

Сапожников С.Б., Иванов М.А., Ярославцев С.И., Щербаков И.А. Напряженно-деформированное состояние и разрушение элементов конструкций с острыми концентраторами напряжений при изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 4. – С. 40–55. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.04

Sapozhnikov S.B., Ivanov M.A., Yaroslavtsev S.I., Shcherbakov I.A. The Stress-Strain State and Failure of Structural Elements with Sharp Stress Concentrators under Bending. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 40-55. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.04



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.4.04

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ОСТРЫМИ КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

С.Б. Сапожников, М.А. Иванов, С.И. Ярославцев, И.А. Щербаков

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 16 августа 2017 г.

Принята: 9 ноября 2017 г.

Опубликована: 29 декабря 2017 г.

Ключевые слова:

острый v-образный вырез, изгиб, хрупкое разрушение, полиметилметакрилат, коэффициент интенсивности напряжений, сингулярность, нелокальная теория прочности

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрены два подхода к оценке прочности элементов конструкций из хрупкого материала с острыми концентраторами напряжений при трёхточечном изгибе: с использованием нелокальной теории прочности (в вершине острого надреза напряжения усредняются на некоторой базе) и линейной механики разрушения (определяются коэффициенты интенсивности напряжений и степени сингулярности). Широко использован метод конечных элементов (пакет ANSYS Workbench, 2D-постановка). Эти два подхода оказываются связанными анализом напряженного состояния у острых v-образных надрезов с соответствующими аппроксимациями поля напряжений, позволившими на основе оптимизационных процедур найти корректные значения коэффициентов интенсивности напряжений и степеней сингулярности. Проведены экспериментальные исследования прочности призматических образцов из органического стекла (ПММА) с v-образными концентраторами (двугранные углы 25, 90 и 120°) различной глубины при статическом трёхточечном изгибе. В конечно-элементных расчетах с использованием нелокального критерия прочности получено, что острый надрез с двугранным углом до 90° ведет к увеличению нагрузки разрушения лишь на 15–20 % по сравнению с трещиноподобным вырезом (угол 25°) и хорошо согласуется с экспериментальными данными. Увеличение двугранного угла острого надреза с 25 до 120° ведет к повышению нагрузок разрушения в 1,5–2 раза. Исследована морфология поверхности разрушения и показано, что неглубокие вырезы (до 1,5 мм) при изгибе имеют бороздчатую поверхность разрушения (высокая скорость и скачкообразная картина движения трещины), тогда как более глубокие вырезы (2,5–5 мм) характеризуются медленным распространением трещины и гладкой поверхностью разрушения. Информация о шаге бороздок оказалась необходимой при назначении размера зоны осреднения напряжений в нелокальном критерии прочности.

© ПНИПУ

© Сапожников Сергей Борисович – доктор технических наук, профессор, e-mail: sapozhnikovsb@susu.ru

Иванов Михаил Александрович – кандидат технических наук, доцент, 76, e-mail: ivanovma@susu.ru

Ярославцев Сергей Иванович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: iaroslavtcevs@susu.ru

Щербаков Игорь Александрович – старший преподаватель, e-mail: shcherbakovia@susu.ru

Sergey B. Sapozhnikov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: sapozhnikovsb@susu.ru

Mikhail A. Ivanov – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: ivanovma@susu.ru

Sergey I. Yaroslavtsev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: iaroslavtcevs@susu.ru

Igor A. Shcherbakov – Senior Lecturer, e-mail: shcherbakovia@susu.ru



THE STRESS-STRAIN STATE AND FAILURE OF STRUCTURAL ELEMENTS WITH SHARP STRESS CONCENTRATORS UNDER BENDING

S.B. Sapozhnikov, M.A. Ivanov, S.I. Yaroslavtsev, I.A. Shcherbakov

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 16 August 2017
Accepted: 9 November 2017
Published: 29 December 2017

Keywords:

a sharp v-shaped notch, bending, brittle fracture, PMMA, stress intensity factor, singularity, non-local theory of strength.

ABSTRACT

The paper considers two approaches to assessing the strength of constructions' elements made of brittle material with sharp stress concentrators under the three-point bending: using a non-local theory of strength (in the top of the sharp notch the stresses are averaged on some basis) and a linear fracture mechanics (the stress intensity factors and the degree of singularity are determined). The finite element method was widely used (ANSYS Workbench, 2D model). These two approaches are connected by the analysis of the stress state at the sharp v-shaped notches with the corresponding approximations of the stress field, which allowed to find the correct values of the stress intensity factors and degrees of singularity on the basis of the optimization procedures. There were conducted the experimental studies of the strength of prismatic samples made of polymethylmethacrylate (PMMA) with a v-shaped notch (the two-edge angles of 25, 90 and 120°) in static three-point bending. In the finite element calculations using a nonlocal strength criterion it is obtained, that a sharp notch with the two-edge angle up to 90° leads to an increase in load of destruction for 15-20 % only compared with the crack-like cut (the angle of 25°) and agrees well with the experimental data. The increase of the two-edge angle of a sharp notch from 25 to 120° leads to increased loads of destruction in 1.5...2 times. There was studied the morphology of fractured surfaces, it is shown that the shallow cuts (up to 1.5 mm) when bending have a grooved fracture surface (a high velocity, periodic picture of cracks' moving), while the deeper cuts (2.5...5 mm) are characterized by a slow crack propagation and a smooth fracture surface. Information about step of grooves was necessary to establish the size of averaging zone in nonlocal failure criterion.

© PNRPU

Введение

Тема расчетной оценки прочности элементов конструкций (в том числе сварных) из малопластичных материалов с острыми концентраторами напряжений сохраняет свою актуальность уже на протяжении многих десятилетий [1–7], поскольку появляются новые высокопрочные материалы, совершенствуются технологии производства и методы расчета, учитывающие все особенности геометрии концентраторов. Для сварных соединений острые концентраторы (непровары, грат, резкие изменения толщины и др.) являются опасными дефектами, учет которых при оценке несущей способности соединений обязателен [8–11].

Традиционные подходы конструкционной прочности основаны на использовании локального условия прочности в виде неравенства

$$\max \sigma < \sigma_B, \quad (1)$$

в котором в левой части стоит максимальное действующее эквивалентное напряжение (или соответствующая деформация для деформационного критерия) в опасной точке, а в правой – предел прочности (или разрушающая деформация, определяемая на стандартных образцах), и применяются в конструкциях, имеющих концентраторы известного и достаточно большого радиуса. Определение «достаточно большой» оценивает многократное превышение величины радиуса над размером элемента структуры материала, определяющего его физическую неоднородность: зерна в металлах, гравий в бетоне, волокна в композитах, глобулы или пачки в полимерах и т.п. Это является следствием допущения об однородности материала в классической механике деформируемого твердого тела [5, 11].

В случае острых концентраторов (с неизвестными малыми или даже нулевыми радиусами в вершине) применение подходов конструкционной прочности невозможно, и здесь включается в работу механика разрушения, оперирующая, в частности, для малопластичных (хрупких) материалов понятием коэффициента интенсивности напряжений в вершине острого концентратора:

$$\max K_1 < K_{1c}, \tag{2}$$

где в левой части – максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений (в вершине) при отрыве, а в правой – его предельное значение, определенное из опытов на образцах с трещинами известной длины. Напряженное состояние вблизи вершины трещины (рис. 1, $r \rightarrow 0$ на продолжении линии трещины) характеризуется при этом сингулярностью со степенью $m = 0,5$, формула (3):

$$\sigma_x(r) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r^m}}, \tag{3}$$

где $\sigma_x(r)$ – напряжение в направлении оси x в точке, удаленной от вершины трещины на расстояние r ; K_1 – коэффициент интенсивности напряжений, который для короткой трещины длиной L при одноосном растяжении напряжениями σ определяется как

$$K_1 = \sigma(\pi L)^{0,5}. \tag{4}$$

Для трехточечного изгиба образцов с трещиной нормального отрыва (двугранный угол $\nu = 0$) есть численное решение Броека [12] для коэффициента интенсивности напряжений K_1 в зависимости от нагрузки P , размеров поперечного сечения образца (b, h), расстояния между опорами (l) и длины трещины L (рис. 2):

$$K_1 = \frac{Pl}{bh^{1,5}} f(x), \tag{5}$$

$$f(x) = [2,9x^{0,5} - 4,6x^{1,5} + 21,8x^{2,5} - 37,6x^{3,5} + 38,7x^{4,5}], \quad x = \frac{L}{h}.$$

Однако для геометрии, в которой имеется ненулевой двугранный угол (пример – образец Шарпи по ГОСТ Р ИСО 148-1-2013, ASTM E23 и др.), в литературе нет выражений, описывающих зависимость коэффициента интенсивности напряжений K_1^ν от величины двугранного угла ν и степени сингулярности m .

Имеются данные [14, 15], что степень сингулярности m снижается с увеличением двугранного угла $\nu \rightarrow \pi$ вплоть до нуля по зависимости

$$\sin[(1-m)(2\pi-\nu)] + (1-m)\sin(2\pi-\nu) = 0, \tag{6}$$

а коэффициент интенсивности определяется выражением

$$K_1^\nu = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [r^m \sigma_x(r)]. \tag{7}$$

В формуле (7) функция $\pi_x(r)$ заранее неизвестна и может быть найдена, например, из решения соответствующей задачи теории упругости методом конечных элементов [20, 21]

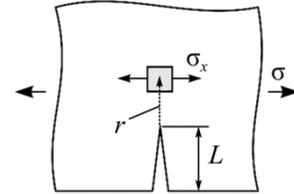


Рис. 1. Напряженное состояние у вершины трещины
Fig. 1. The stress state at the top of the crack

для вырезов с заданным двугранным углом ν . При этом коэффициент интенсивности напряжений K_1^ν имеет различную размерность для различных двугранных углов ν (МПа·м^m).

Классические подходы линейной механики разрушения к оценке прочности тел с острыми надрезами необходимо дополнить работами, в которых рассматривалась удельная энергия деформирования в заданном объеме у вершины надреза, которая сравнивалась с предельной энергией, полученной из испытаний стандартных образцов до разрушения [13, 17–19]. Ключевым словом здесь является «заданный объем», иногда это «заданная площадь» или «заданное расстояние». Иначе говоря, вводится размерный фактор, который является параметром в критерии разрушения [16, 18, 19].

Работы по анализу полей напряжений в окрестности острых надразов публиковались рядом авторов [23–28] на протяжении последних 30 лет, в них разрабатывались аналитические и численные подходы, рассматривались упругие и малопластичные материалы с позиции линейной механики разрушения с использованием сингулярных представлений о распределении компонент напряжений в окрестности вершины выреза. К отмеченным выше можно добавить работы, в которых удерживаются дополнительно несингулярные члены, уточняющие поля напряжений у вершины надреза (расширенные ряды М.Уильямса) и применяемые в анализе коэффициентов интенсивности напряжений, оценке устойчивости направления движения трещины, усталостной прочности деталей с надразом [29–34]. Наличие несингулярных членов иллюстрируется конечно-элементными расчетами, в которых наличие этих членов проявляется на удалении от вершины острого выреза и может быть существенным при оценке прочности деталей из материалов с крупнозернистой (крупночешуйчатой) структурой (бетон, композиты, пеноматериалы и др.). Влияние на распределение напряжений на удалении от вершины трещины высших приближений в асимптотическом разложении М.Уильямса подробно рассмотрено в обзоре [39], где, в частности, точно решена задача о двух коллинеарных трещинах конечной длины в пластине при двух разных случаях нагружения. Однако результаты такого рода работ пока не доведены до включения в методики оценки хрупкой прочности.

Важно отметить, что линейная механика разрушения для прогноза прочности требует проведения экспериментальных исследований прочности образцов с острыми вырезами с конкретным двугранным углом ν , вычисления критического коэффициента интенсивности K_{1c}^ν и сравнения текущих значений K_1^ν с критическим значением K_{1c}^ν , что влечет за собой существенные временные и материальные затраты. Учет высших приближений в асимптотическом разложении дополнительно усложняет эту проблему.

Иной подход предложен в работе [35], где полагается, что в окрестности вершины ν -образного надреза возникает зона рассеянных микроповреждений, снижающих модуль упругости по приближению к вершине выреза из-за почти равноосного растяжения в этой зоне, а по достижении определенной удельной энергии деформации в этой зоне возникает макротрещина, которая и приводит к полному разрушению. На аморфном графите показано хорошее соответствие расчетных и экспериментальных нагрузок разрушения. К недостаткам следует отнести необходимость определения *четырёх параметров*, определяющих нагрузку разрушения.

В недавней статье [36] отмечается, что двух- (и более) параметрические критерии прочности имеют шанс успешного соответствия экспериментальным данным. И, как правило, одним из них является размерный параметр, например размер области интенсивного высвобождения энергии, представительный размер конечного элемента, размер зоны микрорастрескивания и т.п.

В связи с этим в данной работе для оценки прочности элементов конструкции с острым v -образным вырезом предлагается рассмотреть двухпараметрический нелокальный силовой критерий прочности

$$\max \sigma_{x\text{ave}}^A \leq SIG, \quad (8)$$

в котором в зоне вершины выреза производится вычисление максимальных осредненных на заданной базе A напряжений $\sigma_{x\text{ave}}^A$ и сравнение их с предельным значением SIG . Идейной базой этого критерия являются подходы Новожилова, Нейбера и Бажанта [5, 37, 38].

Преимущество данного критерия в том, что параметры A и SIG , определенные на образцах с двумя-тремя двугранными углами, могут использоваться для всех других конфигураций образцов из того же материала.

В данной статье при трехточечном изгибе образцов с острыми v -образными вырезами (двугранные углы $0-180^\circ$) различной глубины с помощью метода конечных элементов (пакет ANSYS Workbench [20]) рассмотрены особенности напряженно-деформированного состояния, определены коэффициенты интенсивности напряжений и показатели степени сингулярности, проведены расчеты нагрузок разрушения с использованием нелокального критерия прочности (8), проведено их сопоставление с экспериментальными данными для квазистатического трехточечного изгиба образцов с надрезами из органического стекла (ПММА).

1. Экспериментальное исследование нагрузок разрушения при изгибе образцов с острыми надрезами

Из листа органического стекла типа ТОСП (ГОСТ 17622-72) толщиной $b = 3,9$ мм были вырезаны образцы высотой $h = 10$ мм и длиной 75 мм. Специальными фрезами с двугранными углами $25, 90$ и 120° и малым радиусом в вершине (менее 10 мкм) с водяным охлаждением без сколов были выполнены вырезы глубиной $L = 0,25 \dots 5$ мм. На испытательной машине INSTRON 5882 с силоизмерителем 5кН были проведены испытания на трехточечный изгиб с расстоянием между опорами $l = 60$ мм и радиусом опор 5 мм (рис. 2).

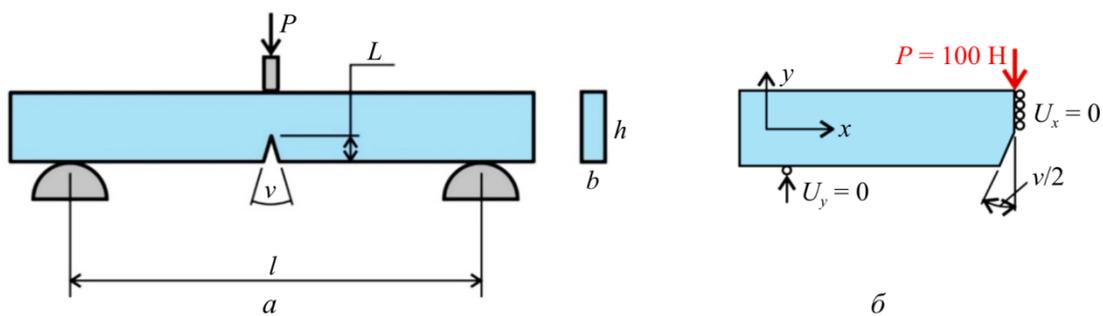


Рис. 2. Схемы нагружения образца на трехточечный изгиб (а) и КЭ-модели (б)

Fig. 2. Scheme of loading of a sample on a three-point bending (a) and FEM (b)

Скорость нагружения была 2 мм/мин (квазистатическое нагружение). Механические характеристики ПММА: модуль упругости $E \approx 3500$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu \approx 0,34$, предел прочности при изгибе $\sigma_{Bu} \approx 120 \dots 130$ МПа, а при растяжении $\sigma_{Bp} \approx 90 \dots 100$ МПа, относительное удлинение при разрушении $\delta \approx 4 \dots 5$ %. В работах [24, 25] характеристики ПММА близки к приведенным выше.

Диаграммы «усилие – прогиб» (рис. 3), полученные при испытаниях образцов с надрезами, имели линейный характер вплоть до разрушения, что свидетельствовало о хрупком поведении ПММА.

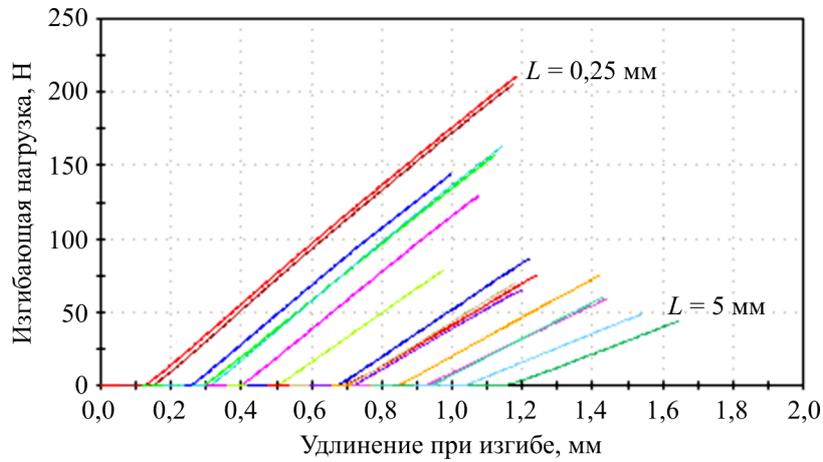


Рис. 3. Диаграммы изгиба образцов с надрезами ($\nu = 25^\circ$) глубиной 0,25–5 мм
 Fig. 3. Diagrams of bending samples with notches ($\nu = 25^\circ$) with the depths of 0.25–5 mm

На рис. 4 приведены фотографии поверхностей разрушения образцов с двугранным углом $\nu = 25^\circ$ и глубиной $L = 0,25 \dots 5$ мм. Стрелками показаны зоны надрезов.

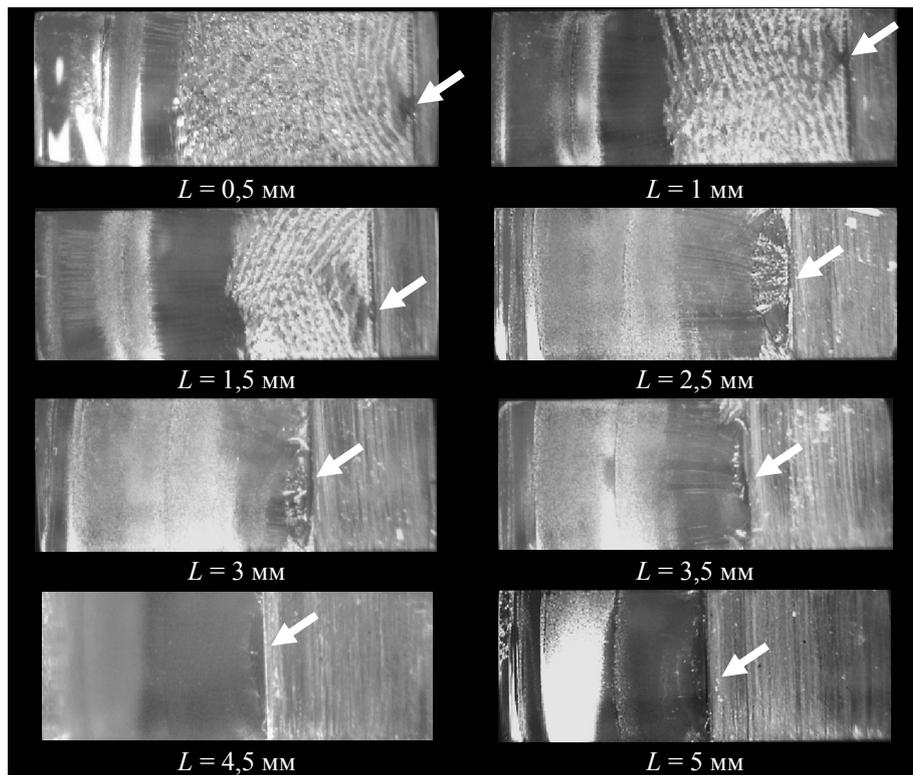


Рис. 4. Фотографии поверхности разрушения
 Fig. 4. Pictures of fractured surfaces

Отметим, что во время испытаний образцы с неглубокими надрезами ($L \leq 2$ мм) разрушались на две части с хорошо слышимой акустической эмиссией, тогда как в образцах с более глубокими вырезами развитие трещины от надреза было достаточно медленным

и заметным невооруженным глазом. У надрезов глубиной 0,5–1,5 мм на поверхностях разрушения имеется бороздчатая часть (быстрое прерывистое движение трещины). Длина бороздчатой зоны уменьшается с увеличением глубины надреза. Для глубоких надрезов ($L > 2,5$ мм) поверхность разрушения практически гладкая. На этих фотографиях можно отметить место начала разрушения на дне выреза (см. рис. 4, стрелки). Шаг бороздок в образцах практически неизменен и составляет $(0,253 \pm 0,01)$ мм. В зоне бороздок поверхность разрушения имеет существенно большую площадь по сравнению с гладкими картинами ($L > 2,5$ мм), что свидетельствует о рассеянии значительно большей удельной энергии деформации в таких образцах. Этот факт подтверждается диаграммами изгиба (см. рис. 3), на которых на разрушение образцов с надрезами меньшей глубины потрачена намного большая энергия, чем на образцы с большой глубиной вырезов. Определенный по картинам на рис. 4 шаг бороздок оказался тесно связан с размером площадки осреднения напряжений для нелокального критерия прочности.

2. Анализ напряженно-деформированного состояния образца с острым v -образным надрезом при изгибе

На рис. 2, *a* приведена схема изгиба образцов с v -образным надрезом. Глубина выреза L изменялась в диапазоне 0,25–5 мм, двугранный угол $v = 0 \dots 180^\circ$, высота $h = 10$ мм, толщина 3,9 мм. Расчет напряженного состояния проводили в плоской постановке, рассматривали лишь половину образца ввиду симметрии (рис. 2, *б*).

Во всех примерах сетка КЭ имела сгущение в области вершины выреза (рис. 5) радиусом 0,25 мм с размером КЭ 0,005 мм.

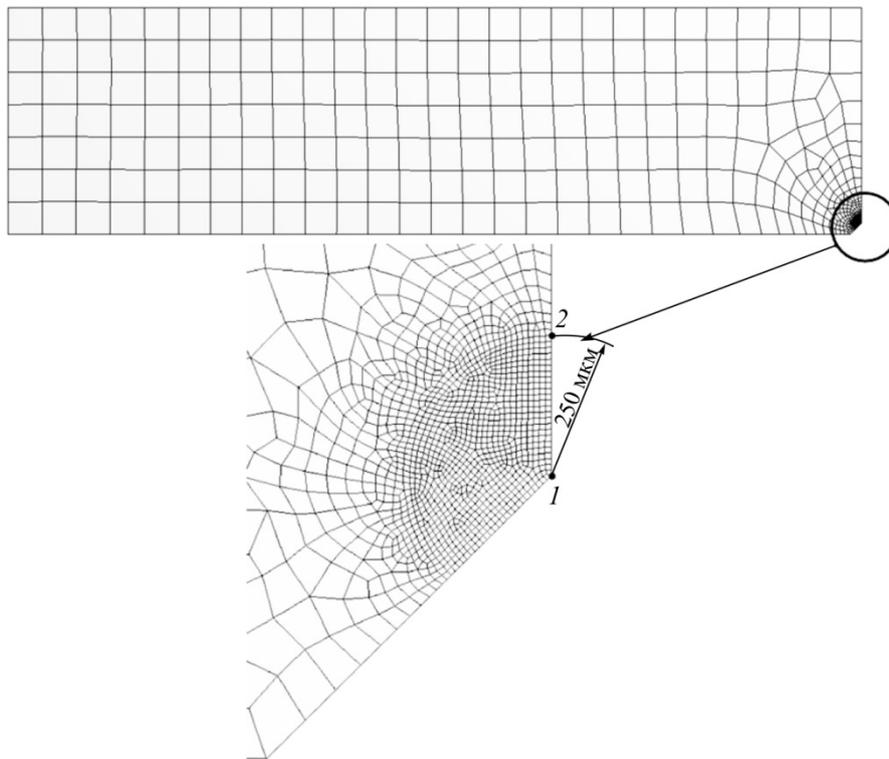


Рис. 5. Сгущение сетки КЭ для выреза $v = 90^\circ$ глубиной $L = 0,5$ мм

Fig. 5. Densification of the FE grid for the notch $v = 90^\circ$ with depth of $L = 0.5$ mm

Поскольку сингулярные задачи показывают стремление максимальных напряжений к бесконечности с уменьшением размера КЭ, стандартное доказательство сходимости можно осуществить, лишь сравнивая расчетные значения коэффициента интенсивности и степени сингулярности с теоретическими значениями по формуле (5). Это сделано ниже, в п.3, с использованием решения Броека [12] и формул (10). Стоит отметить, что для обычных трещин (с нулевым двугранным углом) в коммерческих пакетах, реализующих метод конечных элементов (ANSYS, ABAQUS [20, 21]), имеются специальные сингулярные КЭ со степенью сингулярности 0,5. Однако для других случаев, с ненулевыми двугранными углами, таких КЭ нет.

3. Обработка данных расчетов

Для вычисления коэффициента интенсивности K_I^ν и степени сингулярности m в образцах с острыми надрезами и произвольным двугранным углом ν в работах [24–26] предложена достаточно сложная в реализации методика вычисления G -интеграла у надреза и его связь с коэффициентом интенсивности напряжений. Проблема в том, что степень сингулярности здесь не равна 0,5.

В данной статье используется выражение (3) для напряжений $\sigma_x(r)$ у вершины острого надреза на расстоянии r . Две переменные K_I^ν и m предлагается искать из сопоставления напряженных состояний, полученных МКЭ в нескольких узлах на продолжении разреза в окрестности его вершины с теоретическим выражением (3). При этом анализ показывает, что в одном-двух первых, наиболее напряженных конечных элементах погрешность вычислений МКЭ еще велика, так как функция формы КЭ лишь квадратичная (плоский элемент второго порядка типа PLANE183, опция *plane strain* [20]) и сингулярность корректно отобразить не может. А на достаточно удаленном диапазоне расстояний зависимость (3) работает вполне адекватно (рис. 7). Уместно добавить, что в работе [34] использован аналогичный прием, в котором для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений с учетом несингулярных слагаемых использованы узлы сетки конечных элементов, далеко отстоящие от вершины выреза.

Минимизируя среднеквадратичные отклонения расчетных (3) и численных МКЭ (пакет ANSYS Workbench) значений, можно найти оптимальное сочетание K_I^ν и m с использованием программы, написанной в пакете MathCAD [22]. Для этой цели в окрестности вершины разреза выделена зона радиусом 0,25 мм, в которой сетка конечных элементов была более мелкой (размер 5 мкм, рис. 6, а). На линии – продолжении надреза – были выведены полученные расчетом МКЭ значения напряжений σ_x в узлах сетки КЭ (20 точек на рис. 6, б, из которых лишь 10–15 учитывались при оптимизации. Там же показана зависимость $\sigma_x(r)$ по формуле (3) при различных сочетаниях m и K_I^ν (см. полосу разброса при изменении оптимальных параметров на $\pm 10\%$). При меньшем количестве учитываемых точек получаемые оптимальные параметры сильно осциллировали, а при большем количестве точек на результат оптимизации (резкое снижение степени сингулярности) начал влиять способ нагружения – изгиб – со снижением номинальных напряжений растяжения при удалении от вершины надреза. Таким образом, учет 10–15 точек давал наиболее стабильный результат оптимизации параметров напряженного состояния у выреза.

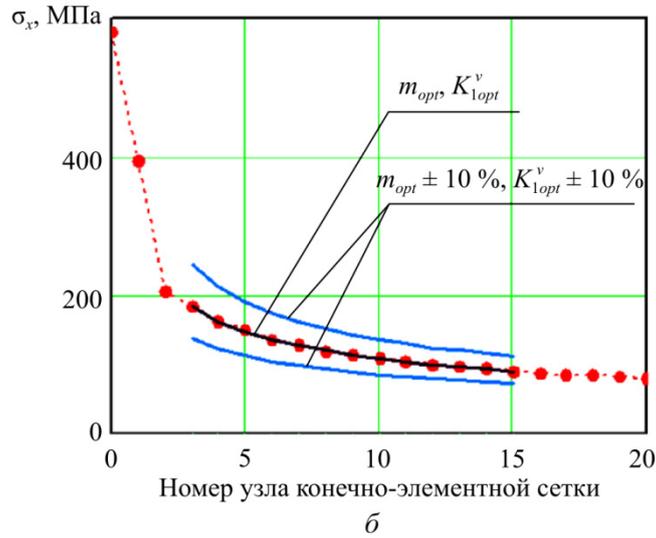
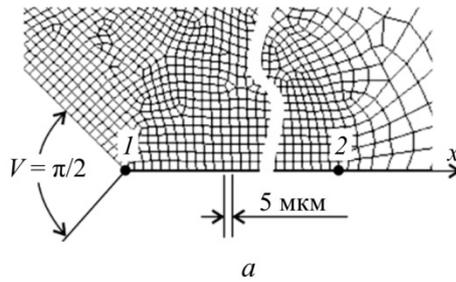


Рис. 6. Сетка КЭ в зоне выреза (а) и распределение напряжений (б) вдоль линии 1–2. Глубина надреза 0,5 мм

Fig. 6. FE grid in the area of the notch (a) and stress distribution (b) along the line 1–2. The depth of notch is 0.5 mm

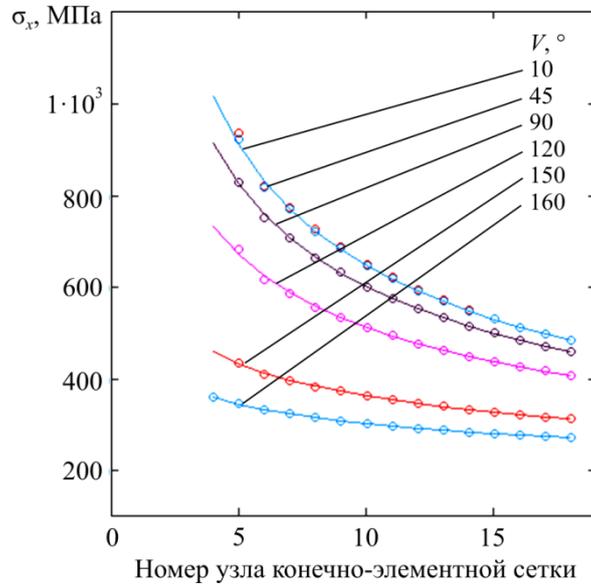


Рис. 7. Примеры распределения напряжений при найденных оптимальных m и K_1^v для образцов с глубиной надреза $L = 5$ мм и разными двугранными углами $\nu = 10 \dots 160^\circ$

Fig. 7. Examples of stress distribution for given optimal m and K_1^v for samples with a depth of cut $L = 5$ mm and different two-edge angles $\nu = 10 \dots 160^\circ$

На рис. 6 и 7 линии – расчет по (3) с оптимальными значениями K_1^v и m . Получено, что степень сингулярности m не зависит от глубины выреза и хорошо согласуется со значениями, полученными из решения уравнения (6) (рис. 8).

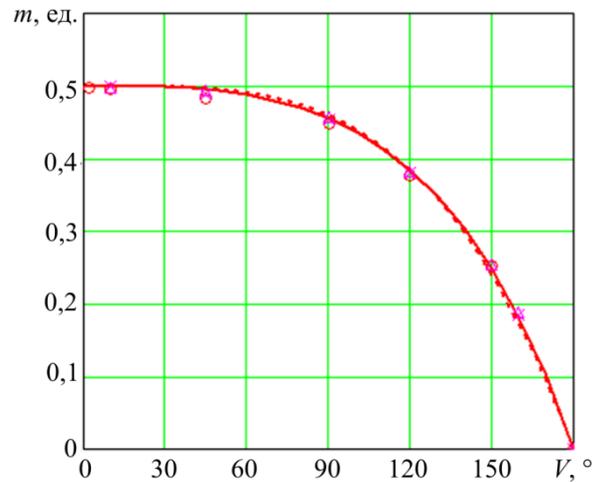


Рис. 8. Степень сингулярности m в функции двугранного угла и глубины надреза ($L = 0,5 \dots 5$ мм)

Fig. 8. Degree of singularity of m in a function of an two-edge angle and a depth of notch ($L = 0,5 \dots 5$ mm)

Здесь сплошная линия – численное решение трансцендентного уравнения (6) с помощью пакета MathCAD, прерывистая – удобная его аппроксимация для дальнейших расчетов

$$m(\nu) = 0,5(1 - 7,486 \cdot 10^{-9} \nu^{3,603}), \quad (9)$$

в которую угол ν подставляется в градусах. Погрешность аппроксимации – менее 1 %. Коэффициенты интенсивности напряжений K_1^v для различных глубин вырезов h и двугранных углов ν при нагрузке $P = 200$ Н (см. рис. 2) приведены на рис. 9 (значки – МКЭ, сплошные линии – аппроксимации, прерывистые – расчет по формуле (5)).

Для расчета коэффициентов интенсивности предлагается использовать следующую зависимость, из которой получается известная формула Броека (5) заменой $m(\nu)$ на 0,5:

$$K_1^v = \frac{Pl}{bh^{2-m(\nu)}} f(x). \quad (10)$$

В подтверждение правомочности использования (10) отметим, что в работе [24] показано, что для трехточечного изгиба образца с ν -образным вырезом коэффициент интенсивности K_1^v может быть выражен через номинальное напряжение в гладком образце $\sigma_n = 1,5Pl/bh^2$, множитель h^m и функцию геометрии образца $F(x, \dots)$

$$K_1^v = \sigma_n h^m \cdot F(x, \dots), \quad x = L/h,$$

откуда появляется

$$K_1^v \sim Pl \cdot F(x, \dots) / bh^{2-m},$$

что с точностью до константы согласуется с выражением (10). Отметим, что функция $F(x, \dots)$ предполагает включение кроме относительной глубины x и угол раскрытия ν граней выреза. Однако в данной работе использование функции Броека (5) с одним аргументом x для ν -образных вырезов оказывается экспериментально оправданным.

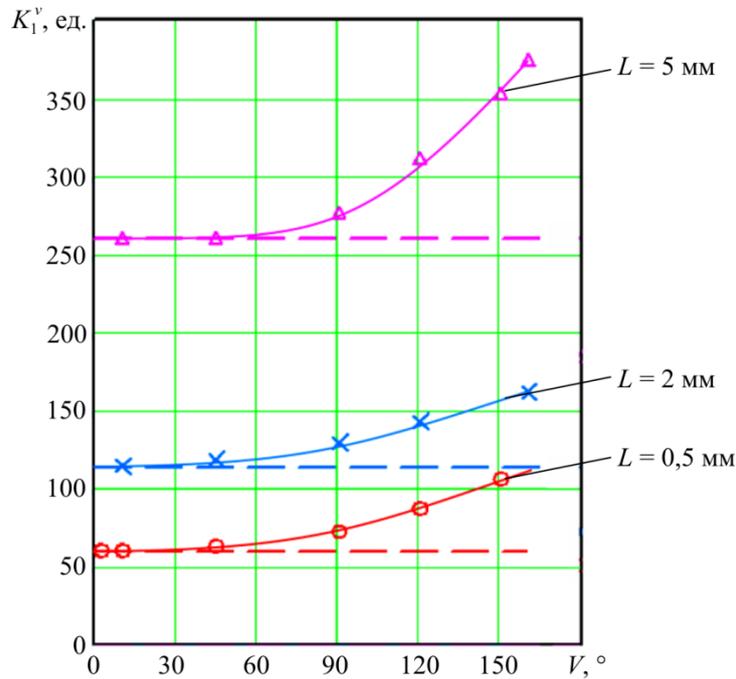


Рис. 9. Коэффициенты интенсивности напряжений K_1^ν для различных глубин вырезов L и двугранных углов ν
 Fig. 9. The stress intensity factors K_1^ν for different depths of notches L and two-edge angles ν

4. Расчеты на прочность

Условие прочности (8) – нелокальный критерий прочности – требует вычисления наибольшего значения осредненного на базе A напряжения σ_x :

$$SX_{ave}(A, V, x) = \frac{1}{A} \int_0^A \frac{Plf(x)}{(2\pi)^{0.5} r^{m(\nu)} b h^{2-m(\nu)}} dr, \quad x = \frac{L}{h},$$

откуда, используя (8), получаем нагрузку разрушения как функцию величины двугранного угла ν и относительной глубины выреза $x = L/h$:

$$P(\nu, x) = SIG \left[\frac{1}{A} \int_0^A \frac{lf(x)}{(2\pi)^{0.5} r^{m(\nu)} b h^{2-m(\nu)}} dr \right]^{-1}. \quad (11)$$

Результаты расчета нагрузок разрушения P образцов приведены на рис.10 вместе с экспериментальными данными для наилучшего сочетания локального предела прочности ПММА ($SIG = 95$ МПа) и базы осреднения $A = 0,25$ мм. Этот размер весьма близок к шагу 0,253 мм бороздок на поверхности разрушения (см. рис. 4), а предел прочности

SIG – к пределу прочности на растяжение ПММА, полученных для образцов с двугранными углами 25 и 90°. Прогноз на двугранный угол 120° показан в виде кривой синего цвета на рис. 10. Совпадение с экспериментальными данными можно считать вполне удовлетворительным.

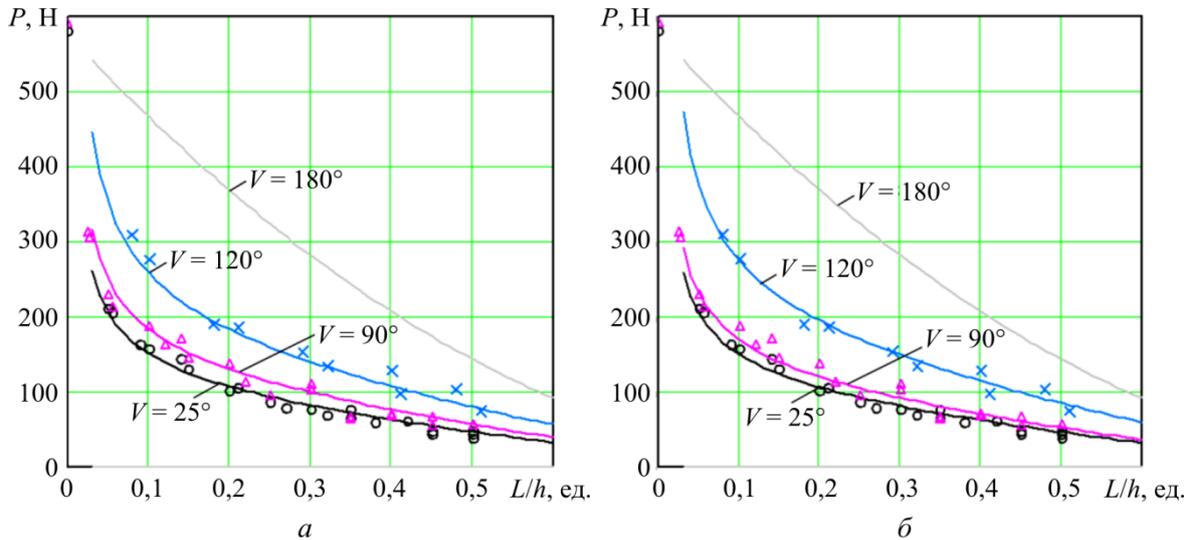


Рис. 10. Результаты расчета нагрузок разрушения образцов по двухпараметрическому критерию (а) и по линейной механике разрушения (б) в функции глубины выреза
 Fig. 10. Results of calculation of the samples' failure loads on two-parametric criterion (a) and to the linear mechanics of failure (b) in a function of a notch depth

Использование линейной механики разрушения приводит к необходимости расчета критических значений коэффициентов интенсивности для каждого двугранного угла ν . Так, при малых глубинах надрезов ($h = 0,5 \dots 1$ мм) для угла $\nu = 25^\circ$ $K_{Ic}^{25} = 60,7 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^{0,5}$; для угла 90° – $75,4 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^{0,459}$, а для угла 120° – $145 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^{0,384}$, расчетные кривые и экспериментальные точки показаны на рис. 10, б. Здесь погрешности прогноза прочности меньше, чем в случае (а), так как для каждой кривой имеется собственный независимый параметр – критический коэффициент интенсивности напряжений.

Выводы

В работе рассмотрен элемент конструкции из хрупкого материала ПММА с острым надрезом с произвольным углом между сторонами, подвергнутый трехточечному изгибу. Для расчетной оценки прочности предложен двухпараметрический нелокальный критерий прочности, который избавляет от учета сингулярности в вершине надреза и сводит задачу механики разрушения к задаче конструкционной прочности.

Нагрузки разрушения образцов с двугранными углами от 25 до 120° получены расчетом по двухпараметрическому критерию и экспериментально хорошо согласуются. При этом параметры предложенного критерия прочности оказались тесно коррелированными с шагом бороздок на поверхностях разрушения и пределом прочности на растяжение использованного ПММА соответственно. Это совпадение можно было бы посчитать случайным, так как в параметры A и SIG изначально не закладывались конкретные физические величины. Однако, если обратиться к работам, в которых для упругопластического

материала рассматривалась предельная удельная энергия деформирования в качестве правой части критерия разрушения, то для линейно-упругого материала она пропорциональна квадрату предела прочности, т.е. полностью соответствует выражению нелокального критерия (8) данной работы.

Использование МКЭ с оптимальной аппроксимацией зависимости напряжений от координаты в окрестности выреза позволило найти степень сингулярности и коэффициенты интенсивности напряжений для вырезов с двугранными углами до 180° .

Предложены удобные аппроксимационные формулы, позволяющие проводить расчеты на прочность изгибаемых образцов из хрупкого материала с произвольными глубинами и углами острых надрезов без использования расчетов МКЭ.

Благодарности

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России. Номер для публикаций: 9.8080.2017/8.9.

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Acknowledgments

The results have been obtained as part of the State Assignment Project of Ministry of Education and Science of the Russian Federation. The index for the publication is 9.8080.2017/8.9.

The paper has been accomplished with the financial support from the Russian Federation Government (Resolution Nr. 211 of March 16, 2013), Agreement Nr. 02.A03.21.0011.

Библиографический список

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flowing solids // *Philosophical Transactions of Royal Society*. – 1920. – A221. – P. 163–198.
2. Lazzarin P., Tovo R. A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighbourhood of crack and notches // *International Journal of Fracture*. – 1996. – Vol. 78. – P. 3–19.
3. Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S.J. Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities // *International Journal of Solid Structure*. – 1997. – Vol. 34. – P. 3873–3883.
4. Seweryn A., Lukaszewicz A. Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2002. – Vol. 69 – P. 1487–1510.
5. Novozhilov V. On a necessary and sufficient condition for brittle strength // *Prikl. Mat. Mekh.* – 1969. – № 33 (2). – P. 212–222.
6. Cornetti P., Sapora A., Carpinteri A. Short cracks and V-notches: Finite Fracture Mechanics vs. Cohesive Crack Model // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2016. – Vol. 168. – P. 2–12.
7. Anderson T.L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. – 2nd ed. – Florida: CRC Press LLC, 1995. – 669 p.
8. An experimental and numerical study of the fracture strength of welded structural hollow section X-joints / T. Björk, G. Marquis, V. Pellikka, R. Ilvoner // *ASTM Special Technical Publication*. – 2007. – Vol. 1480. – P. 343–356.
9. An evaluation method for laser weld metal toughness by side-notched Charpy test / Hagihara Y., Tsukamoto S., Otani T., Arakane G., Matsuda K. // *Welding in the World*. – 2005. – Vol. 49. – No. 7–8. – P. 21–27.

10. Failure analysis of high density polyethylene butt weld joint / F. Tariq, N. Naz, M.A. Khan, R.A. Baloch // *Journal of Failure Analysis and Prevention*. – 2012. – Vol. 12. – No. 2. – P. 168–180.
11. Levine S. Structural failures: Testing lessons learned // *Test Engineering and Management*. – 2009. – Vol. 71. – No. 6. – P. 10–12.
12. Broek D. *Elementary engineering fracture mechanics*. – Springer Science & Business Media, 1982. – 469 p.
13. Berto F., Lazzarin P. A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2009. – Vol. 52. – No. 3. – P. 183–194.
14. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
15. Gomez F.J., Elices M., Valiente A. Cracking in PMMA containing U-shaped notches // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. – 2000. – Vol. 23. – P. 795–803.
16. Taylor D. The theory of critical distances // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2008. – Vol. 75. – No 7. – P. 1696–1705.
17. Berto F., Barati E. Fracture assessment of U-notches under three point bending by means of local energy density // *Materials & Design*. – 2011. – Vol. 32. – P. 822–830.
18. Torabi A.R., Hosseini B.M. Large plasticity induced crack initiation from U-notches in thin aluminum sheets under mixed mode loading // *Engineering Solid Mechanics*. – 2017. – P. 39–60.
19. Сапожников С.Б. *Дефекты и прочность армированных пластиков* / Челябин. гос. техн. ун-т. – Челябинск, 1994. – 164 с.
20. ANSYS® Release 17.0, © SAS IP, Inc.
21. Abaqus. ABAQUS/Standard user's manual, version 6.1. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. – 2000.
22. PTC Mathcad user's manual, version 15.
23. Glinka G., Newport A. Universal features of elastic notch-tip stress fields // *International Journal of Fatigue*. – 1987. – Vol. 9. – P. 143–150.
24. Gomez F.J., Elices M. A fracture criterion for sharp V-notched samples // *International Journal of Fracture*. – 2003. – Vol. 123. – P. 163–175.
25. Dunn M.L., Suwito W., Cunningham, S.J. Fracture initiation at sharp notches: Correlation using critical stress intensities // *International Journal of Solids and Structures*. – 1997. – Vol. 34. – P. 3873–3883.
26. Filippi S., Lazzarin P., Tovo R. Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39 – P. 4543–4565.
27. Gomez F.J., Guinea G.V., Elices M. Failure criteria for linear elastic materials with Unotches // *International Journal of Fracture*. – 2006. – Vol. 141 – P. 99–113.
28. Lazzarin P., Filippi S. A generalized stress intensity factor to be applied to rounded V-shaped notches // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 2461–2478.
29. Ayatollahi M.R., Dehghany M., Nejati M. Fracture analysis of V-notched components – Effects of first non-singular stress term // *International Journal of Solids and Structures*. – 2011. – Vol. 48 – P. 1579–1589.
30. Melin S. The influence of the T-stress on the directional stability of cracks // *International Journal of Fracture*. – 2002. – Vol. 114 – P. 259–265.
31. Smith D.J., Ayatollahi M.R., Pavier M.J. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. – 2001. – Vol. 24. – P. 137–150.
32. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Mode I cracks subjected to large T-stresses // *International Journal of Fracture*. – 2002. – Vol. 117. – P. 159–174.
33. Kim J.K., Cho S.B. Effect of second non-singular term of mode I near the tip of a v-notched crack // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. – 2009. – Vol. 32. – P. 346–356.

34. Ayatollahi M.R., Nejati M. Determination of NSIFs and coefficients of higher order terms for sharp notches using finite element method // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2011. – Vol. 53. – P. 164–177.
35. Leguillon D., Yosibash Z. Failure initiation at V-notch tips in quasi-brittle materials // *International Journal of Solids and Structures*. – 2017. – 29 May. – P. 1–13. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.05.036
36. Xiao S., Liu B. An Exploration Toward a Unified Failure Criterion // *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. – 2017. – Vol. 84 (3). – P. №031004. DOI: 10.1115/1.4035366
37. Neuber H. Theory of Notch Stresses. – 2nd ed. // AEC-TR-4547. – 1958.
38. Bazant Z.P. Scaling theory for quasibrittle structural failure // *Proc. Natl. Acad. Sci.* – 2004. – Vol. 101 (37). – P. 13400–13407.
39. Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2015. – № 4 – С. 188–225.

References

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flowing solids. *Philosophical Transactions of Royal Society*, 1920, A221, pp. 163-198.
2. Lazzarin P., Tovo R. A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighbourhood of crack and notches. *International Journal of Fracture*, 1996, vol.78, pp. 3-19.
3. Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S.J. Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities. *International Journal of Solid Structures*, 1997, vol.34, pp. 3873-3883.
4. Seweryn A., Lukaszewicz A. Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, vol. 69, pp. 1487-1510.
5. Novozhilov V.V. O neobkhodimom i dostatochnom kriterii khrupkogo razrusheniia [On necessary and sufficient criterion of brittle fracture]. *Prikladnaia matematika i mekhanika – Applied mathematics and mechanics*, 1969, no 33, pp. 212-222.
6. Cornetti P., Sapora A., Carpinteri A. Short cracks and V-notches: Finite Fracture Mechanics vs. Cohesive Crack Model. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, vol. 168, pp. 2-12.
7. Anderson T.L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, 2nd ed. *CRC Press LLC*, 1995, 669 p.
8. Björk T., Marquis G., Pellikka V., Ilvoner R. An experimental and numerical study of the fracture strength of welded structural hollow section X-joints. *ASTM Special Technical Publication*, 2007, vol. 1480, pp. 343-356.
9. Hagihara Y., Tsukamoto S., Otani T., Arakane G., Matsuda K. An evaluation method for laser weld metal toughness by side-notched Charpy test. *Welding in the World*, 2005, vol. 49, no 7-8, pp. 21-27.
10. Tariq F., Naz N., Khan M.A., Baloch R.A. Failure analysis of high density polyethylene butt weld joint. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 2012, vol. 12, no. 2, pp. 168-180.
11. Levine S. Structural failures: Testing lessons learned. *Test Engineering and Management*, 2009, 71(6), pp. 10-12.
12. Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. *Springer Science & Business Media*, 1982, 469 p.
13. Berto F., Lazzarin P. A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2009, 52(3), pp. 183-194.
14. Cherepanov G.P. Mekhanika khrupkogo razrusheniia [Mechanics of brittle fracture]. *Moscow, Nauka*, 1974, 640 p.
15. Gomez F.J., Elices M., Valiente A. Cracking in PMMA containing U-shaped notches. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2000, vol. 23, pp. 795-803.
16. Taylor D. The theory of critical distances. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol.75, no 7, pp. 1696-1705.
17. Berto F., Barati E. Fracture assessment of U-notches under three point bending by means of local energy density. *Materials & Design*, 2011, vol. 32, pp. 822-830.
18. Torabi A. R., Hosseini B. M. Large plasticity induced crack initiation from U-notches in thin aluminum sheets under mixed mode loading. *Engineering Solid Mechanics*, 2017, pp. 39-60.

19. Sapozhnikov S.B. Defekty i prochnost' armirovannykh plastikov [Defects and strength of reinforced plastics]. *Chelyabinsk, ChGTU*, 1994, 164 p.
20. ANSYS® Release 17.0, © SAS IP, Inc.
21. Abaqus. Abaqus/Standard user's manual, version 6.1. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc, 2000.
22. PTC Mathcad user's manual, version 15
23. Glinka G., Newport A. Universal features of elastic notch-tip stress fields. *International Journal of Fatigue*, 1987, vol. 9, pp. 143-150.
24. Gomez F.J., Elices M. A fracture criterion for sharp V-notched samples. *International Journal of Fracture*, 2003, vol. 123, pp. 163-175.
25. Dunn M.L., Suwito W., Cunningham, S.J. Fracture initiation at sharp notches: Correlation using critical stress intensities. *International Journal of Solids and Structures* 34, 1997, pp. 3873-3883.
26. Filippi S., Lazzarin P., Tovo R. Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, pp. 4543-4565.
27. Gomez F.J., Guinea G.V., Elices M. Failure criteria for linear elastic materials with Unotches. *International Journal of Fracture*, 2006, vol. 141, pp. 99-113.
28. Lazzarin P., Filippi S. A generalized stress intensity factor to be applied to rounded V-shaped notches, *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 2461-2478.
29. Ayatollahi M.R., Dehghany M., Nejati M. Fracture analysis of V-notched components – Effects of first non-singular stress term, *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, pp.1579-1589.
30. Melin S. The influence of the T-stress on the directional stability of cracks, *International Journal of Fracture*, 2002, vol. 114, pp.259-265.
31. Smith D.J., Ayatollahi M.R., Pavier M.J. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2001, vol. 24, pp.137-150.
32. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Mode I cracks subjected to large T-stresses, *International Journal of Fracture*, 2002, vol. 117, pp.159-174.
33. Kim J.K., Cho S.B. Effect of second non-singular term of mode I near the tip of a v-notched crack, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2009, vol. 32, pp.346-356.
34. Ayatollahi M.R., Nejati M. Determination of NSIFs and coefficients of higher order terms for sharp notches using finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, vol. 53, pp.164-177.
35. Leguillon D., Yosibash Z. Failure initiation at V-notch tips in quasi-brittle materials, *International Journal of Solids and Structures*, 29 May 2017, pp.1-13. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.05.036.
36. Xiao S., Liu B. An Exploration Toward a Unified Failure Criterion, *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 2017, Vol. 84 (3), 031004, DOI: 10.1115/1.4035366.
37. Neuber H. Theory of Notch Stresses 2nd ed., *AEC-TR-4547*, 1958.
38. Bazant Z.P. Scaling theory for quasibrittle structural failure, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 2004, vol. 101 (37), pp.13400-13407.
39. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete asymptotic expansion m. williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, pp.188-225.