технология легких сплавов*. – 1990. – № 3. – С. 32–36.

26. Коротких Ю.Г., Маковкин Г.А. О моделировании процессов непропорционального упругопластического деформирования на базе уравнений пластичности с комбинированным упрочнением // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: межвуз. сб.* – М.: Товарищ. науч. изд. КМК. – 1997. – С. 5–10.

27. Маковкин Г.А. Сравнительный анализ параметров непропорциональности сложного упругопластического деформирования. // *Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Механика*. – 1999. – Вып. 1. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – С. 30–36.

28. Бондарь В.С., Титарев И.А. Вариант теории пластичности для пропорциональных и непропорциональных циклических нагружений // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Вып. 63. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. – С. 5–17.

29. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.

30. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.

31. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.

32. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // *Int. J. of Plasticity*. – 2002. – Vol. 18. – P. 873–894.

33. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model / G. Kang, Y. Liu, J. Ding, Q. Gao // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 838–860.

34. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 26 (3). – P. 441–465. DOI:10.1016/j.ijplas.2009.08.005

35. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

36. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1756–1791.

37. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.

38. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2010. – Vol. 26. – P. 711–730.

39. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening // *Int. J. of Plasticity*. – 2011. – Vol.27. – P. 479–491.

40. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // *Int. J. of Plasticity*. – 2012. – Vol.35. – P. 44–66.
41. Multiaxial ratcheting with advanced kinematic and directional distortional hardening rules / H.P. Feigenbaum, J. Dugdale, Y.F. Dafalias, K.I. Kourousis, J. Plesek // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2012. – Vol. 49 (22). – P. 3063–3076.
42. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // *Int. J. Plasticity*. – 2008. – Vol. 24 – P. 1863–1889.
43. Effect of dynamic strain aging on isotropic hardening in low cycle fatigue for carbon manganese steel / Z.Y. Huang, J.L. Chaboche, Q.Y. Wang, D. Wagner, C. Bathias // *Materials Science and Engineering*. – 2014. – A589. – P. 34–40.
44. Jiang Y., Zhang J. Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity Deformation // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1481–1515.
45. Kang G., Kan Q. Constitutive modeling for uniaxial time-dependent ratcheting of SS304 stainless steel // *Mech. Mater.* – 2007. – Vol. 39. – P. 488–499.
46. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model / G. Kang, Y. Liu, J. Ding, Q. Gao // *Int. J. Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 838–860.
47. Multi-mechanism modeling of proportional and non-proportional ratcheting of stainless steel 304 / K. Saï, L. Taleb, F. Guesmi, G. Cailletaud // *Acta Mech.* – 2014. – Vol. 225 (11). – P. 3265–3283.
48. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep // *Int. J. Plasticity*. – 2011. – Vol. 27 (12). – P. 1936–1958.
49. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control // *Int. J. Plasticity*. – 2013. – Vol. 43. – P. 1–19.
50. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C // *Int. J. Plasticity*. – 2014. – Vol. 61. – P. 32–48.
51. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.
52. Бондарь В.С., Даншин В.В., Алхимов Д.А. Анализ циклического деформирования и мало-, многоциклового усталости в условиях одноосного напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 52–71. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.04
53. Socie D. Multiaxial Fatigue Damage Models // *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1988. – Vol. 3. – P. 9–21.
54. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
55. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: моногр. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. – Тверь: Изд-во ТГТУ, 2003. – 172 с.
56. Зубчанинов В.Г., Гуляев В.И., Зубчанинов Д.В. Экспериментальное исследование сложного деформирования стали 45 по траекториям типа «плоский винт» // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Строительные материалы, конструкции и сооружения. – Тула: Изд-во Тул. гос. ун-та, 2006. – № 1.
57. Jiang Y., Sehitoglu H. Cyclic ratcheting of 1070 steel under multiaxial stress states // *Int. J. Plasticity*. – 1994. – Vol. 10. – No 5. – P. 579–608.
58. Jiang Y., Sehitoglu H. Modeling of cyclic ratcheting plasticity. Part 2.: comparison of model simulations with experiments // *ASME J. APPL. Mech.* – 1996. – Vol. 63. – P. 726–733.

## References

1. Kadashevich Iu.I., Pomytkin S.P. Ob effekte neproportsional'nosti pri slozhnom tsiklicheskom nagruzhenii. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Chislennoe modelirovanie fiziko-mekhanicheskikh sistem. Mezhd. sb., Moscow, Tovarishch, nauchn. izd. KMK*, 1995, pp. 171-175.
2. Lamba, H.S., Sidebottom, O.M. Cyclic plasticity for nonproportional paths: Part I and 2-comparison with predictions of three incremental plasticity models. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1978, vol. 100, pp. 96-111.
3. McDowell D. L. An Experimental Study of the Structure of Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Plasticity. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1985, vol. 4, pp. 307-315.
4. Ohashi Y., Kawai M., Kaito T. Inelastic Behavior of Type 316 Stainless Steel Under Multiaxial Nonproportional Cyclic Stressings at Elevated Temperature. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1985, vol. 2, pp. 6-15.
5. Benallal A., Calloch S., Laborde C., Marquis D. Hardening of metals under cyclic nonproportional loadings in tension-torsion and triaxial tension. *International seminar on Multiaxial plasticity*, 1-4 September 1992, Cachan France, pp. 1-7.
6. Benallal A., Lemaitre J., Marquis D. and Ronsset M. Nonproportional Loadings in Plasticity and Viscoplasticity: Experimentation and Modelling. *Proceedings the International Conference on Non Linear Mechanics*, Shanghai, China, 1985.
7. Benallal A., Marquis D. Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Elasto-Viscoplasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1987, vol. 109, pp. 326-337.
8. Benallal A. and Marquis D. An Experimental Investigation of Cyclic Hardening of 316 SS Under Complex Multiaxial Loadings. *Proc. Of the 9<sup>th</sup> SMIRT Conf., paper L 10/3*, Lausanne, 17-21 August 1987.
9. Benallal A., Le Gallo P., Marquis D. An experimental investigation of cyclic hardening of 316 stainless steel and of 2024 aluminum alloy under multiaxial loading. *Nucl. Eng. Des.*, 1989, vol. 114, pp. 345-353.
10. Delobelle, P., Robinet, P., Bocher, L. Experimental study and phenomenological modelization of ratcheting under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel. *Int. J. Plasticity*, 1995, vol. 11, pp. 295-330.
11. Haupt P., Kamlah M. Representation of cyclic hardening and softening properties using continuous variables. *Int. J. Plasticity*, 1995, vol. 11, pp. 267-291.
12. Kang G.Z., Gao Q., Yang X.J., Sun Y.F. An experimental study on uniaxial and multiaxial strain cyclic characteristics and ratcheting of 316L stainless steel. *J. Mater. Sci. Technol.*, 2001, – vol. 17, pp. 219-223.
13. Kanazawa K., Miller K.J., Brown M.W. Cyclic Deformation of 1% Cr. Mo. V. Steel Under Out-of-Phase Loads. *Fat. Of Eng. Mat. and Struc.*, 1979, vol. 2, pp. 217.
14. Kremple E., Lu H. The Hardening and Rate Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room Temperature. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1984, vol. 106, pp. 376-382.
15. Krieg R.D. A Practical Two Surface Plasticity Theory. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, – vol. 42, pp. 641-646.
16. McDowell D.L., Socie D.F. Transient and Stable Deformation Behavior Under Cyclic Nonproportional Loadings. ASTM – STP 853. *Proceedings of the International Symposium on Biaxial-Multiaxial Fatigue*, San Francisco, Dec. 1982, pp. 64-87.
17. Olschewski J., Pilvin P. Phenomenological vs. micromechanical approaches for multiaxial loading. *Preprints of MECAMAT'92. International Seminar on Multiaxial Plasticity*, Cachan France, 1-4 September 1992.
18. Tasnim H., Stelios K. Ratcheting of Cyclically hardening and softening materials: II Multiaxial behavior. *Inter. J. of Plasticity*, 1994, vol. 10, no. 2, pp. 185-212.
19. Tanaka E., Murakami S. and Ooka M. Effects of Plastic Strain Amplitudes on Non-proportional Cyclic Plasticity. *Acta Mech.*, 1985, vol. 57, pp. 167-182.
20. Tanaka E., Murakami S. and Ooka M. Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1985, vol. 33, no. 6, pp. 559-575.
21. Tanaka, E. A non-proportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1994, vol. 13, pp. 155-173.
22. Ziebs J., Meersman J., Kuhn H.-J. Effects of proportional and nonproportional straining sequences on hardening/softening behaviour of IN 738 LC at elevated temperatures. *Preprints of MECAMAT'92. International Seminar on Multiaxial Plasticity*, Cachan France, 1-4 September 1992.

23. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol.24, pp. 1863-1889. DOI:10.1016/j.ijplas.2008.04.008
24. Zhang J., Jiang Y. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation of a pure polycrystalline copper. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1890-1915. doi:10.1016/j.ijplas.2008.02.008.
25. Kadashevich Iu.I., Mosolov A.B. O sootnosheniakh endokhronnoi teorii plastichnosti s "novoi" meroi vnutrennego vremeni pri slozhnom tsiklicheskom nagruzhении. *Tekhnologiya legkikh splavov*, 1990, No 3, pp. 32-36.
26. Korotkikh Iu.G., Makovkin G.A. O modelirovanii protsessov neproportsional'nogo uprugoplasticheskogo deformirovaniia na baze uravnenii plastichnosti s kombinirovannym uprochneniem. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Chislennoe modelirovanie fiziko-mekhanicheskikh protsessov: Mezhevuz. sb., Moscow, Tovarishch, nauch. izd. KMK*, 1997, pp. 5-10.
27. Makovkin G.A. Sravnitel'nyi analiz parametrov neproportsional'nosti slozhnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniia. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya mekhanika*, 1999, Vyp. 1, N.Novgorod, Izd-vo NNGU, pp. 30-36.
28. Bondar' V.S., Titarev I.A. Variant teorii plastichnosti dlia proporsional'nykh i neproportsional'nykh tsiklicheskikh nagruzhений. *N.Novgorod, Izd-vo NNGU, Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhevuz. sbornik*, 2001, iss. 63, pp. 5-17.
29. Bondar V.S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2004, 144 p.
30. Bondar V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proporsional'nye i neproporsional'nye nagruzheniia [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2008, 176 p.
31. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. New York, Begell House, 2013, 194 p.
32. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *Int. J. of Plasticity*, 2002, vol.18, pp. 873-894.
33. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 838-860.
34. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol.26(3), pp.441-465. DOI:10.1016/j.ijplas.2009.08.005
35. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.
36. Rahman S.M., Hassan T., Corona E., Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp.1756-1791.
37. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.
38. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 2010, vol. 26, pp. 711-730.
39. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening. *Int. J. of Plasticity*, 2011, vol. 27, pp. 479-491.
40. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *Int. J. of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 44-66.
41. Feigenbaum H.P., Dugdale J., Dafalias Y.F., Kourousis K.I., Plesek J. Multiaxial ratchetting with advanced kinematic and directional distortional hardening rules. *Int. J. of Solids and Structures*, 2012, vol. 49 (22), pp. 3063-3076.
42. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, pp.1863-1889.
43. Huang Z.Y., Chaboche J.L., Wang Q.Y., Wagner D., Bathias C. Effect of dynamic strain aging on isotropic hardening in low cycle fatigue for carbon manganese steel. *Materials Science and Engineering*, 2014, A589, pp. 34-40.
44. Jiang Y., Zhang J., Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity Deformation. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol.24, pp.1481-1515.
45. Kang G., Kan Q. Constitutive modeling for uniaxial time-dependent ratchetting of SS304 stainless steel. *Mech. Mater.*, 2007, vol. 39, pp.488-499.
46. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratchetting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model. *Int. J. Plasticity*, 2009, vol.25, pp.838-860.

47. Saï K., Taleb L., Guesmi F., Cailletaud G. Multi-mechanism modeling of proportional and non- proportional ratchetting of stainless steel 304. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225 (11), pp.3265- 3283.
48. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep. *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27 (12), pp.1936-1958.
49. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control. *Int. J. Plasticity*, 2013, vol.43, pp.1-19.
50. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C. *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 61, pp. 32-48.
51. Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 2, pp. 125-152.
52. Bondar V.S., Danshin V.V., Alkhimov D.A. Analysis on cyclic defonnation and low-high-cycle fatigue in uniaxial stress state. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 52-71. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.04
53. Socie D. Multiaxial Fatigud Damage Models.// *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1988, vol. 3, pp. 9-21.
54. Il'iushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii*. Moscow, Izd-vo ANSSSR, 1963, 271 p.
55. Zubchaninov V.G., Okhlopkov N.L., Garanikov V.V. *Eksperimental'naia plastichnost': Monografiia. Kniga 1. Protsessy slozhnogo deformirovaniia*. Tver', TGTU, 2003, 172 p.
56. Zubchaninov V.G., Gul'tiaev V.I., Zubchaninov D.V. *Eksperimental'noe issledovanie slozhnogo deformirovaniia stali 45 po traektoriiam tipa «ploskii vint»*. Tula, *Izd-vo TGU Izv. Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serii stroitel'nye materialy, konstruksii i sooruzheniia*, 2006, no 1.
57. Jiang Y., Sehitoglu H. Cyclic ratchetting of 1070 steel under multiaxial stress states. *Int. J. Plasticity*, 1994, vol. 10, no 5, pp. 579-608.
58. Jiang Y., Sehitoglu H. Modeling of cyclic rathetting plasticity, part 2.: comparison of model simulations with experiments. *ASME J. APPL. Mech.*, 1996, vol. 63, pp. 726-733.