



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.06

УДК 539.3

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ТРУБОПРОВОДА

М.А. Ильгамов, А.А. Юлмухаметов

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 07 октября 2016 г.

Принята: 12 августа 2017 г.

Опубликована: 30 сентября 2017 г.

Ключевые слова:

трубопровод, транспортируемая среда, внутреннее давление, грунт, критические значения давления и упругости грунта.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода на переходах через реки и овраги под действием собственного веса трубы и транспортируемой жидкости. Предполагается, что части трубопровода по обе стороны от провисающего участка заделаны в грунт с одинаковыми свойствами. Применяется простейшая модель упругости грунта, состоящая в его замене распределенной системой пружин с определенными жесткостями в продольном и поперечном направлениях трубопровода. Скорость движения транспортируемой жидкости не учитывается. Внутренний перепад давления оказывает неуравновешенное боковое усилие, направленное в сторону выпуклости искривленной осевой линии. Учитывается также влияние на изгиб осевого растяжения трубы, возникающего в результате ее осесимметричной деформации. Прямая задача состоит в определении прогиба при заданных размерных, жесткостных и силовых характеристиках трубопровода и грунта. Для упрощения задачи рассматривается случай высокого внутреннего давления и неглубокого залегания трубопровода в грунте. Определяется зависимость прогиба от отношения жесткостей грунта и трубопровода, а также от внутреннего давления. С увеличением давления возрастает прогиб. В частности, определяется критическое значение внутреннего давления, когда в линейной задаче прогиб возрастает неограниченно. Обратная задача состоит в определении относительной жесткости грунта при приборном определении прогиба трубопровода или деформации его крайних волокон. Для этого применяется способ догружения трубопровода известной сосредоточенной силой и соответствующего приборного определения прогиба или деформации. В частности, догружение и соответствующие замеры осуществляются в средней точке пролета трубопровода. Определяется критическое значение относительной жесткости грунта, ниже которого прогибы возрастают неограниченно.

© ПНИПУ

© **Ильгамов Марат Аксанович** – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, e-mail: ilgamov@anrb.ru

Юлмухаметов Артур Ахмарович – аспирант, e-mail: artyr_yulmuhametov@mail.ru

Marat A. Ilgamov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of RAS, e-mail: ilgamov@anrb.ru

Arthur A. Yulmukhametov – PhD Student, e-mail: artyr_yulmuhametov@mail.ru



DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF PIPELINE BENDING

M.A. Ilgamov, A.A. Yulmukhametov

Mavlyutov Institute of Mechanics RAS, Ufa, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 07 October 2016
 Accepted: 12 August 2017
 Published: 30 September 2017

Keywords:

pipeline, transported fluid, internal pressure, soil, critical values of pressure and soil elasticity.

ABSTRACT

The paper considers the static linear pipe bending at river crossings and ravines under the gravity of the pipe and transported fluid. It is assumed that the parts of the pipeline on either sides of the sagging part are embedded into the ground with same properties. A simple model of the ground elasticity is used which entails a replacement of its distributed spring system with a certain rigidity in the longitudinal and transverse directions of the pipeline. The fluid speed is not considered. The internal pressure difference exerts an unbalanced lateral force directed towards the convexity of the curved axial line. The impact on the axial extension bend of the pipe produced by the axially symmetric deformation is also taken into consideration. The direct problem is to determine the deflection for the given size, stiffness and strength characteristics of the pipe and ground. To simplify the problem, the case of a high internal pressure and shallow pipe occurrence in the ground is considered. The dependence of bending is determined based on the stiffness of the ground and pipeline, as well as on the internal pressure. The pressure growth results in the bending increase. In particular, the critical value of the internal pressure is determined when the bending increases without limit in the linear problem. The inverse problem is to determine the relative stiffness of the ground under the instrumental determination of the pipeline bending or deformation of its outer fibers. It is achieved using the method of the pipeline additional loading by the concentrated power and determination of an appropriate instrumental bending or deformation. In particular, the loading and corresponding measurements are carried out at the midpoint of the pipeline span. The critical value of the relative ground stiffness is determined, below which the bending starts to increase without limit.

© PNRPU

1. Постановка задачи

Трубопровод внутренним радиусом R , толщиной стенки h свободно провисает на участке длиной L (рис. 1, *a*). Начало продольной координаты x принимается в середине этого участка. Участки $-\infty < x < -L/2$ и $L/2 < x < \infty$ находятся в грунте, свойства которого принимаются одинаковыми. Реакция грунта моделируется деформацией системы упругих пружин. При прогибе $w(x)$ трубопровода со стороны системы пружин возникает распределенная сила, равная $q_s w$, а при продольном перемещении $u(x)$ трубопровода – распределенная сила $t_s u$. Здесь через q_s и t_s обозначены жесткости системы пружин в поперечном и продольном направлениях. Реакция грунта на изгиб трубопровода более подробно рассматривается в [1–4]. В них, а также в [5–10] дается анализ прочности и устойчивости.

Учитывается влияние давления p транспортируемой жидкости на изгиб трубопровода. Теоретическое и экспериментальное изучение этого влияния содержится в [11, 12]. Скорость V движения жидкости, а также изменение p на длине L не учитывается. Такое допущение может быть приемлемым, если $\rho_f V^2 \ll p$, где ρ_f – плотность жидкости. Это условие выполняется, например, при данных $p = 70$ бар = $7 \cdot 10^6$ кг/м·с², $\rho_f = 900$ кг/м³, $V = 10$ м/с. В газовых трубопроводах это условие выполняется практически всегда.

Принимается допущение о повороте поперечного сечения так, что нормаль к осевой линии остается нормалью при изгибе и сохраняет свою круговую форму.

Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода. Нелинейный изгиб изучается, например, в работах [13–15]. Первая из них посвящена анализу сильного изгиба пролета трубопровода при подъеме его сосредоточенной силой, а вторая – описанию изгиба сверхпроводящего кабеля, представляющего трубу с концентрическими слоями из

разных материалов для прокачки охлаждающего жидкого азота. В [15] рассмотрен нелинейный изгиб двухслойного трубопровода с определяемой из решения задачи длиной пролета (модель укладки трубопровода на морское дно).

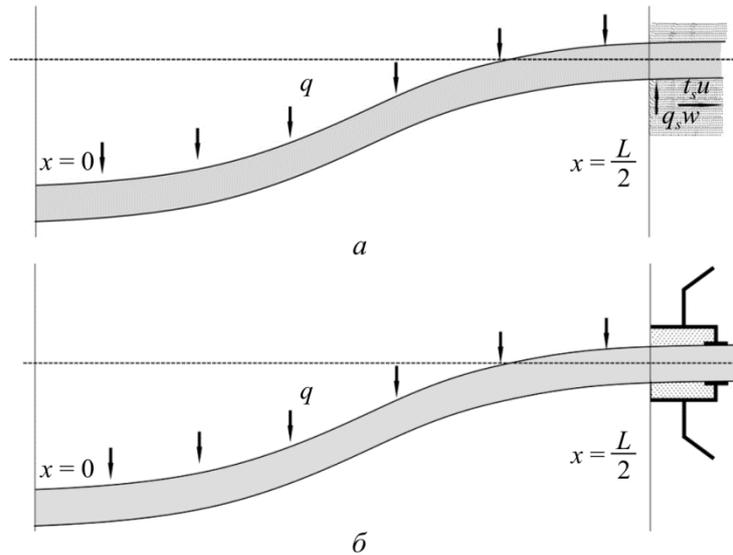


Рис. 1. Статический изгиб трубопровода
Fig. 1. The static bending of pipeline

Приведенная модель трубчатой балки широко используется для описания поведения трубопровода [2, 4, 8, 10]. Рассматриваемая расчетная схема справедлива не только в случае трубопровода и грунта, но и в случае конструкций трубопровод-емкость, где более податливая сплошная среда уменьшает концентрацию напряжений в месте соединения трубопровода со стенкой емкости (рис. 1, б).

Различные подходы в обратных задачах упругой деформации стержней, балок, пластин рассматриваются, например, в [16, 17]. К самым последним публикациям по теме относятся работы [18–27], в которых изучаются свободные, вынужденные и параметрические колебания. Поведение трубы при ударном внутреннем давлении рассматривается в [27]. При этом влияние грунта не учитывается. В [24] дается обзор исследований.

Линейное уравнение статического изгиба имеет вид [2, 11]

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left(P \frac{dw}{dx} \right) = q, \quad D = EJ, \quad J = \frac{\pi}{4} \left((R+h)^4 - R^4 \right), \quad (1)$$

$$q = \pi g \left(\rho \left((R+h)^2 - R^2 \right) + \rho_f R^2 \right),$$

где E , ρ – модуль упругости и плотность материала; q – распределенные внешние силы на трубопровод, которые состоят из собственных весов жидкости и материала трубопровода единичной длины; g – гравитационное ускорение. Для $x > L/2$ в правой части (1) добавляется реакция грунта, равная $-q_s w$. В линейном приближении в уравнении изгиба (1) отсутствует продольное перемещение, однако более строгий учет внутреннего перепада давления приводит к появлению такой зависимости.

Величина P в (1) состоит из части, связанной с взаимодействием разности внутреннего и внешнего давлений $p - p_s$ и изменения угла поворота осевой линии (кривизны), и части, обусловленной кольцевой и осевой силами N_θ , N_x в стенке трубы под действием $p - p_s$ [11]. Здесь p_s – давление на стенки трубы со стороны грунта. Первая часть

$\pi[R^2 p - (R + h)^2 p_s] \approx \pi R^2 (p - p_s)$. В дальнейшем будем пренебрегать величиной h по сравнению с радиусом R . Как видно из (1), изгибная деформация трубы зависит от условия ее растяжения-сжатия. Но в линейной постановке продольное растяжение-сжатие отделяется от задачи изгиба и не зависит от прогиба.

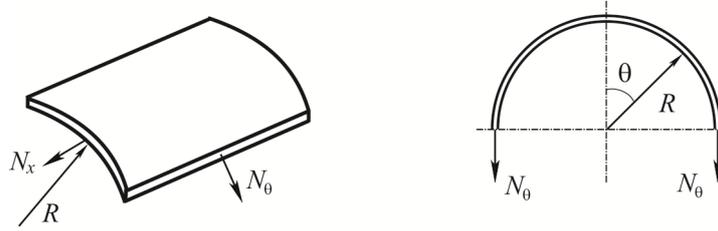


Рис. 2. Продольная и кольцевая силы в стенке трубы
Fig. 2. Longitudinal and annular forces in the pipe wall

Для получения второй части P рассмотрим продольную силу $2\pi RN_x$, где N_x – усилие на продольную полоску единичной ширины стенки трубы толщиной h , как было определено выше (рис. 2). Из закона Гука

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta), \quad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x). \quad (2)$$

Окружная сила N_θ на единичную ширину кольца $N_\theta = \int_0^{\pi/2} (p - p_s) \cos \theta \cdot R d\theta = (p - p_s) R$.

Исключив деформацию ε_θ в (2), находим

$$N_x = (p - p_s) R \nu + E h \varepsilon_x. \quad (3)$$

Таким образом, с учетом (3) в уравнении (1) получаем

$$P = \pi R^2 p - 2\pi R N_x = \pi R^2 p (1 - 2\nu) - 2\pi R h E \varepsilon_x \quad (0 \leq x \leq L/2), \quad (4)$$

$$P = \pi R^2 (p - p_s) (1 - 2\nu) - 2\pi R h E \varepsilon_x \quad (x > L/2).$$

Так как в пределах $0 \leq x \leq L/2$ на трубу не действуют силы в осевом направлении, то из уравнения равновесия $2\pi R dN_x/dx = 0$ следует постоянство N_x и в линейной постановке постоянство $\varepsilon_x = du/dx$. Отсюда $\varepsilon_x = C$ и $u = Cx + G$ ($0 \leq x \leq L/2$). Для участка $x > L/2$ деформацию ε_x определяем из равенства сил $2\pi R h E (d\varepsilon_x/dx)$ и $t_s u$, или

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0, \quad \alpha^2 = \frac{t_s}{2\pi R h E},$$

решение которого $u = A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)$ должно удовлетворять условиям $u = 0$ ($x \rightarrow \infty$), а также равенства продольных перемещений и сил левой и правой частей трубопровода в точке $x = L/2$. Определив A, B, C, G из указанных условий, выражения (4) приводим к виду

$$P = \pi R^2 (1 - 2\nu) \left(p - \frac{2p_s}{2 - \alpha L} \right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right), \quad (5)$$

$$P = \pi R^2 (1 - 2\nu) \left(p - p_s + \frac{p_s \alpha L}{2 - \alpha L} e^{-\alpha x_1} \right), \quad x_1 = x - \frac{L}{2} \quad \left(x > \frac{L}{2} \right).$$

Из (5) видно, что учет радиального расширения трубы под действием внутреннего давления приводит к уменьшению продольной силы P по всей длине (когда это расширение не учитывается, в (5) ν не входит, поэтому в этом случае результат можно получить, положив $\nu = 0$). Учет продольного перемещения на участке $x > L/2$ увеличивает здесь значение P , но уменьшает на участке $0 \leq x \leq L/2$. В случае неглубокого залегания трубопровода в грунте и высокого внутреннего давления ($p_s \ll p$) выражение P для обоих участков является одинаковым $P = \pi R^2 p (1 - 2\nu)$. Такое допущение используется в [20]. С учетом (5) уравнению (1) придаем вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \left(p - \frac{2p_s}{2 - \alpha L} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right),$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \frac{d}{dx} \left(\left(p - p_s + \frac{p_s \alpha L}{2 - \alpha L} e^{-\alpha x} \right) \frac{dw}{dx} \right) + q_s w = q \quad \left(x > \frac{L}{2} \right). \quad (6)$$

2. Случай высокого внутреннего давления в трубопроводе и неглубокого залегания в грунте

Отбрасывая в (6) члены, содержащие p_s , и вводя обозначения

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \mu^2 = \frac{\pi R^2 (1 - 2\nu) p}{4L^2 d}, \quad \beta^4 = \frac{q_s}{4d}, \quad d = \frac{D}{L^4}, \quad (7)$$

второе уравнение (6) запишем в виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4\beta^4 w = \frac{q}{d} \quad \left(\xi > \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

Для участка $0 \leq \xi \leq 1/2$ в (8) отсутствует член $4\beta^4 w$.

Граничные условия состоят в равенстве нулю угла поворота и перерезывающей силы в средней точке трубы:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\xi = 0) \quad (9)$$

и в равенствах прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, перерезывающих сил в месте перехода от провисающей части ($0 \leq \xi \leq 1/2$) трубы к участку в грунте ($\xi > 1/2$):

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} \quad \left(\xi = \frac{1}{2} \right). \quad (10)$$

Кроме того, ставятся условия

$$w = \frac{q}{q_s}, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Отношение веса трубопровода q к жесткости пружин q_s в поперечном направлении представляет собой равномерную по x осадку трубы в грунте.

Решения уравнения (8), а также уравнения без члена $4\beta^4 w$, удовлетворяющие условиям (9) и (11), имеют вид

$$w = C_1 \cos 2\mu\xi + \frac{q}{8d\mu^2} \xi^2 + C_2 \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \quad (12)$$

$$w = e^{-\sqrt{\beta^2 - \mu^2} \xi_1} \left(C_3 \cos \sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1 + C_4 \sin \sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1 \right) + \frac{q}{q_s}, \quad \xi_1 = \xi - \frac{1}{2} \left(\xi > \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, при удалении от провисающей части трубопровода прогиб стремится к равномерной осадке.

Удовлетворяя (12) условиям (10), получаем

$$C_1 = \frac{q}{16d\mu^3\Delta} (\beta^2 + 2\gamma_1),$$

$$C_2 = -\frac{q}{32d\beta^4\mu^3\Delta} \left[2 \left((2\beta^4 + \beta^4\mu^2 - 8\mu^4) \gamma_1 + \beta^2 (\gamma_3^4 + 3\mu^4) \right) \cos \mu + \right. \\ \left. + \mu (\beta^4 (\gamma_2^2 - 4) - 8\mu^2 (\beta^2 \gamma_1 + \gamma_2^2)) \sin \mu \right],$$

$$C_3 = \frac{q}{8d\beta^2\mu^2\Delta} (\mu\gamma_2^2 \cos \mu - (2\mu^2\gamma_1 + \beta^2) \sin \mu),$$

$$C_4 = -\frac{q}{8d\beta^2\mu^2\gamma_1\Delta} (\mu\gamma_1\gamma_2^2 \cos \mu - (\beta^2\gamma_1 + \mu^4) \sin \mu),$$

$$\gamma_1^2 = \beta^2 - \mu^2, \quad \gamma_2^2 = \beta^2 - 2\mu^2, \quad \gamma_3^2 = \beta^2 + \mu^2, \quad \Delta = 2\mu\gamma_1 \cos \mu + \gamma_2 \sin \mu.$$

Зависимость относительного прогиба $W = (24d/q)w$ в точке $\xi = 0$ от относительной жесткости грунта для различных значений относительного внутреннего давления μ показана на рис. 3.

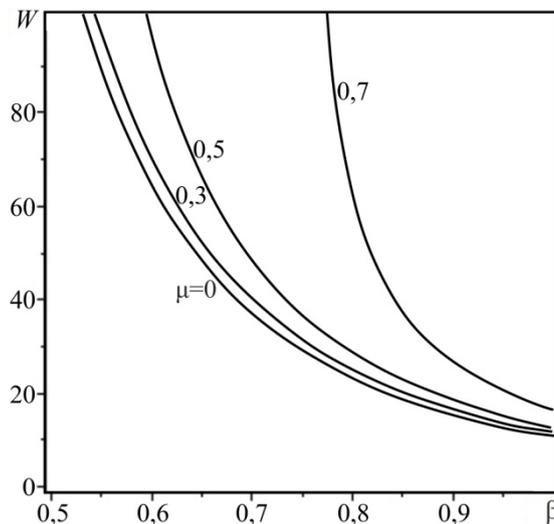


Рис. 3. Зависимость относительного прогиба W в середине ($\xi = 0$) пролета трубопровода от относительной жесткости грунта β
 Fig. 3. The dependence of W relative bending in the middle ($\xi = 0$) of the pipeline span on the relative stiffness of β soil

С увеличением относительной жесткости β грунта происходит уменьшение относительного прогиба, причем тем быстрее, чем меньше относительное внутреннее давление μ . С увеличением μ возрастает относительный прогиб W . Таким образом, внутреннее давление вызывает дополнительный изгиб трубопровода. С уменьшением жесткости грунта происходит стремительный рост прогиба. То значение относительной жесткости грунта, когда прогиб возрастает неограниченно, назовем критическим β_{cr} . Оно определяется из уравнения $\Delta(\beta, \mu) = 0$ или

$$\cos \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{\beta}. \quad (13)$$

В отсутствие внутреннего давления ($\mu = 0$) из (13) следует $\beta_{cr} = 0$. Это означает, что неограниченное возрастание прогиба в линейной постановке может быть только при исчезающе малой жесткости грунта. При значении $\mu \ll 1$ имеем $\beta_{cr} \approx \mu$. Отметим, что эта оценка остается справедливой даже при нарушении условия $\mu \ll 1$. Так, при $\mu = 0,3, 0,5$ из (13) имеем $\beta_{cr} \approx 0,303, 0,516$.

Другой предельный случай $\beta \rightarrow \infty$ соответствует большой жесткости грунта по сравнению с жесткостью на изгиб трубы. Тогда из (13) следует $\cos(\mu/2) = 0$ или $\mu_{cr} = \pi$. С учетом (7) имеем значение критического внутреннего давления

$$p_{cr} = \frac{P_E}{\pi R^2 (1 - 2\nu)}, \quad P_E = \frac{4\pi^2 D}{L^2},$$

где P_E – эйлерово значение продольной сжимающей силы в случае защемленных концов трубы ($w = dw/d\xi = 0$ при $\xi = -1/2, 1/2$).

Для большого, но конечного значения β примем $\mu = \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll \pi$. Тогда из (13) находим $\varepsilon \approx 2\pi/(2 + \beta)$. Поэтому в этом случае $\mu \approx \pi\beta/(2 + \beta)$ и

$$p_{cr} = \frac{P_E \beta}{\pi R^2 (1 - 2\nu)(2 + \beta)}.$$

Если, например, $\beta = 8$, то p_{cr} снижается на 20 % по сравнению с предельным случаем абсолютной жесткости грунта.

В случае отсутствия транспортируемой жидкости или малого внутреннего давления ($\mu = 0$) выражение для относительного прогиба имеет вид

$$W = \left(\xi^4 - \frac{\beta^2 + 6\beta + 12}{2\beta(\beta + 2)} \xi^2 + \frac{\beta^4 + 8\beta^3 + 24\beta^2 + 48\beta + 96}{16\beta^4} \right) \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \quad (14)$$

$$W = \left(\frac{\beta^2 + 6\beta + 6}{\beta^3(\beta + 2)} \cos \beta \xi_1 - \frac{\beta^2 - 6}{\beta^3(\beta + 2)} \sin \beta \xi_1 + \frac{6}{\beta^4} \right) e^{-\beta \xi_1} \left(\xi \geq \frac{1}{2} \right).$$

Зависимость $W(\beta)$ по первому выражению (14) при $\xi = 0$ также показана на рис. 3.

3. Определение реакции грунта на изгиб трубопровода

Определение параметра q_s или относительной жесткости грунта β может быть осуществлено формально по замеру прогиба w трубопровода или деформации крайних волокон, например, в центре пролета ($\xi = 0$). Для этого могут быть использованы выражения (12),

(14). Однако такой способ практически нереализуем. Здесь предлагается способ догружения сосредоточенной силой Q в средней точке $\xi = 0$ и замеров соответствующего дополнительного прогиба или деформации в этой же точке. Такая обратная задача, очевидно, сопряжена с повышенными требованиями к экспериментальным данным и с вопросом о ее корректности. Эти вопросы здесь не обсуждаются.

Снова рассмотрим случай $p \gg p_s$, когда справедливо уравнение (8). Тогда относительно прогиба w , вызванного силой Q , имеем уравнения

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{1}{2d} Q \delta(\xi - 0) \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \quad (15)$$

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4\beta^4 w = 0 \quad \left(\xi > \frac{1}{2} \right),$$

где $\delta(\xi - 0)$ – дельта-функция. Граничные условия и условия сопряжения те же (9)–(11), но в них функция $w(\xi)$ означает дополнительный прогиб.

Решения уравнений (15), удовлетворяющие условиям (9) и (11), имеют вид

$$w = \frac{Q}{8d\mu^2} \left(C_1(1 - \cos 2\mu\xi) - \frac{1}{4\mu} \sin 2\mu\xi - C_2 + \frac{1}{2}\xi \right) \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \quad (16)$$

$$w = e^{-\gamma_2 \xi_1} (C_3 \cos \gamma_3 \xi_1 + C_4 \sin \gamma_3 \xi_1), \quad \text{где } \xi_1 = \xi - \frac{1}{2} \quad \left(\xi > \frac{1}{2} \right).$$

После удовлетворения условиям (10), находим

$$C_1 = -\frac{1}{4\mu\Delta} (\gamma_2^2 \cos \mu + 2\mu\gamma_1 \sin \mu + \beta^2),$$

$$C_2 = \frac{1}{3\beta^2\mu\Delta} \left[2(\beta^4 + \beta^2\mu^2\gamma_1 - 2\mu^2) \cos \mu + \mu(\beta^2\gamma_2^2 - 2(\gamma_3^2 + \mu^2)\gamma_1) \sin \mu - 2\beta^4 \right],$$

$$C_3 = \frac{Q}{16d\beta^2\mu\Delta} (\gamma_2 \cos \mu - 2\mu\gamma_1 \sin \mu + \beta^2),$$

$$C_4 = \frac{Q}{16d\beta^2\mu\gamma_3\Delta} (\mu\gamma_1(\gamma_3^2 + \mu^2) \cos \mu - 2\mu^3 \sin \mu - \beta^2\gamma_1).$$

В связи с тем, что определение параметра β по замеренным значениям прогиба или деформации трубы по выражениям (16) весьма затруднительно, рассмотрим более простой случай нулевого перепада давления ($\mu = 0$). Тогда решения (16) приобретают вид

$$w = \frac{Q}{24d} \left(\xi^3 - \frac{3(\beta+2)}{4\beta} \xi^2 + \frac{\beta^3 + 6\beta^2 + 12\beta + 24}{16\beta^3} \right) \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \quad (17)$$

$$w = \frac{Qe^{-\beta\xi_1}}{24d} \left(\frac{3(\beta+2)}{4\beta^3} \cos \beta\xi_1 - \frac{3(\beta-2)}{4\beta^3} \sin \beta\xi_1 \right) \quad \left(\xi > \frac{1}{2} \right).$$

Зная экспериментальное значение прогиба $[w]$ в точке $\xi = 0$, можно определить параметр

$$\beta = \frac{z^{2/3} + 2z^{1/3} + 64W}{(16W - 1)z^{1/3}}, \quad (18)$$

$$z = 8 \left((16W - 1) \left(24W + \sqrt{576W^2 - 16W + 1} \right) + 1 \right), \quad W = \frac{24d}{Q} [w], \quad (19)$$

откуда $q_s = 4d\beta^4$.

Пусть надземная часть стальной трубы $L=25$ м, а ее внутренний диаметр $2R$ и толщина стенок h равны соответственно 0,309 и 0,008 м. $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, при этом $d \approx 51,27$ Па. Определим прогиб трубы под действием груза $Q = 500$ Н при жесткости грунта $q_s \approx 16611,89$ Па ($\beta = 3$). В соответствии с первой формулой в (17) получим, что прогиб $w \approx 0,13$ м.

В обратной задаче определяем жесткость грунта q_s , если известно, что под действием дополнительного груза $Q = 500$ Н прогиб трубопровода возрастает на $[w] = 0,13$ м. По формуле (19) $W \approx 0,25$ м, а по формуле (18) $\beta \approx 3,04$, поэтому $q_s \approx 17589,61$ Па (или $q_s/E = 8,79 \cdot 10^{-8}$).

Анализ показывает, что малые ошибки замера значения $[w]$ приводят в обратной задаче к значительным ошибкам в определении значения жесткости грунта q_s . Например, при $[w] = 0,125$ м значение $q_s \approx 19712,52$ Па ($\beta \approx 3,13$), а при $[w] = 0,135$ м значение $q_s \approx 15795,79$ Па ($\beta \approx 2,96$).

На рис. 4 приведены значения β от W также при ненулевых μ (этот график построен при задании β).

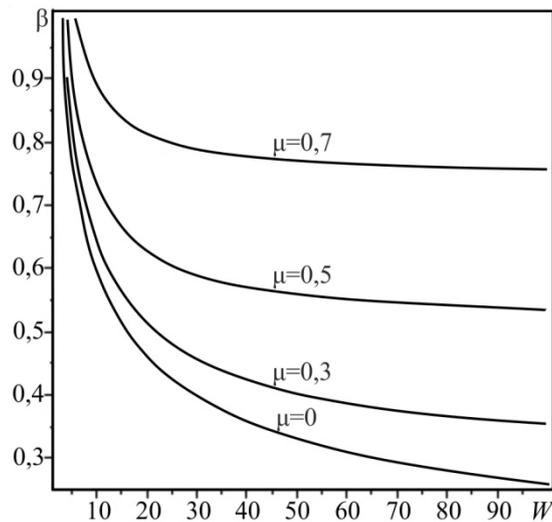


Рис. 4. Зависимость относительной жесткости грунта β от относительного прогиба трубопровода W для различного относительного давления транспортируемой жидкости μ

Fig. 4. The dependence of the relative stiffness of soil β on the relative bending of W pipeline for different relative pressures of the transported fluid μ

В силу принятого допущения о нормали к изогнутой оси поперечного сечения трубы продольная деформация нижнего волокна наружной поверхности $\varepsilon = -(R + h)(d^2w/dx^2)$. С учетом выражения (17) при $\xi = 0$ получаем

$$\varepsilon = \frac{Q(R + h)(2 + \beta)}{16L^2d\beta}.$$

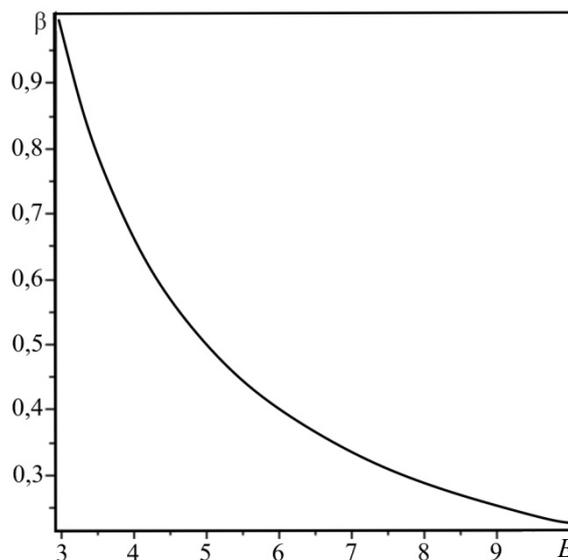


Рис. 5. Зависимость относительной жесткости грунта β от относительной продольной деформации трубопровода E
Fig. 5. The dependence of the relative stiffness of soil β on the relative longitudinal deformation of pipeline E

Зависимость относительной жесткости грунта β от безразмерной величины $E = (16L^2d/Q(R+h)) [\varepsilon]$ показана на рис. 5.

Заключение

В идеализированной системе труба–транспортируемая жидкость–грунт определяется прогиб трубопровода в зависимости от геометрических и механических характеристик трубы, от плотности и давления жидкости, упругой реакции грунта. Учитывается влияние на изгиб взаимодействия внутреннего перепада давления и кривизны осевой линии, а также возникающего продольного усилия в результате осесимметричной деформации трубы. Рассмотрен случай большого внутреннего давления в трубопроводе и неглубокого его залегания в грунте, когда задача существенно упрощается. С увеличением внутреннего перепада давления происходит рост прогиба пролета трубопровода. Определяются критическое значение жесткости грунта, ниже которого в линейной задаче происходит неограниченное возрастание прогиба, а также значение внутреннего перепада давления, выше которого происходит такое возрастание.

В обратной задаче по экспериментально определенным значениям прогиба или деформации трубы определяется значение жесткости грунта.

Благодарности/Acknowledgments

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-00740_a).

Библиографический список

1. Виноградов С.В. Расчет подземных трубопроводов на внешние нагрузки. – М.: Стройиздат, 1980. – 135 с.
2. Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. – М.: Недра, 1982. – 341 с.

3. Александров М.М. Взаимодействие колонны труб со стенками скважины. – М.: Недра, 1982. – 144 с.
4. Бородавкин П.П., Синюков А.М. Прочность магистральных трубопроводов. – М.: Недра, 1984. – 226 с.
5. Васильев Н.П. Балластировка и закрепление трубопроводов. – М.: Недра, 1984. – 166 с.
6. Морозов В.Н. Магистральные трубопроводы в сложных инженерно-геологических условиях. – Л.: Недра, 1987. – 121 с.
7. Перун И.В. Магистральные трубопроводы в горных условиях. – М.: Недра, 1987. – 175 с.
8. Зарипов Р.М., Коробков Г.Е., Чичелов В.А. Универсальный метод расчета на прочность магистральных газопроводов // Газовая промышленность. – 1998. – № 4. – С. 44–55.
9. Харионовский В.В. Надежность и ресурс конструкции газопроводов. – М.: Недра, 2000. – 486 с.
10. Султанов М.Х. Основные положения расчета допустимого рабочего давления при эксплуатации магистральных нефтепродуктопроводов // Транспорт и хранение нефтепродуктов. – 2002. – № 12. – С. 8–12.
11. Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости / ИММ РАН. – Казань, 1994. – 208 с.
12. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // Journal of Applied Mechanics: Transactions ASME. – 1995. – Vol. 62. – No. 3. – P. 595–600. DOI: 10.1115/1.2895987
13. Ilgamov, M.A., Ratrouf, R.A. Large deflection of superconducting cable // Int. J. Nonlinear Mech. – 1999. – Vol. 34. – No. 5. – P. 869–880. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00059-6
14. Ильгамов М.А., Якупов Р.Г. Сильный изгиб трубопровода // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 6. – С. 109–116.
15. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – № 1. – С. 70–78. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.9
16. Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. – 2001. – № 2. – С. 290–298.
17. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
18. Глазков А.С., Климов В.П., Гумеров К.М. Продольно-поперечный изгиб трубопровода на участках грунтовых изменений // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2012. – № 1. – С. 63–70.
19. Чужиков С.Н., Новиков П.А., Ларионов Ю.В. Анализ прочности трубопровода на участках просадки грунта // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2012. – № 4. – С. 92–100.
20. Гимазетдинов И.Р., Климов В.П., Гумеров А.К. Некоторые особенности напряженного состояния трубопроводов на переходах через реки и овраги // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2014. – № 3. – С. 55–65.
21. Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends / M. Kheiri, M.P. Paidoussis, G.C.Del. Pozo, M. Amabili // Journal of Fluids and Structures. – 2014. – Vol. 49. – P. 360–385. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2013.11.023
22. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed / L.Q. Chen, Y.L. Zhang, G.C. Zhang, H. Ding // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2014. – Vol. 58. – P. 11–21. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.012
23. Saadelin R., Hu Y., Henni A. Numerical analysis of buried pipes under field geo-environmental conditions // International Journal of Geo-Engineering. – 2015. – Vol. 2. – P. 1–22. DOI:10.1186/s40703-015-0005-4
24. Li S., Karney B.W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // Journal of Fluids and Structures. – 2015. – Vol. 57. – P. 277–297. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020

25. Texier B.D., Dorbolo S. Deformations of an elastic pipe submitted to gravity and internal fluid flow // *Journal of Fluids and Structures*. – 2015. – Vol. 55. – P. 364–371. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.03.010
26. Wang S., Karmakar D., Soares C.G. Hydroelastic impact of a horizontal floating plate with forward speed // *Journal of Fluids and Structures*. – 2016. – Vol. 60. – P. 97–113. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.11.005
27. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А. Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // *ДАН*. – 2016. – Т. 470, № 2. – С. 162–165. DOI: 10.7868/S0869565216260078

References

1. Vinogradov S.V. Raschet podzemnykh truboprovodov na vneshnie nagruzki [Calculation of underground pipelines to external loads]. *Moscow, Stroizdat*, 1980, 135 p.
2. Aynbinder A.B., Kamershtein A.G. Raschet magistral'nykh truboprovodov na prochnost' i ustoichivost' [Calculation of main pipelines for strength and stability]. *Moscow, Nedra*, 1982, 341 p.
3. Aleksandrov M.M. Vzaimodeistvie kolonny trub so stenkami skvazhiny [The interaction of the pipe string with the walls of well]. *Moscow, Nedra*, 1982, 144 p.
4. Borodavkin P.P., Sinyukov A.M. Prochnost' magistral'nykh truboprovodov [Strength of main pipelines]. *Moscow, Nedra*, 1984, 226 p.
5. Vasil'ev N.P. Ballastirovka i zakreplenie truboprovodov [ballasting and pipeline fixing]. *Moscow, Nedra*, 1984, 166 p.
6. Morozov V.N. Magistral'nye truboprovody v slozhnykh inzhenerno-geologicheskikh usloviakh [The main pipelines in difficult engineering-geological conditions]. *Leningrad, Nedra*, 1987, 121 p.
7. Perun I.V. Magistral'nye truboprovody v gornyykh usloviakh [The main pipelines in mountain conditions]. *Moscow, Nedra*, 1987, 175 p.
8. Zaripov R.M., Korobkov G.E., Chichelov V.A. Universal'nyi metod rascheta na prochnost' magistral'nykh gazoprovodov [Universal method for calculating the strength of the main gas pipelines]. *Gazovaia promyshlennost' – Gas industry*, 1998, no.4, pp. 44-55.
9. Kharionovsky V.V. Nadezhnost' i resurs konstruksii gazoprovodov [The reliability and resource construction of gas pipeline]. *Moscow, Nedra*, 2000, 486 p.
10. Sultanov M.Kh. Osnovnye polozeniia rascheta dopustimogo rabocheho davleniia pri ekspluatatsii magistral'nykh nefteproduktoprovodov [The main provisions of the calculation of the allowable operating pressure during operation of main oil pipelines]. *Transport i khranenie nefteproduktov – Transport and storage of petroleum products*, 2002, no.12, pp. 8-12.
11. Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. *Moscow, Nauka, Fizmatlit*, 1998. 208 p.
12. Tang, D.M., Ilgamov, M.A., Dowell, E.H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure, 1995, *Journal of Applied Mechanics: Transactions ASME*, 62 (3), pp. 595-600. DOI: 10.1115/1.2895987
13. Ilgamov, M.A., Ratrouf, R.A. Large deflection of superconducting cable, 1999, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 34 (5), pp. 869-880. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00059-6
14. Ilgamov M.A., Yakupov R.G. Sil'nyi izgib truboprovoda [Strong bending of the pipeline]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mech. Solids*, 2003, no. 6, pp. 109-116.
15. Yeliseev V.V., Zinovieva T.V. Nelineino-uprugaiia deformatsiia podvodnogo truboprovoda v protsesse ukladki [Nonlinear-elastic strain of underwater pipeline in laying process]. *Vysisl. meh. splos. Sred – Computational continuum mechanics*, 2012, no. 1, pp. 70-78. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.9
16. Ahatov I.Sh., Akhtyamov A.M. Opredelenie vida zakrepleniia sterzhnia po sobstvennym chastotam ego izgibnykh kolebaniy [Determination of the form of attachment of the rod using the natural frequencies of its flexural oscillations]. *Prikladnaia matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, no. 2, pp. 290-298.
17. Akhtyamov A.M. Teoriia identifikatsii kraevykh uslovii i ee prilozheniia [The theory of identification of boundary conditions and its applications]. *Moscow, Fizmatlit*, 2009, 272 p.
18. Glaskov A.S., Klimov V.P., Gumerov K.M. Prodol'no-poperechnyi izgib truboprovoda na uchastkakh gruntovykh izmenenii [Longitudinal and transverse pipeline bending in the areas of ground changes]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefii i nefteproduktov – Problems of gathering, treatment and transportation of Oil and Oil Products*, 2012, no. 1, pp. 63-70.

19. Chuzhinov S.N., Novikov P.A., Larionov Yu.V. Analiz prochnosti truboprovoda na uchastkakh prosadki grunta [Strength analysis of a pipeline in the areas of the soil drawdown]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefiti i nefteproduktov – Problems of gathering, treatment and transportation of Oil and Oil Products*, 2012, no. 4, pp. 92-100.
20. Gimazetdinov I. R., Klimov V. P., Nekotorye osobennosti napriazhennogo sostoianiia truboprovodov na perekhodakh cherez reki i ovragi [Peculiarities of river and ravines crossing pipelines stress state]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefiti i nefteproduktov – Problems of gathering, treatment and transportation of Oil and Oil Products*, 2014, no. 3, pp. 55-65.
21. Kheiri, M., Paidoussis, M.P., Pozo, G.C.Del., Amabili, M. Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends, 2014, *Journal of Fluids and Structures*, 49, pp. 360-385. Doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2013.11.023
22. Chen, LQ., Zhang, YL., Zhang, GC., Ding, H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed, 2014, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 58, pp. 11-21. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.012
23. Saadelin, R., Hu, Y., Henni, A. Numerical analysis of buried pipes under field geo-environmental conditions, 2015, *International Journal of Geo-Engineering*, 2, pp. 1-22. doi:10.1186/s40703-015-0005-4
24. Li, S., Karney, B.W., Liu, G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature, 2015, *Journal of Fluids and Structures*, 57, pp. 277–297. doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020
25. Texier, B.D., Dorbolo, S. Deformations of an elastic pipe submitted to gravity and internal fluid flow, 2015, *Journal of Fluids and Structures*, 55, – pp. 364-371. doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.03.010
26. Wang, S., Karmakar, D., Soares, C.G. Hydroelastic impact of a horizontal floating plate with forward speed, 2016, *Journal of Fluids and Structures*, 60, pp. 97-113. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.11.005
27. Ganiev, R.F., Ilgamov, M.A. Resilient reaction of a pipeline to an internal impact pressure, 2016, *Doklady Physics*, 61, pp. 453-456. DOI: 10.1134/S1028335816090044