

Пантелеев И.А., Полтавцева Е.В., Мубассарова В.А., Гаврилов В.А. Возмущение напряженно-деформированного состояния упругого полупространства шаровой неоднородностью упругих свойств при сдвиге в горизонтальной плоскости с учетом гравитационных сил // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 4. – С. 138–153. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.10

Panteleev I.A., Poltavceva E.V., Mubassarova V.A., Gavrilov V.A. Perturbation of the stress-strain state of an elastic half-space by the spherical inhomogeneity of elastic properties under shear in horizontal plane taking account of gravitational forces. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 138-153. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.10



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.4.10

УДК 539.3

ВОЗМУЩЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ШАРОВОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПРИ СДВИГЕ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ

И.А. Пантелеев¹, Е.В. Полтавцева², В.А. Мубассарова³, В.А. Гаврилов²

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

²Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН, Петропавловск-Камчатский, Россия

³Научная станция РАН, Бишкек, Киргизия

О СТАТЬЕ

Получена: 14 августа 2017 г.
Принята: 5 декабря 2017 г.
Опубликована: 29 декабря 2017 г.

Ключевые слова:

неоднородность упругих свойств, объемные потенциалы и квазипотенциалы, подготовка землетрясения, задача Эшелби, чистый сдвиг.

АННОТАЦИЯ

Настоящая работа посвящена решению задачи о возмущении напряженно-деформированного состояния упругого изотропного полупространства шаровой неоднородностью упругих свойств для случая действия на полупространство только силы тяжести и случая дополнительно наложенного сдвига в горизонтальной плоскости. Получено аналитическое решение для компонент вектора перемещений и объемной деформации, выраженное через потенциалы и квазипотенциалы шара, для случая действия на полупространство только сил тяжести и случая суперпозиции сил тяжести и сдвига в горизонтальной плоскости. На примере конкретного сейсмического события показано, что вклад гравитационных сил в возмущение напряженно-деформированного состояния полупространства шаровой неоднородностью упругих свойств (распределение относительно объемной деформации) не является малым. С использованием полученного аналитического решения для случая действия только сил тяжести показано, что распределение объемной деформации является осесимметричным относительно оси z . Вокруг шаровой неоднородности упругих свойств в изотропном упругом полупространстве формируются зона относительного сжатия, расположенная по простиранию неоднородности, и зоны относительного растяжения, расположенные над и под неоднородностью. Отличительной особенностью зон относительного растяжения является их предельный размер, тогда как размер зоны относительного сжатия растет при уменьшении величины объемной деформации.

© Пантелеев Иван Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: pia@icmm.ru

Полтавцева Евгения Викторовна – научный сотрудник, e-mail: jenya@kscnet.ru

Мубассарова Виргиния Анатольевна – младший научный сотрудник, e-mail: helmik69@gmail.com

Гаврилов Валерий Александрович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: vgav

Ivan A. Panteleev – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: pia@icmm.ru

Evgeniya V. Poltavceva – Researcher, e-mail: jenya@kscnet.ru

Virginiya A. Mubassarova – Junior Researcher, e-mail: helmik69@gmail.com

Valerii A. Gavrilov – CSc in Technical Sciences, Leading Researcher, e-mail: vgavr@kscnet.ru



При добавлении в решение слагаемого, связанного со сдвигом в горизонтальной плоскости, симметрия не нарушается, но нарушается равенство по модулю объемных деформаций в соседних октантах. Размеры и геометрия изоповерхностей объемной деформации при учете сил тяжести в задачи сдвига в горизонтальной плоскости существенно меняется. В зависимости от направления оси максимального растяжения полупространства с неоднородностью происходит увеличение размеров зон относительного сжатия и соответствующее уменьшение размеров зон относительного растяжения с изменением формы обеих.

© ПНИПУ

PERTURBATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC HALF-SPACE BY THE SPHERICAL INHOMOGENEITY OF ELASTIC PROPERTIES UNDER SHEAR IN HORIZONTAL PLANE TAKING ACCOUNT OF GRAVITATIONAL FORCES

I.A. Panteleev¹, E.V. Poltavceva², V.A. Mubassarova³, V.A. Gavrilov²

¹Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS, Perm, Russian Federation

²Institute of Volcanology and Seismology Far Eastern Branch of Russian Academy of Science, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russian Federation

³Research Station of Russian Academy of Science, Bishkek, Kyrgyzstan

ARTICLE INFO

Received: 14 August 2017
Accepted: 5 December 2017
Published: 29 December 2017

Keywords:

inhomogeneity of elastic properties, volume potentials and quasipotentials, earthquake preparation, Eshelby problem, pure shear.

ABSTRACT

The present paper is devoted to the solution of the problem related to the perturbation of the stress-strain state of an elastic isotropic half-space by the spherical inhomogeneity of elastic properties for the case of only gravity and the case of an additional superimposed pure shear on the half-space. The analytical solution is obtained for the displacement and volume strain components, expressed in terms of the potentials and quasipotentials of the sphere, for the case of only gravity forces acting on the half-spaces and the case of superposition of gravity and pure shear. Using the example of a specific seismic event, it was shown that the contribution of gravitational forces to the perturbation of the stress-strain state of a half-space by the spherical inhomogeneity of elastic properties (the distribution with respect to the volume deformation) is not small. Using the obtained analytical solution for the case of the action of gravity only, it is shown that the volume strain distribution is axisymmetric with respect to the axis z . A spherical inhomogeneity of the shear modulus in an isotropic elastic half-space forms a zone of a relative compression located along the strike of the inhomogeneity, and zones of relative stretching above and below the inhomogeneity. A distinctive feature of the zones of relative stretching is their limiting size, while the size of the zone of a relative compression increases when the volume strain decreases.

In this case, between these planes, the solution in the neighboring octants differs only in sign. When adding a term associated with the gravitational forces in the solution, the symmetry is not violated but the equality in magnitude of the volume deformations in neighboring octants is violated. Dimensions and geometry of isosurfaces of volumetric deformation varies significantly when gravity is taken into account. Depending on the direction of the axis of the maximum extension of the half-space with the inhomogeneity, the size of the zones of the relative compression increases and the corresponding reduction in the size of the zones of the relative stretching changes with the shape of both.

© PNRPU

Введение

Пионерские работы Эшелби о влиянии включений и неоднородностей упругих свойств на напряженно-деформированное состояние линейно-упругого пространства, опубликованные в середине прошлого века [1, 2], положили начало активному использованию предложенного подхода для решения различных задач механики структурно-неоднородных сред [3–7]. В настоящее время в ряде работ предложено обобщение задач о неоднородности и включении на случай анизотропных сред [8–11] и случай неупругих сред [12–17].

Отдельным направлением использования результатов решения задач о включении и неоднородности являются задачи расчета предвестниковых изменений геофизических полей различной природы при подготовке тектонических коровых (внутриплитных) землетрясений. В таких задачах за неоднородность упругих свойств принимается область геосреды, которая возмущает асейсмичное течение тектонических процессов и является непосредственной причиной возникновения и развития предвестников. Момент распада неоднородности при этом ассоциируется с моментом наступления землетрясения и появлением очага. Одним из возможных физических механизмов появления таких неоднородностей в геосреде служит зацепление двух блоков (отдельностей), которое в поле приложенных тектонических напряжений приводит к появлению консолидированной области (неоднородности), осредненные свойства которой отличаются от свойств среды до зацепления. В таком случае распаду неоднородности соответствует подвижка по границе этих блоков, приводящая к генерации сейсмических волн. Приведенное представление о процессе формирования очага является, безусловно, сильно упрощенным и модельным, однако позволяет проводить прямые расчеты эволюции деформационных, фильтрационных, электромагнитных полей, вызванных подготовкой конкретного сейсмического события, а также оценивать размеры зоны проявления предвестников различной природы.

В работах [18–20], посвященных задачам расчета предвестниковых изменений при подготовке и реализации одиночного землетрясения, принимается гипотеза о существенно незначительном вкладе гравитационных сил в возмущение напряженно-деформированного состояния геосреды, вызванное неоднородностью упругих свойств (областью формирования будущего очага). Правомочность такой гипотезы обосновывается тем, что коровые (внутриплитные) землетрясения являются в основном неглубокофокусными (глубина расположения гипоцентра не более 50 км) и гравитационные напряжения на таких глубинах существенно меньше тектонических напряжений, вызванных движением плит.

Настоящая работа посвящена оценке вклада гравитационных сил (силы тяжести) в возмущение напряженно-деформированного состояния упругого полупространства, вызванное шаровой неоднородностью упругих свойств, расположенной на некоторой глубине. Полученное аналитическое решение для определения возмущения напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого полупространства с шаровой неоднородностью упругих свойств при действии только гравитационных сил сравнивается с решением, полученным в [20] для случая чистого сдвига без учета сил гравитации; решение [20] получено в развитие подхода, основанного на методе функций Грина для однородной упругой среды и использованного ранее в [21–23] для вычисления полей возмущений (пульсаций) деформационных полей в неограниченных композитных средах.

1. Математическая постановка задачи

В работе задача о неоднородности упругих свойств формулируется и решается на основе подхода, предложенного в [18, 20]. Рассмотрим исходно однородное упругое полупространство $\bar{\Omega}$ и полупространство с неоднородностью упругих свойств, занимающую область $V \in \bar{\Omega}$, центр которой расположен на некоторой глубине H . Граница Γ полупространства $\bar{\Omega}$ свободна от напряжений. Краевая задача теории упругости в перемещениях для полупространства с неоднородностью имеет вид

$$\begin{aligned} (C_{ijkl}(\bar{x})u_{k,l}(\bar{x}))_{,j} + F_i &= 0, \bar{x} \in \bar{\Omega}, \\ L\bar{u}(\bar{x}) &= f(\bar{x}), \bar{x} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{u}(\bar{x})$ – вектор перемещений; $\tilde{C}(\bar{x})$ – тензорное поле упругих модулей, компоненты которого обладают следующими свойствами симметрии: $C_{ijkl} = C_{jikl}$, $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, $C_{ijkl} = C_{klij}$; F_i – компоненты вектора удельной объемной силы; L – линейный однородный оператор граничных условий, система координат – декартова с началом координат в центре неоднородности. На границе между неоднородностью и полупространством предполагается выполнение условия непрерывности векторов перемещений и напряжений. Здесь и далее используется общепринятая система индексов: по повторяющимся индексам проводится суммирование, запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по соответствующей координате, все индексы принимают значения от единицы до трех. Наряду с задачей (1) рассмотрим задачу нахождения напряженно-деформированного состояния полупространства без неоднородности

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0(u_{k,l}^0(\bar{x}))_{,j} + F_i &= 0, \bar{x} \in \bar{\Omega}, \\ L\bar{u}^0(\bar{x}) &= f(\bar{x}), \bar{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что решение системы (2) для полупространства известно и известна ее функция Грина $v_{ir}(\bar{x}, \bar{\xi})$, которая удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0(v_{kr,l}(\bar{x}, \bar{\xi}))_{,j} + \delta_{ir}\delta(\bar{x} - \bar{\xi}) &= 0, \bar{x}, \bar{\xi} \in \bar{\Omega}, \\ L\bar{v}_r(\bar{x}, \bar{\xi}) &= 0, \bar{x}, \bar{\xi} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

где δ_{ir} – символы Кронекера; δ – дельта-функция; r – номер единичной силы, приложенной в точке $\bar{\xi} \in \bar{\Omega}$ и действующей вдоль оси x_r . Будем искать возмущение поля перемещений, вызванное неоднородностью, как разницу между решениями (1) и (2), полагая [24], что

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}^0(\bar{x}) + \bar{w}(\bar{x}), \quad \tilde{C}(\bar{x}) = \tilde{C}^0 + q\delta_V(\bar{x})\tilde{C}'(\bar{x}), \quad (4)$$

где $\delta_V(\bar{x})$ – характеристическая функция неоднородности (внутри и на границе неоднородности $\delta_V = 1$, снаружи неоднородности $\delta_V = 0$); $\tilde{C}'(\bar{x})$ – тензорное поле упругих модулей внутри неоднородности; q – числовой параметр, отражающий степень неоднородности свойств, $|C'_{ijkl}(\bar{x})| \leq C_{ijkl}^0$.

Тогда из (1), (2) с учетом (4) получаем задачу для определения \bar{w} :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0(\omega_{k,l}(\bar{x}))_{,j} + q(\delta_V(\bar{x})C'_{ijkl}(\bar{x})\omega_{k,l}(\bar{x}))_{,j} + q(\delta_V(\bar{x})C'_{ijkl}(\bar{x})u_{k,l}^0(\bar{x}))_{,j} &= 0, \bar{x} \in \bar{\Omega}, \\ L\bar{w}(\bar{x}) &= 0, \bar{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда модули упругости в неоднородности не существенно отличаются от модулей окружающего полупространства. Тогда для решения задачи (5) используем метод малого параметра, изложенный в [24], и будем искать решение в виде ряда

$$\omega_i(\bar{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} q^m \omega_i^{(m)}(\bar{x}). \quad (6)$$

Подставив (5) в (6) и раскрывая итоговое соотношения для каждой степени q , приходим к следующему набору систем при нулевых граничных условиях:

$$\begin{aligned} \omega_i^{(0)}(\bar{x}) = 0, C_{ijkl}^0(\omega_{k,l}^{(1)}(\bar{x}))_{,j} + (\delta_V(\bar{x}) C_{ijkl}'(\bar{x}) u_{k,l}^0(\bar{x}))_{,j} &= 0, \\ C_{ijkl}^0(\omega_{k,l}^{(m)}(\bar{x}))_{,j} + (\delta_V(\bar{x}) C_{ijkl}'(\bar{x}) \omega_{k,l}^{(m-1)}(\bar{x}))_{,j} &= 0, m \geq 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы (7) можно представить через функции Грина (упростив с использованием формулы Гаусса–Остроградского) в виде

$$\begin{aligned} \omega_i^{(1)}(\bar{x}) &= -\int_V C_{ijkl}'(\bar{x}) u_{k,l}^0(\bar{x}) \nu_{ir,j}(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{\xi}), \\ \omega_i^{(m)}(\bar{x}) &= -\int_V C_{ijkl}'(\bar{x}) \omega_{k,l}^{(m-1)}(\bar{x}) \nu_{ir,j}(\bar{x}, \bar{\xi}) dV(\bar{\xi}), m \geq 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где V – область неоднородности. В результате рекуррентная последовательность (8) позволяет найти компоненты вектора перемещений $\bar{\omega}(\bar{x})$ для конкретных граничных условий, формы и степени неоднородности.

2. Шаровая неоднородность в упругом полупространстве в поле силы тяжести

Для задач расчетов предвестниковых изменений геофизических полей различной природы при подготовке тектонического корового землетрясения наибольший интерес представляет дальняя зона возмущений НДС геосреды (расстояние от неоднородности превосходит несколько ее радиусов), в этом случае форма неоднородности слабо влияет на характер возмущений. В связи с этим далее будем рассматривать случай шаровой неоднородности упругих свойств. Из полевых наблюдений за вариациями отношения скоростей продольных и поперечных волн известно, что вариация модулей упругости в районе формирования очага землетрясения не превосходит 20 %, поэтому для нахождения решения задачи (5) ограничимся первым приближением в рекуррентной последовательности (8).

Первое приближение для случая однородного изотропного полупространства с неоднородностью согласно (8) имеет вид

$$\omega_i(\bar{x}) = -q \int_V C_{ijkl}'(\bar{x}) u_{k,l}^0(\bar{x}) \frac{\partial m_{ir}(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} dV(\bar{\xi}), \quad (9)$$

где \tilde{m} – тензор Миндлина, являющийся функцией Грина для однородного изотропного полупространства [25, 26]. В свою очередь, компоненты тензора Миндлина задаются соотношениями

$$\begin{aligned} m_{ir} &= A[4(1-\nu)n\delta_{ir} - b_{,ir}] + A[4(1-\nu)nn\delta_{ir} + 2z^2nn_{,ir} - (3-4\nu)bb_{,ir} - 2zbb_{,ir3} - \\ &- 4(1-\nu)(1-2\nu)lm_{,ir}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{3r} &= A[-b_{,r3}] + A[-4z(1-2\nu)nn_{,r} + 2z^2nn_{,r3} + (3-4\nu)bb_{,r3} - 2zbb_{,r33} + \\
 &+ 4(1-\nu)(1-2\nu)ll_{,r}], \\
 m_{i3} &= A[-b_{,i3}] + A[-8z(1-\nu)nn_{,i} - 2z^2nn_{,i3} + (3-4\nu)bb_{,i3} + 2zbb_{,i33} - \\
 &- 4(1-\nu)(1-2\nu)ll_{,i}], \\
 m_{33} &= A[4(1-\nu)n - b_{,33}] + A[8(1-\nu)^2nn - 4znn_{,3} - 2z^2nn_{,33} - (3-4\nu)bb_{,33} + \\
 &+ 2zbb_{,333}], \quad i, r = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $A = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}$; μ – модуль сдвига среды; ν – коэффициент Пуассона среды. Вспомогательные функции задаются соотношениями

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{1}{r_1}, \quad b = r_1, \quad nn = \frac{1}{r_2}, \quad bb = r_2, \\
 ll &= \ln(r_2 + z + \xi_3), \quad lm = (z + \xi_3)ll - bb, \\
 r_1 &= \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}, \\
 r_2 &= \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z + \xi_3)^2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Предположим, что модули упругости внутри неоднородности одинаковы для всех точек объема, т.е. $C'_{ijkl} = \text{const}$, тогда соотношение (9) может быть записано как

$$\omega_i(\bar{x}) = -qC'_{ijkl} \int_V u_{k,l}^0(\bar{x}) \frac{\partial m_{ir}(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} dV(\bar{\xi}). \tag{12}$$

Случай, когда на полупространство действует только сила тяжести, может быть сведен к случаю однородного напряженно-деформированного состояния невозмущенного полупространства (согласно [26]) соответствующим заданием граничных условий. Тогда соотношение (12) примет вид

$$\omega_i(\bar{x}) = -qC'_{ijkl} u_{k,l}^0 \int_V \frac{\partial m_{ir}(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} dV(\bar{\xi}) = -qC'_{ijkl} u_{k,l}^0 M_{ir,j}(\bar{x}), \tag{13}$$

где

$$M_{ir,j}(\bar{x}) = \int_V \frac{\partial m_{ir}(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} dV(\bar{\xi}). \tag{14}$$

При интегрировании компонент тензора Миндлина решение задачи (13) будет содержать линейные комбинации потенциалов (гармонического N и бигармонического B) и квазипотенциалов (бигармонического BB , гармонического NN , логарифмического Ll , смешанного Lm) однородных тел, свойства которых в настоящее время хорошо изучены. Свойства, использованные для решения настоящей задачи, представлены в [32–33]. Для этих потенциалов и квазипотенциалов выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
 \Delta B &= 2N, \quad \Delta BB = 2NN, \quad \Delta N_e = \Delta NN = \Delta Ll = \Delta Lm = 0, \\
 Lm_{,33} &= Ll_{,3} = NN,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 B &= \int_V b dV = \int_V \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2} dV, \\
 N &= \int_V n dV = \int_V \frac{dV}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}}, \\
 BB &= \int_V b b dV = \int_V \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z + \xi_3)^2} dV, \\
 NN &= \int_V n n dV = \int_V \frac{dV}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z + \xi_3)^2}}, \\
 Ll &= \int_V l l dV = \int_V \ln \left(\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z + \xi_3)^2} + z + \xi_3 \right) dV, \\
 Lm &= \int_V l m dV = \int_V \left((z + \xi_3) l l - \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z + \xi_3)^2} \right) dV.
 \end{aligned}$$

Для случая полупространства введенные потенциалы по отношению к неоднородности могут быть внешними (индекс «e») и внутренними (индекс «i»), тогда как квазипотенциалы могут быть только внешними.

Далее рассмотрим случай однородной и изотропной неоднородности, свойства в которой отличаются от свойств окружающего пространства только модулем сдвига. Физические предпосылки такого предположения описаны в [20]. Тогда приращение модулей упругости в неоднородности можно записать в виде

$$qC'_{ijkl} = -\frac{2}{3} \alpha \mu \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \mu (\delta_{rk} \delta_{jl} + \delta_{rl} \delta_{jk}), \quad (16)$$

где μ – модуль сдвига окружающей неоднородность среды; α – степень отличия модуля сдвига μ' неоднородности $\left(\alpha = \frac{\mu'}{\mu} - 1 \right)$. Раскроем соотношение (13) с учетом (16) и запишем его в напряжениях, учтя, что на дневной поверхности касательные напряжения $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ равны нулю ($\sigma_{12} = 0$ во всей области V в силу осевой симметрии задачи):

$$\begin{aligned}
 \omega_i(\bar{x}) &= \frac{\alpha}{3} \left[M_{i1,1}(\bar{x}) (-2\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0) + \right. \\
 &\left. + M_{i2,2}(\bar{x}) (\sigma_{11}^0 - 2\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0) + M_{i3,3}(\bar{x}) (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 - 2\sigma_{33}^0) \right]. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Вычисление компонент вектора перемещений с использованием соотношения (17) требует конкретизации граничных условий на границах полупространства. В случае действия на полупространство только сил тяжести компоненты тензора $\tilde{\sigma}^0$ равны $\sigma_{zz} = \rho g z$ и $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1-\nu} \rho g z$ (g – ускорение свободного падения, ν – коэффициент Пуассона). Видно, что для дневной поверхности автоматически выполняется условие отсутствия напряжений.

Раскроем выражение (17) с учетом правила дифференцирования потенциалов и квазипотенциалов (27) и соотношений (15). В результате перемещения определяются формулами

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -Qz(3B_{xxx} - 2(1-2\nu)N_x) - 2Qz^3NN_{xxx} + 2Qz^2(BB_{xxx} - 2(5-4\nu)NN_{xz}) + \\ &+ Qz((7-4\nu)BB_{xxx} - 2(11-18\nu+8\nu^2)NN_x + 4(1-\nu)(1-2\nu)(Lm_{xxx} + Lm_{xyy})), \\ \omega_2 &= -Qz(3B_{yyy} - 2(1-2\nu)N_y) - 2Qz^3NN_{yyy} + 2Qz^2(BB_{yyy} - 2(5-4\nu)NN_{yz}) + \\ &+ Qz((7-4\nu)BB_{yyy} - 2(11-18\nu+8\nu^2)NN_y + 4(1-\nu)(1-2\nu)(Lm_{xyy} + Lm_{yyy})), \\ \omega_3 &= -Qz(3B_{zzz} + 2(5-4\nu)N_z) - 2Qz^3NN_{zzz} + 2Qz^2(BB_{zzz} - 4(\nu(NN_{11} + NN_{22}) + 2NN_{33})) + \\ &+ Qz((1+4\nu)BB_{zzz} - 2(3+12\nu-8\nu^2)NN_z - 4(1-\nu)(1-2\nu)(Lm_{xx} + Lm_{yy})), \end{aligned} \quad (18)$$

где $Q = \frac{1}{3} \alpha \rho g z A$. Дифференцирование соотношений (18) по соответствующим координатам позволяет найти все компоненты тензора деформаций. В задачах расчета гидрогеологических и электрокинетических предвестников землетрясений определяющим фактором является изменение объемной деформации среды, влияющее на интенсивность и направление фильтрационных процессов. После дифференцирования и сложения соответствующих компонент объемная деформация геосреды с неоднородностью упругих свойств может быть найдена как

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} &= Q(-3B_{zzz} + 2(5-4\nu)N_z - 2(1-2\nu)z(N_{xx} + N_{yy} - 2N_{zz})) + \\ &+ Q\left(2z^2(1-4\nu)NN_{zzz} + z(-(2-8\nu)BB_{zzz} + 2(7-38\nu+24\nu^2)NN_{zz}) + (1+4\nu)BB_{zzz} + \right. \\ &\left. + 6(1-6\nu+4\nu^2)NN_z\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Преимуществом используемого подхода является запись итогового решения через объемные потенциалы и квазипотенциалы однородных тел. Использование соответствующих потенциалов для конкретной формы неоднородности позволяет сразу найти итоговое решение задачи о возмущении НДС упругого полупространства этой неоднородностью.

В случае шаровой неоднородности, центр которой располагается в начале координат, потенциалы и квазипотенциалы определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} B_e = BB_e &= V\left(r^* + \frac{R^2}{5r^*}\right), \quad B_i = V\frac{15R^4 + 10R^2r^{*2} - r^{*4}}{20R^3}, \quad N_e = NN_e = \frac{V}{r^*}, \\ N_i &= \frac{V}{2R}\left(3 - \frac{r^{*2}}{R^2}\right), \quad Ll_e = V\ln(r^* + z), \quad Lm_e = V(z\ln(r^* + z) - r^*), \end{aligned} \quad (20)$$

где $r^* = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем неоднородности; R – радиус неоднородности.

Подставляя (20) в (19) с учетом правила переноса потенциалов и квазипотенциалов (26), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Q_1 \left[\frac{8(4-5\nu)(H+z)}{15R^3} \right]_i + Q_1 \left[\frac{3R^2(H+z)^3}{r_1^7} - \frac{(1-8\nu)(H+z)}{3r_1^3} - \frac{3H(5H+3R^2)}{5r_1^5} + \right. \\ &\left. + \frac{(9R^2 + 5H^2(5+8\nu) + 10(1-2\nu)(x^2 + y^2))z + 5H(1+16\nu)z^2 - 5(1-8\nu)z^3}{5r_1^5} \right]_e + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + Q_1 \left(-\frac{14R^2(1-4\nu)(H-z)^4 z}{r_2^9} + \frac{3H(1+2(1-2\nu)^2) + (3-4(5-9\nu)(1-2\nu))z}{3r_2^3} + \right. \\
 & + \frac{(H-z)^2 (HR^2(1+4\nu) + (R^2(11-52\nu) + 10H^2(1-4\nu))z - 10H(1-4\nu)z^2)}{3r_2^7} + \\
 & \left. \frac{H(5H^2 + 3R^2)(1+4\nu) + (-20H^2 + (3R^2 - 5H^2(1-4\nu))(1-12\nu))z +}{5r_2^5} \right. \\
 & \left. + \frac{(5H + 20H(3-8\nu)(1-3\nu))z^2 - 15(1-4\nu)(3-4\nu)z^3}{5r_2^5} \right), \tag{21}
 \end{aligned}$$

где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+H)^2}$, $r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (H-z)^2}$, $Q_1 = \frac{\alpha R^3 g \rho}{12\mu(1-\nu)}$, выражения с индексом «i» имеют место только внутри неоднородности, а с индексом «e» только вне неоднородности.

Для графического представления полученного решения воспользуемся параметрами сейсмического события и свойствами земной коры, указанными в [20] и [27, 28]. Сейсмическое событие магнитудой 5,2 произошло в октябре 2009 г. в районе Петропавловск-Камчатского геодинамического полигона, глубина залегания гипоцентра 10 км, радиус неоднородности, оцененный по магнитуде согласно [29], составил 2862 м. Принятые для расчетов свойства среды: плотность 2500 кг/м³, коэффициент Пуассона 0,25, модуль сдвига 20 ГПа, степень неоднородности $\alpha = 0,2$.

На рис. 1 представлены изоповерхности объемной деформации для величин $\pm 10^{-5}$, $\pm 2 \cdot 10^{-6}$, $\pm 5 \cdot 10^{-7}$ и $\pm 10^{-7}$. Положительная величина объемной деформации отражает режим относительного сжатия, тогда как отрицательная – режим относительного растяжения.

Таким образом, из полученного решения видно, что распределение объемной деформации является осесимметричным относительно оси z (ввиду осевой симметрии задачи). Симметрия решения относительно плоскости xOy, проходящей через центр неоднородности, отсутствует, что вызвано дневной поверхностью, свободной от напряжений. Вокруг шаровой неоднородности упругих свойств в изотропном упругом полупространстве формируются зона относительного сжатия (обозначена темно-серым цветом на рисунке), расположенная вокруг неоднородности, и зоны относительного растяжения (светло-серый цвет), расположенные над и под неоднородностью. Отличительной особенностью зон относительного растяжения является их предельный размер, тогда как размер зоны относительного сжатия растет при уменьшении величины объемной деформации. Наличие зоны относительного растяжения над гипоцентром сейсмического события было предсказано ранее в работе [30].

Необходимо отметить, что размеры возмущения НДС упругого полупространства шаровой неоднородностью упругих свойств, совпадающие с размерами области подготовки землетрясения или зоной проявления предвестников (которые согласно [18] определяются деформацией $\pm 10^{-8}$), в случае действия только гравитационных сил достигают 190 км. Этот факт позволяет уже утверждать, что вклад гравитационных сил в общее возмущения НДС не является пренебрежительно малым.

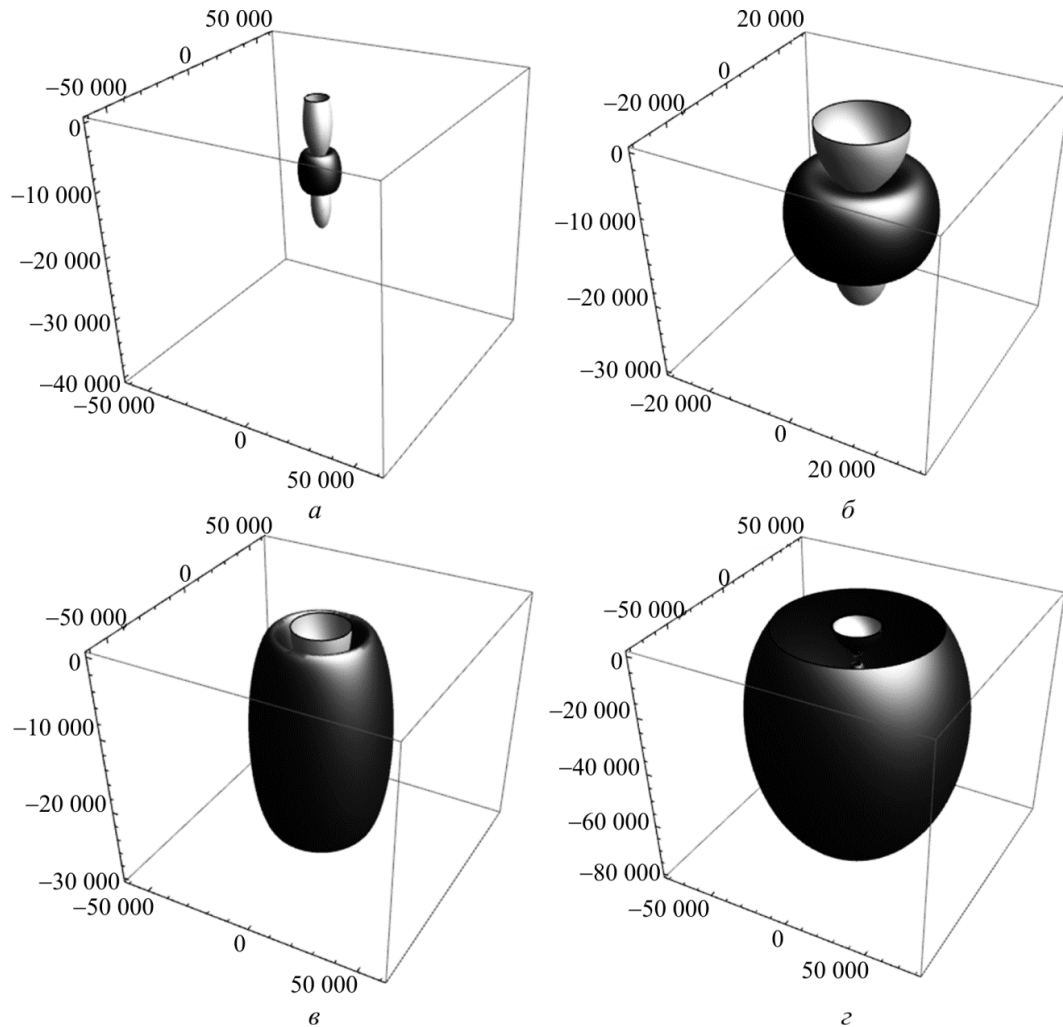


Рис. 1. Исоповерхности объемной деформации, вычисленной согласно (21), для величин деформации $\pm 10^{-5}$ (а); $\pm 2 \cdot 10^{-6}$ (б); $\pm 5 \cdot 10^{-7}$ (в); $\pm 10^{-7}$ (г) (положительная деформация (относительное сжатие) – тёмно-серый цвет, отрицательная деформация (относительное растяжение) – светло-серый цвет)

Fig. 1. The isosurfaces of volumetric deformation, calculated according to (21), for the strain values $\pm 10^{-5}$ (a); $\pm 2 \cdot 10^{-6}$ (b); $\pm 5 \cdot 10^{-7}$ (c); $\pm 10^{-7}$ (d) (positive deformation (relative compression) – is shown in a dark gray color; negative deformation (relative tension) is shown in a light gray color)

Полученное решение (18) для случая отличных от нуля осевых компонент тензора $\tilde{\varepsilon}^0$ является частным случаем решения $\omega_i(\bar{x}) = I_{imn}(\bar{x}) \varepsilon_{mn}^0$ задачи об упругом полупространстве с шаровой неоднородностью, полученным ранее в работе [20], здесь $I_{imn}(\bar{x})$ – тензорное поле, представляющее собой произведение вариаций упругих свойств в полупространстве с неоднородностью и частных производных по пространственным координатам ее функций Грина.

3. Шаровая неоднородность в упругом полупространстве при сдвиге в горизонтальной плоскости с учетом силы тяжести

В случае действия на полупространство, помимо гравитационных сил, сил тектонической природы, вызванных движением и взаимодействием плит, решение задачи (13) сводится к дополнительному учету граничных условий для горизонтальных напряжений

на бесконечности. Рассмотрим случай сдвига в горизонтальной плоскости, который для задач геодинамики и тектонофизики является широко распространенным. В случае сдвига в горизонтальной плоскости граничные условия могут быть записаны как

$$\sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = \tau, \tag{22}$$

где τ – касательные напряжения на бесконечности. Тогда из соотношения (13) получаем

$$\begin{aligned} \omega_i(\bar{x}) = & \frac{\alpha}{3} \left[M_{i1,1}(\bar{x})(-2\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0) + M_{i2,2}(\bar{x})(\sigma_{11}^0 - 2\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0) + \right. \\ & \left. + M_{i3,3}(\bar{x})(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 - 2\sigma_{33}^0) \right] - \alpha \sigma_{12}^0(\bar{x})(M_{i1,2} + M_{i2,1}). \end{aligned} \tag{23}$$

Видно, что решение в этом случае складывается из двух решений: отдельно для гравитационных сил (первое слагаемое) и касательных напряжений (второе слагаемое). Решение для случая сдвига в горизонтальной плоскости было рассмотрено ранее в работах [18, 20]. Согласно этому решению выражение для объемной деформации имеет вид

$$\varepsilon_\tau = 2(1-2\nu)Gxy \left(\left[\frac{1}{r_1^5} \right]_e + \frac{(3-4\nu)}{r_2^5} - \frac{10H(H-z)}{r_2^7} + 2R^2 \left(\frac{7(H-z)^2}{r_2^9} - \frac{1}{r_2^7} \right) \right), \tag{24}$$

где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+H)^2}$, $r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (H-z)^2}$, $G = \frac{\alpha\tau R^3}{2\mu(1-\nu)}$, как и ранее, выражение

с индексом «e» имеет место только вне неоднородности. Таким образом, решение задачи о возмущении напряженно-деформированного состояния упругого полупространства шаровой неоднородностью упругих свойств при сдвиге в горизонтальной плоскости с учетом сил тяжести задается суммой решений (21) и (24).

Для оценки вклада гравитационных сил в общее возмущение НДС при сдвиге в горизонтальной плоскости на рис. 2 представлены изоповерхности объемной деформации в случае учета и неучета гравитации.

В случае только сдвига в горизонтальной плоскости видно, что решение симметрично относительно двух биссекторных плоскостей октантов 5–7 и октантов 6–8. При этом между этими плоскостями решение в соседних октантах отличается только знаком. При добавлении в решении слагаемого, связанного с гравитационными силами, симметрия не нарушается, но нарушается равенство по модулю объемных деформаций в соседних октантах. Особенно необходимо подчеркнуть, что размеры и геометрия изоповерхностей объемной деформации при учете сил тяжести существенно меняется. В зависимости от направления оси максимального растяжения полупространства с неоднородностью происходит увеличение размеров зон относительного сжатия и соответствующее уменьшение размеров зон относительного растяжения с изменением формы обеих.

Полученное решение для случая сдвига в горизонтальной плоскости с учетом гравитационных сил показало, что гипотеза о пренебрежении силами тяжести при прямом моделировании предвестниковых возмущений, когда зона формирующегося очага землетрясения представляется в виде неоднородности упругих свойств, несостоятельна.

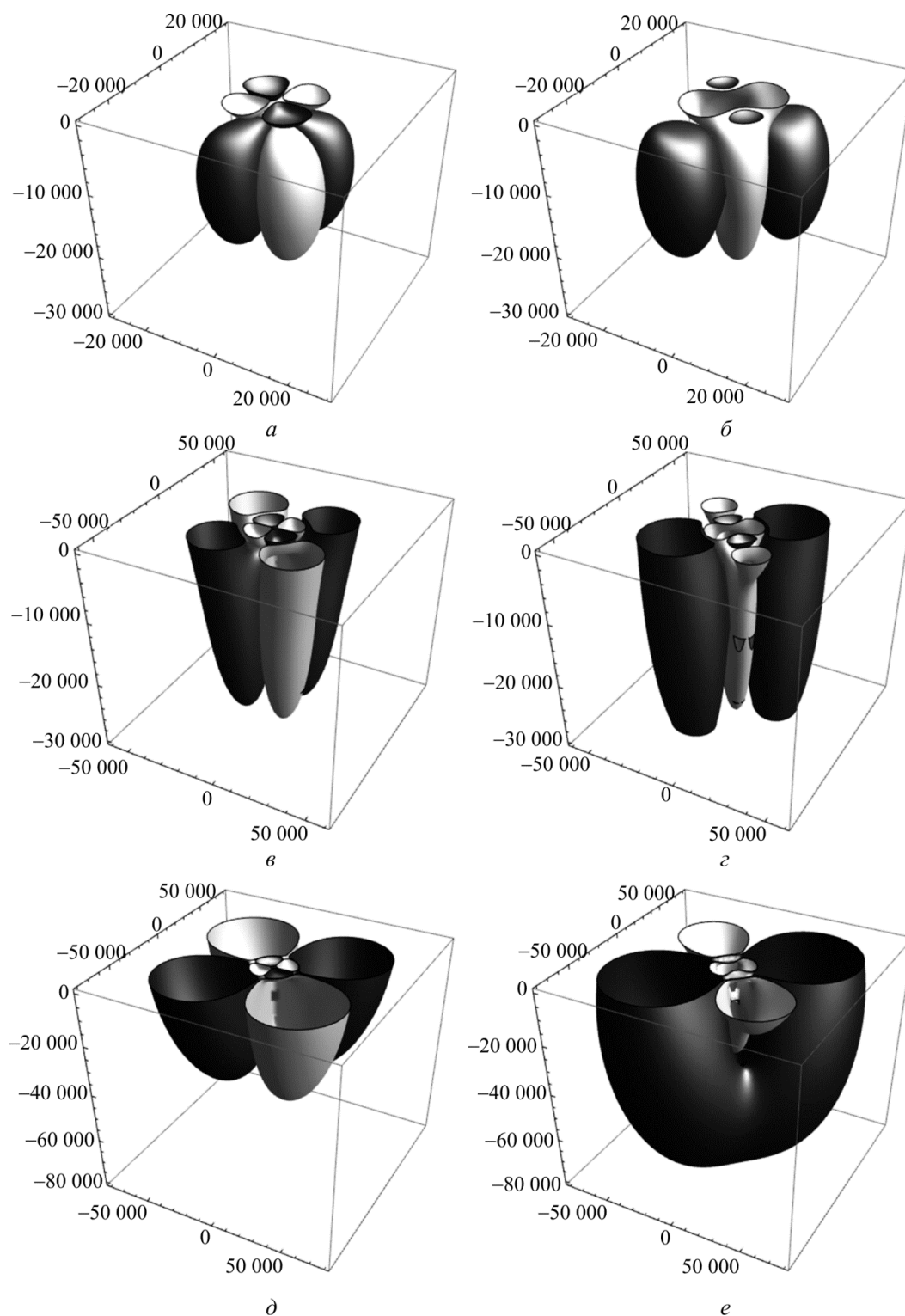


Рис. 2. Изоповерхности объемной деформации для величин деформации $\pm 2 \cdot 10^{-6}$ (а-б); $\pm 5 \cdot 10^{-7}$ (в-г); $\pm 10^{-7}$ (д-е) при чистом сдвиге (а, в, д) и чистом сдвиге с учетом гравитационных сил (б, г, е) (положительная деформация (относительное сжатие) – темно-серый цвет, отрицательная деформация (относительное растяжение) – светло-серый цвет)

Fig. 2. Surface deformation isosurfaces for strain values $\pm 2 \cdot 10^{-6}$ (a-b); $\pm 5 \cdot 10^{-7}$ (c-d); $\pm 10^{-7}$ (e-f) under pure shear (a, c, e) and pure shear with the allowance for gravitational forces (b, d, f) (positive deformation (relative compression) is shown in a dark gray color, negative deformation (relative tension) is shown in a light gray color)

Выводы

В работе рассмотрена задача о возмущении напряженно-деформированного состояния упругого полупространства шаровой неоднородностью упругих свойств при сдвиге в горизонтальной плоскости с учетом вклада в решение гравитационных сил. Получено аналитическое решение для компонент вектора перемещений отдельно для случая действия на полупространство только сил тяжести и для случая сдвига в горизонтальной плоскости с учетом сил тяжести. На основе этих решений получены выражения для нахождения объемной деформации полупространства в обоих случаях (соотношения (21) и сумма (21) и (24)). Показано, что в случае действия только сил тяжести объемная деформация среды имеет осевую симметрию (ось симметрии z) и разделяется на зону относительного сжатия и зоны относительного растяжения. Последние имеют предельные размеры и не увеличиваются при уменьшении величины объемной деформации.

Для задачи сдвига в горизонтальной плоскости с учетом действия сил гравитации показано, что исходная симметрия распределения объемной деформации при сдвиге в горизонтальной плоскости в случае учета сил тяжести не меняется, существенно меняется форма и размеры зоны относительного сжатия/растяжения в зависимости от направления оси максимального растяжения.

Полученные результаты указывают на то, что при моделировании предвестниковых возмущений полей различной природы, когда зона формирующегося очага землетрясения представляется в виде неоднородности упругих свойств, пренебрегать действием гравитационных сил нельзя ввиду их существенного влияния на размер и форму возмущения НДС среды.

Благодарности

Работы выполнены при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-2682.2017.5), часть результатов получена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 15-05-08790-а).

Acknowledgments

The work has been carried out with the financial support of the President of the Russian Federation for the State Support of Young Russian Scientists - PhDs (МК-2682.2017.5), a part of the results is obtained with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (Grant of RFBR 15-05-08790-a).

Библиографический список

1. Eshelby J.D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems // Proc. R. Soc. London. – 1957. – A241. – P. 376–396.
2. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: Иностран. лит., 1963. – 248 с.
3. Tsuchida E., Mura T. The Stress Field in an Elastic Half Space Having a Spheroidal Inhomogeneity Under All-Around Tension Parallel to the Plane Boundary // J. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50. – No. 4a. – P. 807–816.
4. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физическая мезомеханика. – 2010. – Т. 13, № 5. – С. 127–138.

5. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. Интегральные уравнения задачи об упругом включении. Полное аналитическое решение задачи об эллиптическом включении // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 50–76.
6. Chang-Hung Kuo. Stress disturbances caused by the inhomogeneity in an elastic half-space subjected to contact loading // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44 – No. 3–4. – P. 860–873.
7. Eshelby problem of an arbitrary polygonal inclusion in anisotropic piezoelectric media with quadratic eigenstrains / Y. M. Yue, K. Y. Xu, Q. D. Chen, E. Pan // Acta Mechanica. – 2015. – Vol. 226. – No. 7. – P. 2365–2378.
8. Withers P.J. The Deformation of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion in Transversely Isotropic Medium, and Its Relevance to Composite Materials // Philosophical Magazine. – 1989. – A59. – P. 759–781.
9. Jiang Dazhi. Viscous inclusions in anisotropic materials: Theoretical development and perspective applications // Tectonophysics. – 2016. – Vol. 693. – P. 116–142.
10. Семенова Д.В., Устинов К.Б. Некоторые асимптотические разложения компонент тензора Эшелби в случае кубической и гексагональной анизотропии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2010. – № 4. – С. 80–100.
11. Березкин В.А. О построении тензора Эшелби для слабоанизотропной упругой среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. – 2011. – № 1. – С. 73–76.
12. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. Theoretical analysis of the spatio-temporal evolution of the bulk-strain field based on a rheologic inclusion model // Acta Seismologica Sinica. – 2000. – Vol. 13. – No. 5. – P. 525–535.
13. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. 3-D rheologic model of earthquake preparation (I) – Displacement field // Acta Seismologica Sinica. – 2003. – Vol. 16. – No. 6. – P. 588–597.
14. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. 3-D rheologic model of earthquake preparation (II): Strain field and its applications // Acta Seismologica Sinica. – 2004. – Vol. 17. – No. 2. – P. 131–143.
15. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. 3-D rheologic model of earthquake preparation (III): Precursor field // Acta Seismologica Sinica. – 2006. – Vol. 19. – No. 1. – P. 20–29.
16. The Displacement and Strain Field of Three-dimensional Rheologic Model of Earthquake Preparation / Zhiping Song, Xiangchu Yin, Shirong Mei, Yucang Wang, Can Yin, Huihui Zhang, Langping Zhang // Pure and Applied geophysics. – 2006. – Vol. 163. – No. 9. – P. 1991–2009.
17. Цвелодуб И.Ю. О тензоре Эшелби // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74, № 2. – С. 346–351.
18. Добровольский И.П. Распределение деформаций и напряжений при подготовке тектонического землетрясения // Физика Земли. – 2003. – № 10. – С. 37–40.
19. Добровольский И.П. Гидродинамические явления // Физика Земли. – 2005. – № 1. – С. 89–96.
20. Добровольский И.П. Математическая теория подготовки и прогноза тектонического землетрясения. – М.: Физматлит, 2009. – 240 с.
21. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск.: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
22. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
23. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1976. – 399 с.
24. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
25. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
26. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
27. Panteleev I.A., Gavrilov V.A. Implications of electrokinetic processes for the intensity of geoaoustic emission in the time vicinity of a tectonic earthquake: a theoretical study // Russian Journal of Earth Sciences. – 2015. – Vol. 15. – No. 4. – С. 1a–14.

28. Пантелеев И.А., Полтавцева Е.В., Гаврилов В.А. Изменение НДС в районе измерительной скважины Г-1 на Камчатском геодинамическом полигоне при подготовке близких сильных землетрясений по данным скважинных измерений: численное моделирование // Проблемы геодинамики и геоэкологии внутриконтинентальных орогенов: тез. докл. VII Междунар. симпозиума. К 80-летию со дня рождения выдающегося ученого, основателя и первого директора ИС РАН Ю.А. Трапезникова (18.10.1936 – 13.04.1999). – Бишкек, 2017. – С. 257.

29. Ризниченко Ю.В. Размеры очага корового землетрясения и сейсмический момент // Исследования по физике очага землетрясения. – М.: Наука, 1976. – С. 9–18.

30. Алексеев А.С., Белоносов А.С., Петренко В.Е. О концепции многодисциплинарного прогноза землетрясений с использованием интегрального предвестника // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности: сб. науч. тр. ГЕОС. Вычислительная сейсмология. – 2001. – Вып. 32. – С. 81–97.

31. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. – М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. – 318 с.

32. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953. – 406 с.

33. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматлит, 1963. – 472 с.

References

1. Eshelby J.D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proc. R. Soc. London*, 1957, A241, pp. 376-396.

2. Eshelby J. Kontinual'naiia teoriia dislokatsii [Continuum theory of dislocations]. *Moscow, Inostr. Lit.*, 1963, 248 p.

3. E. Tsuchida, T. Mura The Stress Field in an Elastic Half Space Having a Spheroidal Inhomogeneity Under All-Around Tension Parallel to the Plane Boundary. *J. Appl. Mech.*, 1983, vol. 50, no. 4a, pp. 807-816.

4. R. Goldstein, V. Gorodtsov, K. Ustinov Effect of residual surface stress and surface elasticity on deformation of nanometer spherical inclusions in an elastic matrix. *Physical Mesomechanics*, 2010, vol. 13, no. 5, pp. 318-328.

5. R. Goldstein, E. Shifrin Integral equations of the problem of an elastic inclusion. Complete analytical solution of the problem of an elliptic inclusion. *Mechanics of solids*, 2004, vol.39, no. 1, pp. 36-55.

6. Chang-Hung Kuo Stress disturbances caused by the inhomogeneity in an elastic half-space subjected to contact loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, no. 3-4, pp. 860-873.

7. Yue Y.M., Xu K.Y., Chen Q.D., Pan E. Eshelby problem of an arbitrary polygonal inclusion in anisotropic piezoelectric media with quadratic eigenstrains. *Acta Mechanica*, 2015, vol. 226, no. 7, pp. 2365-2378.

8. Withers P.J. The Deformation of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion in Transversely Isotropic Medium, and Its Relevance to Composite Materials. *Philosophical Magazine*, 1989, A59, pp. 759-781.

9. Jiang Dazhi. Viscous inclusions in anisotropic materials: Theoretical development and perspective applications. *Tectonophysics*, 2016, vol. 693, pp. 116-142.

10. Semenova D., Ustinov K. Some asymptotic expansions of the components of the Eshelby tensor in the case of cubic and hexagonal anisotropy. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no.4, pp. 80-100.

11. Berezkin B.A. Eshelby tensor construction for a weakly anisotropic elastic medium. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2011, vol. 66(1), pp 22–24.

12. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. Theoretical analysis of the spatio-temporal evolution of the bulk-strain field based on a rheologic inclusion model. *Acta Seismologica Sinica*, 2000, vol. 13, no. 5, pp. 525-535.

13. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. 3-D rheologic model of earthquake preparation (I) – Displacement field. *Acta Seismologica Sinica*, 2003, vol. 16, no. 6, pp. 588-597.

14. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. 3-D rheologic model of earthquake preparation (II): Strain field and its applications. *Acta Seismologica Sinica*, 2004, vol. 17, no. 2, pp. 131-143.

15. Song Zhi-ping, Yin Xiang-chu, Mei Shi-rong. 3-D rheologic model of earthquake preparation (III): Precursor field. *Acta Seismologica Sinica*, 2006, vol. 19, no. 1, pp. 20-29.

16. Zhiping Song, Xiangchu Yin, Shirong Mei, Yucang Wang, Can Yin, Huihui Zhang, Langping Zhang. The Displacement and Strain Field of Three-dimensional Rheologic Model of Earthquake Preparation. *Pure and Applied geophysics*, 2006, vol. 163, no. 9, pp. 1991-2009.

17. Tselodub I.Yu. The Eshelby tensor. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74(2), pp. 249-252.
18. Dobrovolsky I.P. Strain and Stress Distribution Associated with the Preparation of a Tectonic Earthquake. *Izvestiya, Phys. Solid Earth*, 2003, vol.39, pp. 812-819.
19. Dobrovolsky I.P. Hydrodynamic phenomena. *Izvestiya, Phys. Solid Earth*, 2005, vol.41, pp. 86-93.
20. Dobrovolsky I.P. Matematicheskaya teoriya podgotovki i prognoza tektonicheskogo zemletriaseniia [Mathematical theory of preparation and forecast of a tectonic earthquake]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2009, 240 p.
21. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statisticheskaya mehanika kompozitnykh materialov [Statistical Mechanics of Composite Materials], *Minsk*, 1978, 208 p.
22. Khoroshun L.P., Maslov B.P., Leshchenko P.V. Prognozirovaniye jeffektivnykh svoystv p'ezoaktivnykh kompozitnykh materialov [Prediction of effective properties of piezoactive composite materials]. *Kiev, Nauk. Dumka*, 1989, 208 p.
23. Shermorgor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of the elasticity of micron-homogeneous media]. *Moscow, Nauka*, 1976, 208 p.
24. Lomakin V.A. Statisticheskie zadachi mehaniki tverdykh deformiruemykh tel [Statistical problems of the mechanics of solid deformable bodies]. *Moscow, Nauka*, 1970, 139 p.
25. Lurie A.I. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1970, 940 p.
26. Novatskii V. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Mir*, 1975, 872 p.
27. Panteleev I.A., Gavrilov V.A. Implications of electrokinetic processes for the intensity of geoaoustic emission in the time vicinity of a tectonic earthquake: a theoretical study. *Russian Journal of Earth Sciences*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 1a-14.
28. Panteleev I.A., Poltavceva E.V., Gavrilov V.A. Izmeneniye NDS v raione izmeritel'noi skvazhiny G-1 na Kamchatskom geodinamicheskom poligone pri podgotovke blizkikh sil'nykh zemletriasenii po dannym skvazhinnykh izmerenii: chislennoe modelirovaniye [Change in the stress-strain state in the vicinity of the measuring well G-1 at the Kamchatka geodynamic range in the preparation of close strong earthquakes according to the borehole measurements: numerical simulation]. *Bishkek, Problems of geodynamics and geocology of intracontinental orogens: Abstracts of the VII International Symposium. On the occasion of the 80th birthday of the outstanding scientist, founder and first director of the National Academy of Sciences of the Russian Academy of Sciences Yu.A. Trapeznikova (18.10.1936 – 13.04.1999)*, 2017, p. 257.
29. Riznichenko Yu.V. Razmery ochaga korovogo zemletriaseniia i seismicheskii moment [Dimensions of the core earthquake and seismic moment]. *Moscow, Nauka, Issledovaniya po fizike ochaga zemletriaseniia*, 1976, pp. 9-18.
30. Alekseev A.S., Belonosov A.S., Petrenko V.E. O kontseptsii mnogodistsiplinarnogo prognoza zemletriaseniia s ispol'zovaniem integral'nogo predvestnika [On the concept of a multidisciplinary forecast of earthquakes using an integral precursor]. *Vychislitel'naya seismologiya*, 2001, vol. 32, pp. 81-97.
31. Sretensky L.N. Teoriya n'utonovskogo potentsiala [The Newtonian potential theory]. *Moscow, OGIZ-Gostekhizdat*, 1946, 318 p.
32. Guenther N.M. Teoriya potentsiala i ee primeneniye k osnovnym zadacham matematicheskoi fiziki [Potential theory and its application to the basic problems of mathematical physics]. *Moscow, Gostekhizdat*, 1953, 406 p.
33. Kupradze V.D. Metody potentsiala v teorii uprugosti [Methods of potential in the theory of elasticity]. *Moscow, FIZMATLIT*, 1963, 472 p.