



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.07

УДК 539.3

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА И СФЕРЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А.Е. Машихин<sup>1</sup>, А.А. Мовчан<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 04 июля 2017 г.

Принята: 12 августа 2017 г.

Опубликована: 30 сентября 2017 г.

#### Ключевые слова:

сплавы с памятью формы, прямое превращение, краевые задачи, толстостенный цилиндр, толстостенная сфера, фронт фазового перехода.

### АННОТАЦИЯ

Приводятся решения связанных краевых задач для толстостенных цилиндра и сферы из сплава с памятью формы (СПФ), материал которых претерпевает прямое термоупругое мартенситное фазовое превращение при охлаждении под действием постоянного внутреннего давления. Рассматриваются медленные процессы охлаждения, при которых распределение температуры по материалу в каждый момент времени можно считать равномерным. Результаты сравниваются с аналитическими решениями таких же задач, ранее полученными в предположении о равномерном распределении по материалу величины объемной доли мартенситной фазы. Моделируется квазистатическое движение по материалу фронтов фазового перехода и связанные с этими движениями перераспределения напряжений и деформаций по сечению. Установлено, что прямое фазовое превращение начинается на внутренней поверхности оболочек. Зона фазового перехода достаточно быстро (по сравнению с ростом параметра фазового состава в точках внутренней поверхности) распространяется вдоль радиальной координаты, выходя на внешнюю поверхность. После этого фазовый переход развивается по всей толщине, причем величина объемной доли мартенситной фазы  $q$  является слабо убывающей функцией радиальной координаты (разница значений  $q$  на внутренней и внешней поверхностях составляет малую долю максимального значения  $q$ , равного 1). Завершение фазового перехода впервые наблюдается на внутренней поверхности, после чего граница завершения фазового перехода быстро перемещается по толщине от внутренней поверхности к внешней. Интенсивность напряжений и кольцевое напряжение в процессе фазового перехода меняются немонотонно и разнонаправленно для внутренней и внешней поверхностей. На внутренней поверхности эти напряжения имеют максимальные значения в точках начала и окончания фазового перехода и минимальные значения в некоторой промежуточной точке. Для внешней поверхности, наоборот, минимальные значения наблюдаются в начале и конце фазового перехода, а максимальное – в промежуточной точке процесса.

© ПНИПУ

© Машихин Антон Евгеньевич – аспирант, e-mail: a--nton@mail.ru

Мовчан Андрей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: movchan47@mail.ru

Anton E. Mashikhin – PhD Student, e-mail: a--nton47@mail.ru

Andrey A. Mochan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: movchan47@mail.ru



## THERMOMECHANICAL BOUNDARY PROBLEMS FOR A CYLINDER AND SPHERE MADE OF SHAPE MEMORY ALLOY

A.E. Mashikhin<sup>1</sup>, A.A. Movchan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 04 June 2017  
Accepted: 12 August 2017  
Published: 30 September 2017

#### Keywords:

shape memory alloys,  
direct transformation, boundary  
problems, thick-walled cylinder,  
thick-walled sphere, phase  
transition front.

### ABSTRACT

The paper presents the solutions of the coupled boundary value problems for a thick-walled cylinder and a sphere made of shape memory alloy (SMA). Their material undergoes a direct thermoelastic martensitic phase transformation upon cooling under a constant internal pressure. We have considered slow cooling processes in which the temperature distribution over the material at each instant of time can be considered as uniform. The results are compared with the analytical solutions of the same problems previously obtained within the assumption of a uniform distribution over the material of the martensitic volume part parameter. A quasistatic motion is simulated in the material of the fronts of the onset and completion of the phase transition, as well as the redistribution of stresses and strains along the cross section associated with these motions. It is established that a direct phase transformation begins on the inner surface of the shells. The phase transition zone is quite fast (compared to the growth of the phase composition parameter at the points of the inner surface) propagating along the radial coordinate to the outer surface. After this, the phase transition develops over the entire thickness, the magnitude of the martensitic volume part parameter  $q$  being a weakly decreasing function of the radial coordinate (the difference in the values  $q$  on the inner and outer surfaces is a small fraction of the maximum  $q$  value equal to 1). The completion of the phase transition is observed for the first time on the inner surface, after which the boundary of the phase transition end rapidly moves through the thickness from the inner surface to the outer surface. The intensity of stresses and the annular stress in the process of the phase transition vary non-monotonically and in different ways for the inner and outer surfaces. On the inner surface, these stresses have the maximum values at the points of the beginning and the end of the phase transition; and the minimum values take place at an intermediate point. On the contrary, in case of the external surface, the minimum values of stresses are observed at the beginning and the end of the phase transition, while the maximum value take place at the intermediate point of the process.

© PNRPU

---

## Введение

Моделирование процесса накопления деформаций прямого превращения или мартенситной неупругости для статически неопределимых систем из сплавов с памятью формы (СПФ) требует решения соответствующих краевых задач. Простейшими такими проблемами являются задачи изгиба [1–6] и кручения [7–13] элементов из СПФ. Численному моделированию термомеханического поведения толстостенной трубы из СПФ в рамках структурно-аналитической теории поведения этих материалов [14] посвящены работы [14–19]. Используется как метод конечных разностей [18], так и метод конечных элементов [19]. Аналогичная задача в связанной постановке решена в [20]. Задачи о прямом и обратном фазовом превращении в трубе из СПФ, находящейся под действием внешней нагрузки в рамках термомеханической модели поведения СПФ [21], численно решены в [22–24]. Численно-аналитическое решение задачи о нагружении толстостенного цилиндра из СПФ внутренним давлением в режиме сверхупругости получено в [25]. Геометрически нелинейные осесимметричные задачи для термоупругих мартенситных фазовых переходов в круглых пластинках и оболочках вращения из СПФ решены в [26–28]. Конечно-элементное решение задачи для цилиндрической панели из СПФ получено в [29]. Задачи устойчивости для тонкостенной цилиндрической оболочки из СПФ при ее нагружении в режиме сверхупругости численно решались в [30–32].

В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [3, 33, 34] при несколько искусственном предположении о равномерном распределении по радиусу величины объемной доли мартенситной фазы в [35, 36] были получены аналитические решения связанных задач о прямом превращении для толстостенных цилиндра и сферы в жестко-фазово-структурной постановке при постоянных нагрузках. Было доказано, что в таких задачах действующие напряжения не меняются при фазовом переходе, деформации и смещения пропорциональны значению параметра фазового состава. Для цилиндра и сферы получены также аналитические решения задач о нагружении монотонно возрастающим внутренним давлением в режиме мартенситной неупругости [35, 36].

В данной работе получено численное решение аналогичных задач в рамках более реалистичного предположения о равномерном распределении по радиусу температуры, что соответствует процессу медленного охлаждения. Моделируется движение по материалу фронтов начала и завершения прямого фазового перехода.

## 1. Постановка задачи

Рассматриваются длинный толстостенный круговой цилиндр и сфера из СПФ с внутренним и внешним радиусами  $a$  и  $b$  в цилиндрической  $(r, \varphi, z)$  и сферической  $(r, \varphi, \chi)$  системах координат соответственно. Для цилиндра рассматривается случай плоской деформации:  $\varepsilon_z = 0$ . К внутренней поверхности оболочек приложено постоянное положительное давление  $p_a$ , внешнее давление для простоты не учитывается. Материал оболочек считается несжимаемым.

Для решения используется упрощенный вариант модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [3, 33, 34], определяющие соотношения которого имеют для прямого фазового превращения вид

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{phst}, \quad d\varepsilon_{ij}^{phst} = d\varepsilon_{ij}^{ph} + d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{\sigma_{ij}'}{2G}, \quad (1.2)$$

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t_\sigma)), \quad t_\sigma = t + \frac{\rho \sigma_i F_1(\sigma_i)}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad (1.3)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\rho \sigma_i F_1(\sigma_i)}{\Delta S}, \quad t = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad (1.4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \omega_{ij} dq, \quad \omega_{ij} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F_1(\sigma_i), \quad dq > 0, \quad (1.5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q_{st} F_2(\sigma_i) d\sigma_i. \quad (1.6)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^{phst}$  – тензоры полной, упругой и фазово-структурной деформации (температурная деформация в силу ее малости не учитывается);  $d\varepsilon_{ij}^{ph}, d\varepsilon_{ij}^{st}$  – приращения неупругой деформации за счет фазового или структурного переходов;  $\sigma_{ij}, \sigma_{ij}', \sigma_i$  – тензор де-

виатор и интенсивность напряжений;  $\rho$  – параметр материала, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового перехода;  $q$  – объемная доля мартенситной фазы;  $q_{st} \leq q$  – часть мартенсита представительного объема, испытывающая в рассматриваемый момент структурное превращение, под которым понимается происходящее при условии роста интенсивности напряжений выше максимального ранее достигнутого уровня увеличение степени ориентированности низкосимметричных мартенситных ячеек;  $G$  – сдвиговой модуль;  $M_s^0, M_f^0, M_s^\sigma, \Delta S$  – температуры начала и окончания прямого превращения в ненагруженном состоянии, температура начала прямого превращения при наличии напряжений и скачок объемной плотности энтропии при переходе от мартенситного состояния в аустенитное;  $F_1(\sigma_i), F_2(\sigma_i)$  – материальные функции, интерпретируемые как функции распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное и мартенситное фазовое состояние соответственно) [33, 34]; первая из этих функций с точностью до множителя  $\rho$  соответствует диаграмме прямого превращения, а вторая – диаграмме мартенситной неупругости. В соответствии с характерной формой этих диаграмм в качестве  $F_1(\sigma)$  берется функция распределения Лапласа  $F_1(\sigma) = \Phi_1(\sigma / \sigma_{01}), \Phi_1(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt$ , а в качестве

$F_2(\sigma)$  – функция распределения Вейбулла  $F_2(\sigma) = \Phi_2(\sigma / \sigma_{02}), \Phi_2(x) = 1 - \exp[-x^\alpha]$ .

Здесь  $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \alpha$  – параметры материала. В упрощенной системе определяющих соотношений (1.1)–(1.6) в отличие от оригинала [3,33,34] не учитывается переменность упругих модулей СПФ при фазовом переходе, деформации считаются несжимаемыми, процесс накопления деформаций прямого превращения не разделяется на составляющие, связанные с зарождением и развитием мартенситных мезоэлементов.

Рассматривается вариант связанной постановки краевой задачи, в рамках которого учитывается влияние действующих напряжений на процесс фазового перехода. Поле температур считается равномерно распределенным по радиусу оболочки, что соответствует достаточно медленному процессу охлаждения. В данном случае речь идет о равновесном процессе термоупругих фазовых превращений [37], которые происходят со скоростью изменения внешних воздействий. Если в случае медленного охлаждения образуются зоны неравномерной (более низкой) температуры, то в этих зонах прямое превращение ускоряется. В результате увеличивается скорость выделения латентного тепла фазового перехода. В зонах с более высокой по сравнению с окружающим материалом температурой наблюдается обратный эффект. За счет этих эффектов, а также благодаря явлению теплопроводности распределение температуры по материалу выравнивается.

Под решением поставленной задачи понимаются зависимости от температуры и радиальной координаты параметра фазового состава, напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, деформаций и смещений, удовлетворяющих соотношениям Коши и условию несжимаемости. Кроме того, напряжения, деформации, температура и параметр фазового состава удовлетворяют сформулированной выше системе определяющих соотношений. Начальными условиями для всех перечисленных величин являются значения, соответствующие упругому решению при заданной величине внутреннего давления  $p_a$ . Начальные условия

ставятся при температуре начала прямого превращения  $T = M_s^\sigma$ , определенной в соответствии с (1.4) для напряженного состояния, соответствующего упругому решению. Граничные условия сводятся к равенствам  $\sigma_r(a, T) = -p_a$ ,  $\sigma_r(b, T) = 0$ .

## 2. Разрешающие соотношения

В качестве параметра процесса выбирается безразмерная величина  $t$  (1.4). В силу симметрии решаемых задач все искомые функции зависят только от  $r$  и  $t$ . Дифференцируя (1.3), с учетом (1.4) можно получить

$$dq = M(q)dt + N(q, \sigma_i)d\sigma_i, \quad (2.1)$$

$$M(q) = \sqrt{q(1-q)}, \quad N(q, \sigma_i) = M(q)f(\sigma_i), \quad f(\sigma_i) = \frac{\rho[F_1(\sigma_i) + \sigma_i F_1'(\sigma_i)]}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)}.$$

Подставляя (2.1) в (1.1), (1.5) и учитывая (1.6), для приращения деформаций можно получить

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}'}{2G} + A_{ij}dq + B_{ij}d\sigma_i, \quad (2.2)$$

$$A_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \rho F_1(\sigma_i), \quad B_{ij} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q_{st} F_2'(\sigma_i).$$

Для цилиндра в условиях плоской деформации или сферы справедливы соотношения

$$\sigma_i = \lambda |\sigma_\phi - \sigma_r|, \quad \sigma_\phi' = a_\phi \sigma_i, \quad \sigma_r' = a_r \sigma_i, \quad (2.3)$$

где для цилиндра  $\lambda = \sqrt{3}/2$ ,  $a_\phi = -a_r = 1/\sqrt{3}$ , а для сферы  $\lambda = 1$ ,  $a_\phi = 1/3$ ,  $a_r = -2/3$ .

Уравнение равновесия в радиальном направлении в силу симметрии задачи записывается в виде

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = k \frac{\sigma_\phi - \sigma_r}{r}, \quad (2.4)$$

где для цилиндра  $k = 1$ , а для сферы  $k = 2$ . С учетом (2.3) при условии  $\sigma_\phi > \sigma_r$ , выполняющемся для рассматриваемого случая, соотношение (2.4) можно переписать в виде

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \beta \frac{\sigma_i}{r}, \quad (2.5)$$

где для цилиндра  $\beta = 2/\sqrt{3}$ , а для сферы  $\beta = 2$ . Интегрируя (2.5) по  $r$  и удовлетворяя граничные условия  $\sigma_r(a) = -p_a$ ,  $\sigma_r(b) = 0$ , получаем

$$\sigma_r(r, t) = -p_a + \beta \int_a^r \sigma_i(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi}, \quad (2.6)$$

$$\int_a^b \sigma_i(r, t) \frac{dr}{r} = \frac{p_a}{\beta}. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.2) для кольцевой деформации с учетом (2.3) запишется в виде

$$d\varepsilon_\varphi = 0,5a_\varphi \left\{ \left[ \frac{1}{G} + 3\rho_D q_{st} F_2'(\sigma_i) \right] d\sigma_i + 3\rho_D F_1(\sigma_i) dq \right\}$$

или с учетом (2.1)

$$d\varepsilon_\varphi = 0,5a_\varphi [X(\sigma_i, q) d\sigma_i + Y(\sigma_i, q) dt], \quad (2.8)$$

$$X(\sigma_i, q) = 1/G + 3\rho_D q_{st} F_2'(\sigma_i) + 3\rho_D F_1(\sigma_i) N(\sigma_i, q),$$

$$Y(\sigma_i, q) = 3\rho_D F_1(\sigma_i) M(q).$$

Условие несжимаемости в рамках теории малых деформаций  $\varepsilon_r + k\varepsilon_\varphi = 0$  вместе с соотношениями Коши  $\varepsilon_r = du/dr$ ,  $\varepsilon_\varphi = u/r$ , где  $u$  – радиальное смещение, приводят к дифференциальному уравнению  $du/dr + ku/r = 0$ , общее решение которого имеет вид

$$u = \frac{C(t)}{r^k}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{C(t)}{r^{k+1}}, \quad \varepsilon_r = -\frac{kC(t)}{r^{k+1}}. \quad (2.9)$$

Здесь  $C(t)$  – произвольная функция интегрирования. Дифференцируя второе уравнение (2.9) и используя (2.8), можно написать

$$\frac{dC(t)}{r^{k+1}} = 0,5a_\varphi [X(\sigma_i, q) d\sigma_i + Y(\sigma_i, q) dt]. \quad (2.10)$$

В (2.10)  $q = q(t, \sigma_i)$  определяется с помощью (1.3), (1.4). Записывая соотношение (2.10) в конечных приращениях, можно получить

$$\frac{2\Delta C}{a_\varphi r^{n+1}} = X(\sigma_i(t, r), q) [\sigma_i(t, r) - \sigma_i(t - \Delta t, r)] + Y(\sigma_i(t, r), q) \Delta t. \quad (2.11)$$

Здесь приращение интенсивности напряжений заменено на выражение  $\Delta\sigma_i = \sigma_i(t, r) - \sigma_i(t - \Delta t, r)$ ,  $\sigma_i(t - \Delta t, r)$  – зависимость интенсивности напряжений от  $r$  на предыдущем слое по параметру процесса  $t$ , которая считается известной.

Для заданного значения  $t$  соотношение (2.11) определяет  $\sigma_i(t, r)$  как неявную функцию  $r$  с параметром  $\Delta C$ . Подстановка этой неявной функции в (2.7), интегрирование по  $r$  и решение получающегося уравнения позволяют определить параметр  $\Delta C$  и значение  $C(t)$ , если известно предыдущее значение  $C(t - \Delta t)$ . Для найденного значения  $\Delta C$  путем решения уравнения (2.11) определяется зависимость интенсивности напряжений от  $r$  для рассматриваемого значения  $t$ . После этого путем интегрирования (2.6) определяется для рассматриваемого значения  $t$  распределение по радиусу величины  $\sigma_r$ . По найденным функциям  $\sigma_i(t, r)$  и  $\sigma_r(t, r)$  с помощью (2.3) определяется кольцевое напряжение  $\sigma_\varphi(t, r)$ . Деформации и смещения определяются по найденной функции  $C(t)$  с помощью (2.9).

Для определения значения  $t = t_0$ , при котором начинается фазовый переход, решается соответствующая упругая задача. Определяется значение  $\sigma_i^0 = \sigma_i(a)$  на внутренней по-

верхности оболочки, где интенсивность напряжений в упругом решении максимальна. Тогда начальное значение  $t_0$  определяется из условия  $T = M_s^\sigma(a)$ , или

$$t_0 = -\frac{\rho\sigma_i^0 F_1(\sigma_i^0)}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)}. \quad (2.12)$$

Ввиду того, что в данной постановке  $q$  зависит от  $r$ , задача осложняется тем, что в начале процесса на части  $[a, r_1]$  отрезка  $[a, b]$  происходит прямое превращение, а на части  $[r_1, b]$  имеет место только упругое деформирование и справедливы вместо (2.11) упругие соотношения

$$\frac{\Delta C}{a_\varphi r^{n+1}} = \frac{1}{2G_A} [\sigma_i(t, r) - \sigma_i(t - \Delta t, r)]. \quad (2.13)$$

Координата границы начала фазового превращения  $r_1$  заранее неизвестна и должна находиться в процессе решения задачи. На границе между упругой частью оболочки и частью, испытывающей фазовый переход, непрерывными считаются радиальное смещение и радиальное напряжение. Температура является непрерывной в силу предположения о ее равномерном распределении по радиусу. Кроме того, на границе предполагается выполненным условие  $q(r_1 - 0) = q(r_1 + 0) = 0$  непрерывности при переходе через эту границу параметра фазового состава. Из этого соотношения, условия непрерывности температуры и формул (1.3) следует непрерывность при переходе через эту границу интенсивности напряжений, и, согласно (2.3), – непрерывность кольцевого напряжения.

На последнем этапе процесса появляется зона  $[a, r_2]$ , где фазовый переход уже завершен, может происходить при определенных условиях, помимо упругого деформирования, структурный переход и справедливо соотношение, полученное из (2.11) путем подстановки  $q = 1$ :

$$\frac{\Delta C(t)}{a_\varphi r^{n+1}} = \left[ \frac{1}{2G_M} + \frac{3}{2} \rho_D F_2'(\sigma_i) \right] [\sigma_i(t, r) - \sigma_i(t - \Delta t, r)]. \quad (2.14)$$

При этом на оставшейся части  $[r_2, b]$  фазовый переход еще продолжается. Наконец, для очень толстых оболочек возможна ситуация, когда существуют одновременно все три области  $[a, r_2]$ ,  $[r_2, r_1]$ ,  $[r_1, b]$ . Расчеты показывают, что для рассматриваемых в данной работе толщин  $a/b > 1/5$ , этот последний случай, когда на внутренней стороне оболочки фазовый переход уже прошел, а на внешней еще не начинался, не наблюдается. На границе  $r = r_2$  выполняются такие же условия непрерывности, что и на границе  $r = r_1$ .

Решение задачи осложнено тем, что для каждой точки оболочки и для каждого слоя по  $t$  нужно проверять условия осуществления структурного перехода. В качестве таких условий в некоторой точке оболочки рассматривается следующий критерий [33,34]:

$$\delta\sigma_i > 0, \quad \sigma_i = \sigma_i^{\max}, \quad (2.15)$$

где  $\sigma_i^{\max}$  – максимальное значение интенсивности напряжений за все время существования рассматриваемого мартенситного объема. Алгоритм определения величины  $q_{st}$  для подстановки в (2.8) изложен в [3].

### 3. Алгоритм решения

Решение искалось методом Эйлера на сетке по  $t$  с фиксированным шагом  $\delta t$  и на сетке по  $r$  с фиксированным шагом  $\delta r$ . Сначала решалась упругая задача, по этому решению находилось с помощью (2.12) начальное значение  $t = t_0$ , и найденные распределения по  $r$  напряжений, деформаций и смещений приписывались именно этому начальному значению  $t_0$ . Пусть решение на предыдущем шаге для  $t = t_{k-1}$  известно. Решение для следующего значения  $t = t_k = t_{k-1} + \delta t$  находится с помощью внутренних итераций. Для нового значения  $t$  с помощью (1.3) определяется функция  $t_\sigma$ , причем на первой внутренней итерации в качестве функции  $\sigma_i(t, r)$  для подстановки в (1.3) используется  $\sigma_i(t_{k-1}, r)$ , а для последующих итераций – функция  $\sigma_i(t, r)$ , найденная на предыдущей внутренней итерации. С помощью найденного приближения для функции  $t_\sigma(r, t_k)$  находится очередное приближение для координат границ начала  $r_1$  и окончания  $r_2$  зоны фазового перехода исходя из уравнений  $t_\sigma(r_1, t_k) = 0$  и  $t_\sigma(r_2, t_k) = 1$  соответственно. Для найденных значений  $r_1$  и  $r_2$  производится вычисление интеграла (2.7) как функции неизвестной величины  $\Delta C$  с использованием неявной функции  $\sigma_i(t_k, r)$ , являющейся решением уравнения (2.11) для  $r \in (r_1, r_2)$ , решением уравнения (2.13) для  $r \in (r_2, b)$  и решением уравнения (2.14) для  $r \in (a, r_1)$ . Решение уравнения (2.7) позволяет найти величину  $\Delta C$ , и по ее значению с помощью (2.11), (2.13) и (2.14) – очередное приближение для распределения  $\sigma_i(t_k, r)$ . Далее находится следующее приближение для  $t_\sigma(r, t_k)$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  и т.д. путем внутренних итераций до тех пор, пока значения координат границ зон фазового перехода будут отличаться от значений на предыдущей итерации меньше чем на заданную малую величину. Проведенные расчеты показывают, что при решении на сетке по  $t$ , состоящей из 100 делений, 10 внутренних итераций на каждом шаге вполне достаточно. По достижении сходимости процесса внутренних итераций определяются все искомые переменные задачи для данного значения  $t_k$ , после чего можно переходить к следующему шагу по  $t$ :  $t_{k+1} = t_k + \delta t$  и т.д. до тех пор, пока фазовый переход не завершится на внешней поверхности оболочки. Для анализа возможных погрешностей, связанных с дискретизацией, задачи решались на сетках по  $t$  и  $r$  различной густоты. Установлено, что при переходе от сеток из 50 делений по  $r$  и 100 делений по  $t$  к сетке, состоящей из 100 делений по  $r$  и 200 делений по  $t$ , полученное решение существенно не меняется. Относительные ошибки по величине интенсивности напряжений не превосходили 0,5 %. Изменения по значению параметра  $C$ , а значит, по деформациям и смещениям были еще меньше. Приведенные ниже результаты получены на сетке, состоящей из 50 делений по  $r$  и 100 делений по  $t$ .

### 4. Анализ результатов

При решении использовались следующие параметры материала, соответствующие никелиду титана: модуль сдвига  $G = 21000$  МПа;  $\rho = 0,08$ ,  $M_s^0 = 313$  К,  $M_f^0 = 293$  К,  $\varepsilon_0 = 0,001$ ,  $\Delta S = 0,322$  МПа/К,  $\sigma_{01} = 176$  МПа,  $\sigma_{02} = 350$  МПа.



На рис. 1–3 изображены графики зависимости величины объемной доли мартенситной фазы  $q$  от безразмерной радиальной координаты  $r/a$  для различных моментов процесса прямого превращения. Задача решена для цилиндра с отношением радиусов  $b/a = 1,5$ , материал которого претерпевает прямое превращение под действием внутреннего давления, безразмерное значение которого  $P = p_a / \sigma_{10} = 0,1$ .

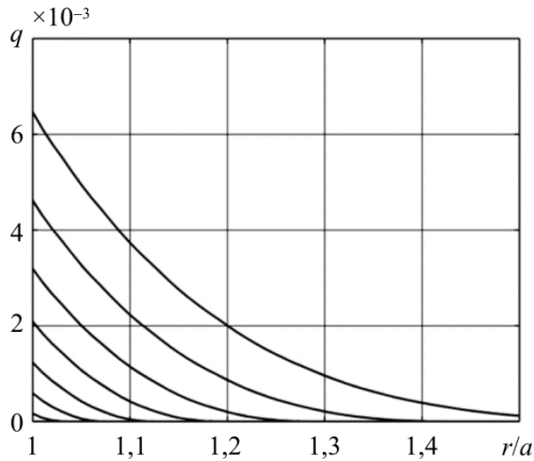


Рис. 1. Распространение фронта начала фазового перехода по толщине сферической оболочки

Fig. 1. Propagation of the beginning of the phase transition front along the thickness of the spherical shell

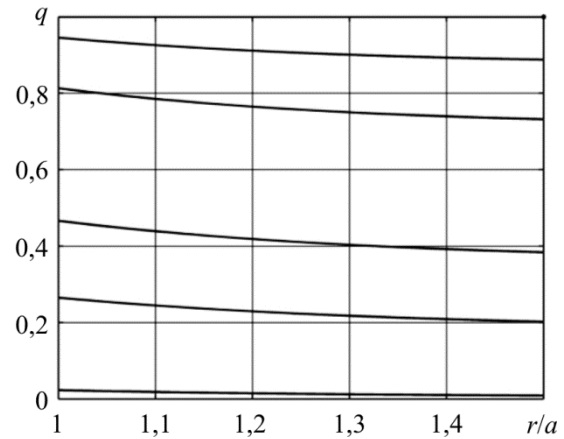


Рис. 2. Распределение доли мартенситной фазы по радиусу в случаях, когда фазовый переход происходит по всей толщине

Fig. 2. Distribution of the martensitic volume part along the radius in cases when the phase transition takes place along the whole thickness

Рис. 1 соответствует первому этапу процесса от появления малой зоны фазового перехода на внутренней поверхности оболочки (нижняя кривая) и до того момента, когда фронт начала фазового перехода дошел до внешней поверхности оболочки и на этой поверхности начался фазовый переход (верхняя кривая). Радиальная координата фронта начала фазового перехода определяется координатой точки пересечения каждой из кривых с осью абсцисс, тогда как ордината пересечения той же кривой с осью ординат равна значению объемной доли мартенсита на внутренней поверхности оболочки в тот же момент времени. Как видно, процесс движения фронта начала фазового перехода в радиальном направлении происходит достаточно быстро. За время этого движения величина  $q$  на внутренней поверхности оболочки успевает вырасти с нуля до значения, меньшего 0,007. Рис. 2 соответствует промежуточному этапу процесса, когда фазовый переход происходит по всей толщине оболочки, еще продолжаясь на ее внутренней поверхности и уже происходя на ее внешней поверхности. Как видно, величина  $q$  убывает с ростом  $r$ , однако весьма умеренно. Рис. 3 соответствует завершающему этапу фазового перехода, когда он уже закончился на внутренней поверхности оболочки, но еще продолжается на внешней поверхности. Абсцисса точки пересечения каждой из кривых с прямой  $q = 1$  соответствует положению фронта окончания фазового перехода. О скорости передвижения этого фронта говорит тот факт, что он преодолевает расстояние, равное толщине оболочки за то время, пока значение объемной доли мартенсита на внешней поверхности оболочки изменяется от значения  $q_1 = 0,985$  до значения  $q_2 = 1$ .

На рис. 4 для той же задачи изображены графики зависимости безразмерного параметра интенсивности напряжений  $S_i = \sigma_i / \sigma_{01}$  от параметра температуры  $t$  для значений радиальной координаты  $r = a$  (кривая 1),  $r = (a+b)/2$  (кривая 2) и  $r = b$  (кривая 3). Темным кружком на каждой кривой обозначен момент начала фазового перехода, светлым – момент его окончания. Согласно приведенным графикам в процессе фазового перехода интенсивность напряжений меняется немонотонно.

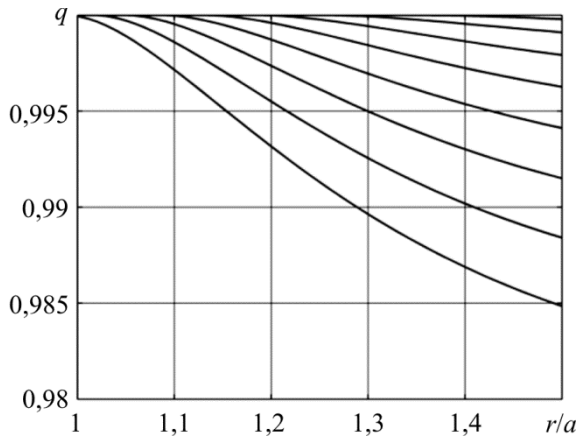


Рис. 3. Движение по материалу фронта завершения фазового превращения  
 Fig. 3. Motion along the material front of the end of the phase transition

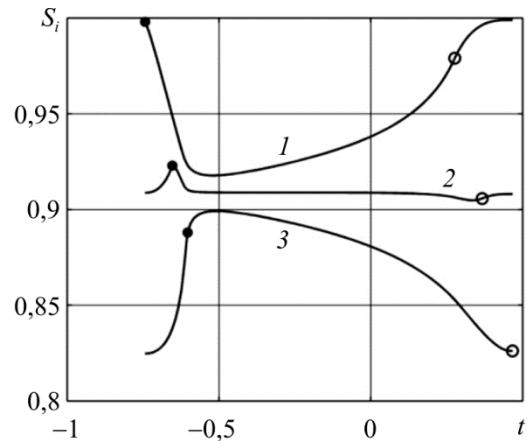


Рис. 4. Изменение интенсивности напряжений в процессе фазового перехода  
 Fig. 4. Alteration of the stress intensity during the phase transition

Отсюда следует, что применять для решения данной задачи положение об активных процессах пропорционального нагружения [34], что позволило бы получить аналитическое решение типа найденных в [35, 36], некорректно. Тем самым обосновывается необходимость использования для решения задачи численной процедуры. С другой стороны, размах изменения интенсивности напряжений в процессе полного прямого превращения лежит в пределах 5 % от средней величины, так что в первом грубом приближении этими изменениями можно пренебречь.

На рис. 5 для той же задачи приведены графики изменения в процессе фазового перехода безразмерных значений  $S_\varphi = \sigma_\varphi / \sigma_0$  наиболее опасных кольцевых напряжений (обозначение кривых то же, что и на рис. 4). Как видно, напряжения на внешней поверхности оболочки (кривая 3) на протяжении большей части фазового перехода превосходят напряжения на внутренней поверхности (кривая 1). Однако максимальные за всю историю фазового перехода кольцевые напряжения достигались все же на внутренней поверхности оболочки.

На рис. 6 аналогичные графики построены для сферической оболочки с отношением радиусов  $b/a = 1,5$  и давления  $P = 0,6$ . Как видно, в данном случае достаточно высоких нагрузок максимальные значения кольцевых напряжений достигаются на внутренней поверхности оболочки, но не в начале, а в конце фазового перехода. Аналогичные явления «перегрузки» в конце прямого превращения по сравнению с упругим решением обнаружены для случая изгиба [1, 3] и кручения [8, 12].

На рис. 7, а изображены графики зависимости безразмерного параметра интенсивности напряжений  $S_i$  от параметра фазового состава  $q$  для внутренней (кривые 1) и внешней (кривые 2) поверхностей цилиндра при  $a/b = 1,5$ ,  $P = 0,3$ . Нижняя кривая первой серии

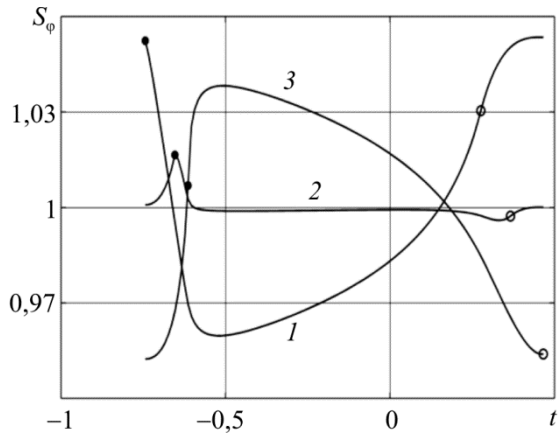


Рис. 5. Изменение кольцевого напряжения в цилиндре в процессе фазового перехода  
Fig. 5. Alteration of the circumferential stresses in the cylinder during the phase transition

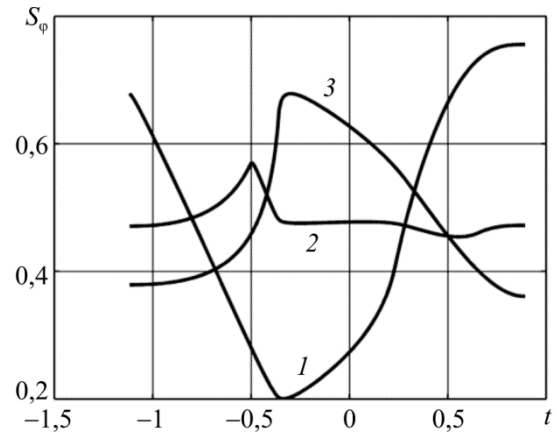


Рис. 6. Изменение кольцевого напряжения в толстостенной сфере в процессе фазового перехода  
Fig. 6. Alteration of the circumferential stresses in a thick-walled sphere during the phase transition

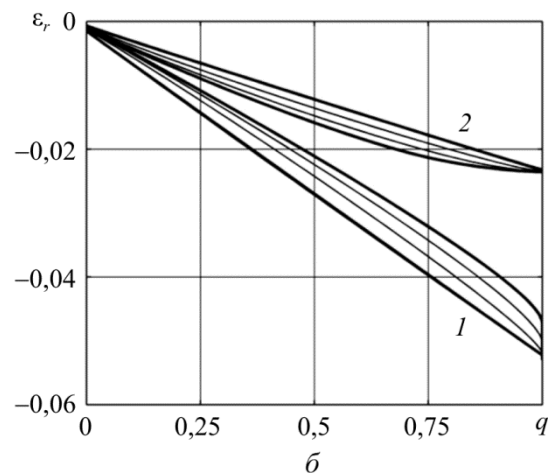
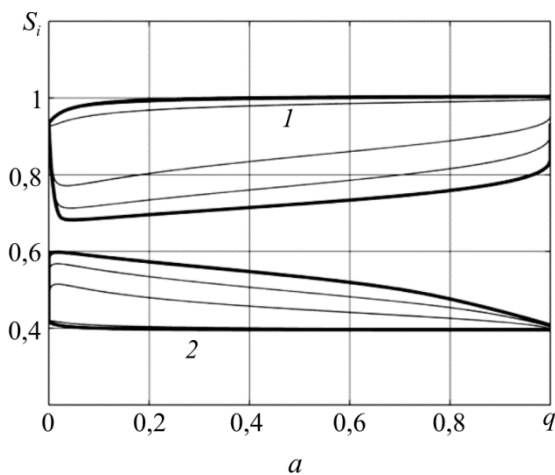


Рис. 7. Сравнение решений, полученных в предположении о равномерном распределении по материалу температуры или объемной доли мартенситной фазы:  
 $a$  – интенсивность напряжений;  $b$  – радиальная деформация

Fig. 7. The comparison of solutions obtained within the assumption of a homogeneous distribution of the temperature in the material or a volume part of the martensitic phase.  
 $a$  is the intensity of stresses;  $b$  is the radial deformation

и верхняя кривая второй серии соответствуют полученному численному решению при  $\Delta S = 0,322$  МПа/К (значение, характерное для никелида титана). Последовательно отходящие от этих кривых тонкие линии построены по результатам численного решения той же задачи, но для значений  $\Delta S$  в 2, 5 и 100 раз больших указанной величины. При этом тонкие кривые приближаются к верхней толстой линии первой серии и нижней толстой линии второй серии, которые получены при решении аналогичной задачи о прямом превращении в предположении о равномерном распределении по радиусу объемной доли мартенситной фазы (с учетом упругих деформаций) в [35, 36]. Такое асимптотическое поведение является естественным, поскольку при  $\Delta S \rightarrow \infty$  согласно формуле (1.3) получается  $t_c = t$  и из пред-

положения о равномерном распределении по радиусу температуры, принятом при численном решении задачи, описываемом в данной работе, следует положение о равномерном распределении по радиусу объемной доли мартенсита, в рамках которого найдены аналитические решения в [35, 36].

Аналогичный результат для радиальной деформации в той же задаче изображен на рис. 7, б (серии кривых обозначены так же). Нижняя жирная линия второй серии и верхняя первой серии соответствуют численному решению, полученному для  $\Delta S = 0,322$ . Нижняя прямая первой серии и верхняя второй являются предельными для численного решения при  $\Delta S \rightarrow \infty$  и одновременно соответствуют аналитическому решению той же задачи в предположении о равномерном распределении по радиусу величины  $q$ . Обнаруженное совпадение двух решений, найденных различными способами, говорит в пользу достоверности полученных результатов.

## Заключение

Получены решения связанных задач о прямом превращении в толстостенных цилиндре и сфере из СПФ под действием постоянного давления в предположении о равномерном распределении температуры по радиусу оболочки. Данное решение соответствует медленному процессу охлаждения.

Установлено, что в процессе фазового перехода интенсивность напряжений на внутренней и внешней границах оболочек меняется немонотонно, поэтому применять для решения данных задач положение об активных процессах пропорционального нагружения некорректно.

Показано, что кольцевые напряжения на внутренней стороне оболочки в процессе фазового перехода могут становиться меньше кольцевых напряжений на ее внешней стороне.

В случае достаточно высоких значений внутреннего давления интенсивность напряжений на внутренней поверхности оболочек в точке завершения фазового перехода может превосходить значение той же величины в упругом решении, т.е. в точке начала фазового перехода.

## Благодарности/Acknowledgments

Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 17-01-00216.

## Библиографический список

1. Мовчан А.А. Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т. 39, № 1. – С. 87–97.
2. Gordaninejad F., Wu W. A two – dimensional shape memory alloy/elastomer actuator // International Journal of Solids and Structure. – 2001. – Vol. 38. – P. 3393–3409.
3. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 37–53.
4. Yang S., Xu M. Finite element analysis of 2D SMA beam bending // Acta Mechanica Sinica. – 2011. – Vol. 27. – No. 5. – P. 738–748.
5. Сафронов П.А. Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке, находящейся под действием изги-

бающего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 114–127.

6. Сафронов П.А. Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разносопротивляемости этих сплавов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 69–89.

7. Mirzaeifar R., Desroches R., Yavari A. Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol. 42. – No. 8. – P. 797–806.

8. Саганов Е.Б. Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 454–468.

9. Саганов Е.Б. Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 4. – С. 663–674.

10. Саганов Е.Б. Решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 4. – С. 548–562.

11. Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion / R. Mirzaeifar, R. DesRoches, A. Yavari, K. Gall // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2012. – Vol. 47. – P. 118–128.

12. Мовчан А.А. Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 143–154.

13. Mirzaeifar, R., Desroches, R., Yavari, A. A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol. 48. – No. 3–4. – P. 611–624.

14. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.

15. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Шляхов С.А. Расчет напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы, изготовленной из материала с памятью формы и испытывающей действие переменной температуры и давления // Материалы с новыми функциональными свойствами: материалы семинара. – Новгород, Боровичи, 1990. – С. 161–163.

16. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Шляхов С.А. Численное моделирование эволюции напряженного состояния толстостенного цилиндра из материала, испытывающего мартенситные превращения при силовом воздействии // Актуальные проблемы прочности: материалы XXV Всесоюз. семинара. – Н. Новгород, 1991. – Т. 1. – С. 135–139.

17. Волков А.Е., Лихачев В.А., Ю.Ф. Слуцкер. Расчет термомеханического соединения методами структурно-аналитической теории. Функционально-механические свойства сплавов с мартенситным каналом неупругости // Актуальные проблемы прочности: материалы XXVII Межреспубл. семинара. – Ухта, 1992. – С. 31–36.

18. Likhachev V.A., I. Razov A., E. Volkov A. Finite difference simulation of a thermomechanical coupling // Proceedings of the Second International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies SMST-97, Asilomar Conference Center, Pacific Grove. – USA, California, 1997. – P. 335–340.

19. Какулия Ю.Б., Шарыгин А.М. Численное моделирование напряжений и деформаций в толстостенной трубе из материала с памятью формы // Журнал функциональных материалов. – 2007. – № 8. – С. 303–313.

20. Кузнецов А.В. Численное решение связанной осесимметричной задачи о прямом превращении для сплавов с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т. 3–4. – С. 71–77.

21. Волков А.Е., Сахаров В.Ю. Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы // Изв. РАН. Серия физическая. – 2003. – Т. 67. – № 6. – С. 845–851.

22. Волков А.Е., Кухарева А.С. Моделирование термомеханических соединений труб тонкостенными и толстостенными муфтами из никелида титана // Актуальные проблемы прочности: материалы XLVII Междунар. конф., 1 – 5 июля 2008 г., Н. Новгород. Ч. 1. – Н. Новгород. – 2008. – С. 54–56.
23. Волков А.Е., Кухарева А.С. Расчет напряженно-деформированного состояния в бесконечном цилиндре из сплава с памятью формы при охлаждении и нагреве с различными скоростями // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15, № 1. – С. 128–136.
24. Волков А.Е., Кухарева А.С. Расчет напряженно-деформированного состояния в цилиндре из TiNi при охлаждении под нагрузкой и разгрузке // Изд. РАН. Серия физическая. – 2008. – Т. 72, № 9. – С. 1337–1340.
25. A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure / R. Mirzaeifar, M. Shakeri, R. DesRoches, A. Yavari // Archive of Applied Mechanics, 2011. – Vol. 81. – No. 8. – P. 1093–1116.
26. Шкутин Л.И. Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 163–171.
27. Шкутин Л.И. Анализ осесимметричных деформаций пластин и оболочек в термоцикле фазовых превращений // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 204–210.
28. Шкутин Л.И. Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 138 с.
29. Mirzaeifar R., Shakeri M., Sadighi M. Nonlinear finite element formulation for analyzing shape memory alloy cylindrical panels // Smart Materials and Structures. – 2009. – Vol. 18. – No. 3. – 035002.
30. Amini M.R., Nemat-Nasser S. Dynamic buckling and recovery of thin cylindrical shells // SPIE Proceedings. Vol. 5761. Smart structure and materials. Active materials: Behavior and mechanics / ed. by W.D. Armstrong. – 2005. – P. 450–453.
31. Tang Z., Li D. Quasi-static axial buckling behavior of TiNi thin-walled cylindrical shells // Thin-Walled structures. – 2012. – Vol. 51. – P. 130–138.
32. Buckling and Recovery of NiTi Tubes Under Axial Compression / D. Jiang, N. Bechle, C.M. Landis, S. Kyriakides // International Journal of Solids and Structures. – 2016. – Vol. 80. – P. 52–63.
33. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2015. – № 2. – С. 78–95.
34. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 44–56.
35. Мовчан А.А., Левин А.С. Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 221–236.
36. Машихин А.Е., Мовчан А.А. Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2016. – № 3. – С. 100–114.
37. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситном превращении // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66. – Вып. 2. – С. 211–215.

## References

1. Movchan A.A. Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloys. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, vol. 39. no. 1, pp. 143-151.
2. Gordaninejad F., Wu W. A two – dimensional shape memory alloy/elastomer actuator // International Journal of Solids and Structure, 2001, vol. 38, pp. 3393-3409.

3. Mishustin I.V., Movchan A.A. Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses. *Mechanics of Solids*, 2014, vol.49, no.1, pp. 27-39.

4. Yang S., Xu M. Finite element analysis of 2D SMA beam bending. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, vol. 27, no. 5, pp. 738-748.

5. Safronov P.A. Uchet raznosoprotivliaemosti splavov s pamiat'iu formy pri reshenii zadach o martensitnoi neuprugosti i priamom prevrashchenii v balke, nakhodiashcheisia pod deistviem izgibaiushchego momenta [Tension-compression asymmetry incorporating in solution the problem of martensitic non-elasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under bend]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2016, vol. 22, no.1, pp.114-127.

6. Safronov P.A. Reshenie zadach o martensitnoi neuprugosti i priamom fazovom prevrashchenii v balke iz splava s pamiat'iu formy s uchetom uprugikh deformatsii i raznosoprotivliaemosti etikh splavov [Solution martensite inelasticity and direct transformation problems in the shape memory alloys beam with taking into account the elastic strains and tension – compression asymmetry of the properties of these materials]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. 2017, vol. 22, no. 1, pp. 69-89.

7. Mirzaeifar, R., Desroches, R., Yavari, A., 2010. Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars. *Mechanics of Materials*, 2010, vol. 42, no. 8, pp.797-806.

8. Saganov E.B. Reshenie zadachi o priamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2014, vol. 20, no.3, pp.454-468.

9. Saganov E.B. Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2014, vol.20, no.4, pp. 663-674.

10. Saganov E.B. Reshenie dvazhdy svyazanoi zadachi krucheniia tonkostennykh trubok iz splava s pamiat'iu formy v rezhime sverkhuprugosti [Twice coupled twisting problems solution of thin-walled tube of shape memory alloys in superelastic regime]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2015, vol. 21, no.4, pp. 548-562.

11. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A., Gall K. Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, vol. 470, pp. 118-128

12. Movchan A.A. Torsion of prismatic beams from shape memory alloys. *Mechanics of Solids*, 2000, vol. 35, no. 6, pp. 119-128.

13. Mirzaeifar, R., Desroches, R., Yavari, A. A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs // *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, no. 3-4, pp. 611-624.

14. Likhachev V.A., Malinin V.G. Strukturno – analiticheskaiia teoriia prochnosti. [Structural – analytical strength theory]. *Saint Petersburg, Nauka*, 1993, 471 p.

15. Likhachev V.A., Malinin V.G., Shliakhov S.A. Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia tolstostennoi trubki, izgotovlennoi iz materiala s pamiat'iu formy i ispytyvaiushchei deistvie peremenoj temperatury i davleniia [Stress-strains state design thick-walled tube made of shape memory alloys under an action of varying temperature and pressure]. *Materialy s novymi funktsional'nymi svoistvami*, 1990, pp. 161-163.

16. Likhachev V.A., Malinin V.G., Shliakhov S.A. Chislennoe modelirovanie evoliutsii napriazhennogo sostoianiia tolstostennogo tsilindra iz materiala, ispytyvaiushchego martensitnye prevrashcheniia pri silovom vozdeistvii [Numerical simulation stress state evolution of thick-walled cylinder from material with martensite phase transition at force action]. *XXV Vsesoiuznyi seminar «Aktual'nye problemy prochnosti»*. Materialy, 1991, vol. 1, pp. 135-139.

17. Volkov A.E., Likhachev V.A., Iu.F. Slutsker. Raschet termomekhanicheskogo soedineniia metodami strukturno-analiticheskoi teorii [Calculation of thermo-mechanical joint methods of the structural-analytical theory]. *Funktsional'no-mekhanicheskie svoistva splavov s martensitnym kanalom neuprugosti: Materialy XXVII Mezhrеспubl. seminara «Aktual'nye problemy prochnosti»*, 1992, pp. 31-36.

18. Likhachev V. A., I. Razov A., E. Volkov A. Finite difference simulation of a thermomechanical coupling. *Proceedings of the Second International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies SMST-97, Asilomar Conference Center, Pacific Grove, California, USA*, 1997, pp. 335-340.

19. Kakuliia Iu.B., Sharygin A.M. Chislennoe modelirovanie napriazhenii i deformatsii v tolstostennoi trubke iz materiala s pamiat'iu formy. [Numerical simulation of stresses and strains in a thick-walled tube of a material with shape memory]. *Zhurnal funktsional'nykh materialov*, 2007, no. 8, pp. 303-313.

20. Kuznetsov A.V. Chislennoe reshenie svyaznoi osesimmetrichnoi zadachi o priamom prevrashchenii dlia splavov s pamiat'iu formy [Numerical solution of the coupled axisymmetric problem of direct transformation for shape memory alloys]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 1996, vol.3-4, pp.71-77.
21. Volkov A.E., Sakharov V.Iu. Termomekhanicheskaia makromodel' splavov s efektom pamiati formy Volkov A.E., Sakharov V.Iu. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Serii fizicheskaja*, 2003, vol. 67, no. 6. pp. 845-851.
22. Volkov A.E., Kukhareva A.S. Modelirovanie termomekhanicheskikh soedinenii trub tonkostennymi i tolstostennymi muftami iz nikelida titana [Modeling of thermomechanical pipe connections of thin-walled and thick-walled couplings of titanium nickelide] // XLVII Mezhdunarodnaia konferentsiia «Aktual'nye problemy prochnosti» [XLVII International conference "Actual problems of strength"], 1-5 iulia 2008 g., Nizhnii Novgorod: *materialy konferentsii. Ch. 1. Nizhnii Novgorod*, 2008, pp. 54-56.
23. Volkov A.E., Kukhareva A.S. Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoiannii v beskonechnom tsilindre iz splava s pamiat'iu formy pri okhlazhdenii i nagreve s razlichnymi skorostiami [The calculation of the stress-strain state in an infinite cylinder made of an alloy with shape memory during cooling and heating at different speeds]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2009, vol. 15, no.1, pp. 128-136.
24. Volkov A.E., Kukhareva A.S. Calculation of the Stress-Strain State of a TiNi Cylinder Subjected to Cooling under Axial Force and Unloading. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2008, vol. 72, no. 9, pp.1267-1270.
25. Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R. Yavari, A. A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, vol. 81, no. 8, pp. 1093-1116.
26. Shkutin L. I. Analysis of axisymmetric phase strains in plates and shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no. 2, pp. 285-291.
27. Shkutin L. I. Axisymmetric deformation of plates and shells with phase transformations under thermal cycling. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 330-335.
28. Shkutin L.I. Nelineinye deformatsii i katastrofy tonkikh tel [Nonlinear deformation and the disaster of the subtle bodies]. *Novosibirsk, Izd-vo SO RAN*, 2014, 138 p.
29. Mirzaeifar R. Shakeri M. Sadighi M. Nonlinear finite element formulation for analyzing shape memory alloy cylindrical panels. *Smart Materials and Structures*, 2009, vol. 18, no.3, 035002.
30. Amini M.R. Nemat-Nasser S. Dynamic buckling and recovery of thin cylindrical shells// SPIE Proceedings. V. 5761. Smart structure and materials 2005. *Active materials: Behavior and mechanics, edited by W.D. Armstrong*, pp. 450-453.
31. Tang Z., Li D. Quasi-static axial buckling behavior of TiNi thin-walled cylindrical shells. *Thin-Walled structures*, 2012, vol. 51, pp. 130-138.
32. Jiang D., Bechle N., Landis C.M., Kyriakides S., Buckling and Recovery of NiTi Tubes Under Axial Compression. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 80, pp. 52-63. DOI: 10.1016/j.ijssolstr.2015.10.022
33. Mishustin I.V., Movchan A.A. Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys. *Mechanics of Solids*, 2015, vol.50, no. 2, pp. 176-190.
34. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys. *Mechanics of Solids*, 2011. vol. 46, No. 2, pp. 194-203.
35. Movchan A.A., Levin A.S. Zadacha o priamom martensitnom prevrashchenii v tolstostennoi sfere iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashcheisia pod deistviem postoiannogo davleniia [The problem of direct martensitic transformation in a thick-walled sphere made of an alloy with shape memory under the effect of constant pressure]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2015, vol. 21, no 2, pp. 221-236.
36. Mashikhin A.E., Movchan A.A. Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, no. 3, pp. 321-333.
37. Kurdyumov G.V., Handros L.G. O termouprugom ravnesii pri martensitnom prevraschenii [On thermoelastic equilibrium in the martensitic transformation]. *Doklady akademii nauk SSSR*, 1949, vol. 66. iss. 2. pp. 211-215.