



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.08

УДК 539.3

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ДЕРЕВЯННЫХ БРУСЬЕВ

Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 05 июня 2017 г.

Принята: 01 сентября 2017 г.

Опубликована: 30 сентября 2017 г.

#### Ключевые слова:

слоистые конструкции,  
физическая нелинейность,  
гибридное проектирование.

### АННОТАЦИЯ

Рассмотрена проблема определения напряженно-деформированного состояния и проектирования гибридных деревянных брусьев. В общем случае брус представляет собой стержень, состоящий из нескольких слоев. Количество слоев принципиально не ограничено. Каждый слой может быть выполнен из различных материалов. Геометрия поперечного сечения слоя изменяется в широких пределах. Поперечное сечение стержня может быть как постоянным, так и переменным по длине. Стержень испытывает прямой поперечный изгиб с растяжением-сжатием. Учитывается физическая нелинейность, а также разная сопротивляемость материала растяжению и сжатию.

Деформации и перемещения стержня считаются малыми величинами, что позволяет записывать уравнения равновесия для недеформированного состояния. Принимается справедливой теория плоских сечений Бернулли и упрощенное выражение кривизны плоской кривой.

Определение напряженно-деформированного состояния стержня сводится к решению системы из двух нелинейных алгебраических уравнений третьей степени. Для ее решения нагрузка разбивается на ряд шагов в соответствии с историей нагружения, что позволяет провести линеаризацию системы разрешающих уравнений.

Большое внимание уделено проектированию гибридных брусьев. Рассматривается как параметрическое, так и функциональное проектирование. Выполненные примеры расчета позволили показать, что использование критерия равнопрочности в совокупности с принципами гибридного проектирования (когда конструкция создается путем рационального сочетания материалов с различными механическими свойствами) позволяет значительно снизить вес конструкции и стоимость затраченного материала. Также показано сильное влияние разной сопротивляемости материала на получаемые при проектировании поперечные размеры брусьев. Продемонстрирована возможность возникновения скрытых механизмов разрушения, когда предельное состояние достигается во внутренних слоях бруса.

© ПНИПУ

© Немировский Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор,

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Болтаев Артем Иванович – аспирант, e-mail: boltaev\_artem@mail.ru

Yuriy V. Nemirovsky – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Artem I. Boltaev – PhD Student, e-mail: nemirov@itam.nsc.ru



## CALCULATION AND DESIGN OF HYBRID WOODEN BEAMS

Yu.V. Nemirovsky, A.I. Boltaev

Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 05 June 2017  
Accepted: 01 September 2017  
Published: 30 September 2017

#### Keywords:

Layered structures, physical  
nonlinearity, hybrid design.

### ABSTRACT

The problem of determining the stress-strain state and designing hybrid wooden beams is considered. In general, the bar is a rod consisting of several layers. In principle, the number of layers is not unlimited. Each layer can be made of different materials. The geometry of the cross section of a layer may vary a lot. The cross-section of the rod can be either constant or variable in length. The rod experiences a straight transverse bending with stretching-compression. The physical nonlinearity, as well as the different material resistance to stretching and compression are taken into account.

The deformations and displacements of the rod are considered to be small values, and it allows one to write the equilibrium equations for the undeformed state. We accept a valid theory of Bernoulli flat sections and a simplified expression for the curvature of a plane curve.

The determination of the stress-strain state of the rod is reduced to solving a system of two nonlinear algebraic equations of the third order. To solve it, the load is divided into a number of steps in accordance with the loading history, which allows to linearize the system of resolving equations.

Much attention is paid to the design of hybrid beams. Both parametric and functional designs are considered. Based on the calculation examples, it is shown that the use of the criterion of the equal strength in combination with the principles of hybrid design allows to significantly reduce the material consumption of the structure. Also a strong effect of different materials resistance during stretching and compression is shown on the transverse dimensions of the bars obtained during the design. The possibility of latent destruction is demonstrated, when the limiting state is reached in the inner layers of the beam.

© PNRPU

---

## Введение

Древесина является прекрасным конструкционным материалом [1]. Ей присущи такие характерные положительные качества, как малый удельный вес: при средней плотности  $550 \text{ кг/м}^3$  она в 14 раз легче стали и в 4,5 раза легче бетона. Высокая удельная прочность [1]: для древесины этот показатель ориентировочно равен  $25500 \text{ м}^2/\text{с}^2$ , для строительной стали –  $29500 \text{ м}^2/\text{с}^2$ , а для бетона класса В25 –  $5800 \text{ м}^2/\text{с}^2$ . Также она обладает малой теплопроводностью, высокой химической стойкостью и высокой технологичностью. Является самовозобновляемым и экологически чистым материалом.

Основные недостатки древесины – пороки, неоднородность свойств, анизотропность и другие [1, 3] – в значительной степени нивелируются при производстве промышленных клееных деревянных конструкций.

Клееные деревянные конструкции давно и широко используются во многих странах [2–3]. Технологические возможности их изготовления позволяют создавать из обычных и маломерных материалов монолитные конструкции любых размеров и сечений, убирая тем самым ограничения в сортаменте.

Одним из примеров таких конструкций может служить построенный в Австрии дробетонный мост пролетом 85 м [4]. В последнее время все интенсивнее ведутся исследования, связанные с высотным деревянным домостроением. Особое внимание этому вопросу уделяется за границей. Так, в сентябре 2017 года планируется завершить строительство 53-метрового деревянного здания, которое станет самым высоким зданием из дерева в мире [5].

Клеевые конструкции имеют ряд преимуществ по сравнению с другими видами деревянных конструкций: экономия пиломатериалов и других сопутствующих материалов (металлов, пластиков, бетонов) за счет создания рациональных сечений с различными профильными очертаниями; почти безотходное производство за счет применения маломерных материалов пониженного качества при создании монолитных изделий необходимых размеров; возможность исключения или, наоборот, включения в состав монолитного слоистого изделия других эффективных конструкционных материалов (металлов, пластмасс, стеклянных и керамических материалов) [6–8]. Подбор параметров геометрии и пород гибридных деревянных конструкций с предварительными процессами технологического облагораживания составляющих элементов (усушка, пропитка с полимеризацией) позволяют еще на этапе технологического производства ликвидировать несущественные коробления и резко снизить склонность к растрескиванию и загниванию.

С другой стороны, стандартные подходы строительной механики не позволяют производить расчет и проектирование таких конструкций. В первую очередь это связано с проблемой учета физической нелинейности и разнородности древесины [9–11]. Методы расчета стержневых конструкций с учетом физической нелинейности [20–31] рассматривают в основном однородные конструкции и не уделяют должного внимания изучению особенностей деформирования такого сильно разнородного материала как древесина. Поэтому встает необходимость создания новых надежных методов расчета и рационального проектирования гибридных деревянных конструкций, учитывающих реальные диаграммы деформирования материала.

## 1. Напряженно-деформированное состояние (НДС) бруса

Схема бруса в декартовой прямоугольной системе координат  $xOz$  представляет собой стержень, состоящий из нескольких слоев. Слои могут быть выполнены из различных материалов, могут располагаться как горизонтально (рис. 1, *a*), так и вертикально (рис. 1, *б*). Общее число слоев принципиально не ограничено, их отсчет идет сверху вниз и слева направо. Условия контакта слоев считаются совершенными – отсутствуют взаимные смещения любого направления в плоскости контакта.

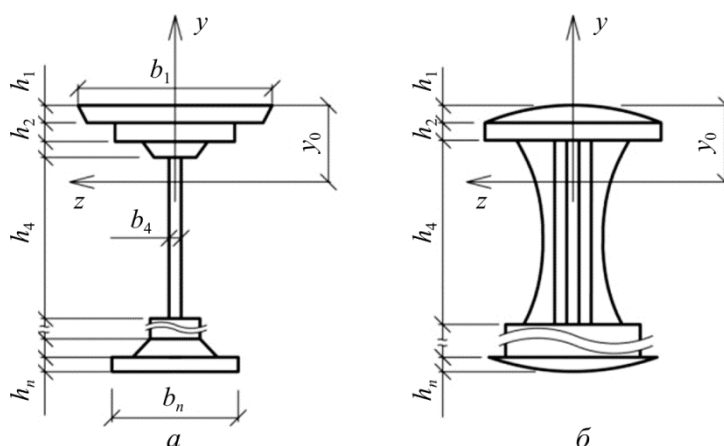


Рис. 1. Поперечное сечение стержня: *a* – горизонтальное расположение слоев; *б* – горизонтальное и вертикальное расположение слоев

Fig. 1. Cross-section of the rod: *a* – horizontal arrangement of the layers; *b* – horizontal and vertical arrangement of the layers

Начало системы координат  $xuz$  помещаем в левый конец стержня. Плоскость  $xu$  – плоскость геометрической и физической симметрии стержня. Ось  $x$  совпадает с продольной осью стержня и имеет определенную геометрическую привязку к поперечному сечению. В данном случае расположим ось  $x$  на расстоянии  $y_0$  от верхнего края сечения (рис. 1).

Геометрия всех слоев задана в виде набора параметров  $b_i, h_i$ , которые в общем случае могут быть функциями координат  $x, y$  и  $z$ :  $b_i = b_i(x, y, z), h_i = h_i(x, y, z)$ . При этом должна соблюдаться симметрия относительно плоскости  $xu$ . Вес и стоимость стержня соответственно

$$V = \sum_{i=1}^{n_{\text{сл}}} \gamma_i \int_{V_i} dV_i, C = \sum_{i=1}^{n_{\text{сл}}} c_i \int_{V_i} dV_i. \quad (1)$$

Здесь  $\gamma_i, c_i$  – удельный вес и удельная стоимость материала  $i$ -го слоя,  $n_{\text{сл}}$  – количество слоев. Интегрирование в (1) ведется по объему  $i$ -го слоя стержня.

В общем случае стержень испытывает прямой поперечный изгиб с растяжением-сжатием. Все нагрузки приведены к продольной оси стержня – оси  $x$ .

Деформации и перемещения будем считать малыми. Это позволит записывать уравнения равновесия для недеформированного состояния [12]:

$$\frac{dM_z}{dx} + Q_y + m_z = 0, \frac{dQ_y}{dx} + q_y = 0, \frac{dN}{dx} + q_x = 0. \quad (2)$$

Здесь  $N, Q_y$  – проекции вектора внутренних усилий на оси  $x$  и  $y$ ;  $M_z$  – проекция вектора внутреннего момента на ось  $z$ . Точка приложения вектора внутренних усилий лежит на оси стержня. Примем следующее правило знаков: если внешняя нормаль к поперечному сечению имеет положительное (отрицательное) направление, то компоненты внутренних усилий положительны, если их направление совпадает с положительным (отрицательным) направлением соответствующей координатной оси. Величины  $q_x, q_y$  – проекции вектора распределенной нагрузки, приложенной к оси стержня,  $m_z$  – проекция вектора распределенного момента на ось  $z$ .

Интегрируя уравнения (2), получим выражения для внутренних усилий

$$\begin{aligned} N(x) &= N(0) - \int_0^x q_x dx, Q_y(x) = Q_y(0) - \int_0^x q_y dx, \\ M_z(x) &= M_z(0) - Q_y(0)x - \int_0^x m_z dx + \int_0^x \left( \int_0^x q_y dx \right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае если стержень статически определимый, то значения внутренних усилий в начале координат определяем из условий равновесия узлов. Иначе необходимо составлять дополнительные условия совместности деформаций.

Принимается справедливой теория плоских сечений Бернулли и упрощенное выражение кривизны плоской кривой. В соответствии с данными ограничениями связь между деформациями и перемещениями стержня выражается следующими известными соотношениями [12]:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0(x) - \kappa \cdot y, \quad \kappa(x) = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa$  – продольная деформация на уровне оси стержня и изменение кривизны оси стержня;  $w, u_0$  – вертикальное и горизонтальное перемещение точек оси стержня. Интегрируя соотношения (4), получим

$$w(x) = w(0) + \varphi(0) \cdot x + \int_0^x \left( \int_0^x \kappa dx \right) dx, \varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \kappa dx, \quad (5)$$

$$u_0(x) = u_0(0) + \int_0^x \varepsilon_0 dx.$$

Величины  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$  и  $u_0(0)$  находим из условий закрепления стержня.

Диаграммы деформирования древесины при растяжении и сжатии вдоль волокон даны на рис. 2. Они построены по данным кратковременных испытаний малых чистых (без пороков) образцов.

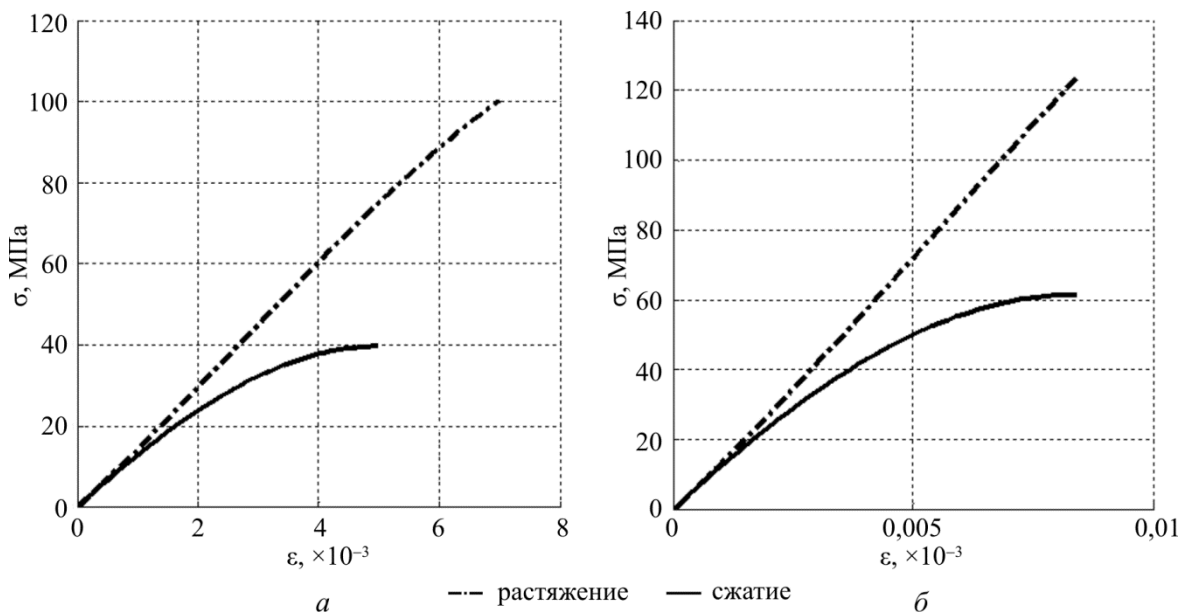


Рис. 2. Диаграммы деформирования ели (а) [11] и лиственницы (б) [10]  
 Fig. 2. Diagrams of deformation of spruce (a) [11] and larch (b) [10]

Общим для данных диаграмм является то, что при растяжении древесина ведет себя практически линейно вплоть до разрушения, а при сжатии уже в области малых напряжений резко проявляет физическую нелинейность. Предел прочности на растяжение, как правило, больше предела прочности на сжатие. Данные особенности деформирования характерны и для других пород древесины.

Основываясь на данных испытаниях [9–11] будем моделировать древесину материалом с однородной и сплошной средой, обладающей в общем случае нелинейно упругими свойствами. Связь между нормальными напряжениями и деформациями  $i$ -го слоя выражается степенным многочленом [13]:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^3 E_{ij} \varepsilon_i^j, \quad -\varepsilon_{i*}^- \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i*}^+, \quad (6)$$

где  $E_{ij}$  – константы, зависящие от механических свойств  $i$ -го слоя стержня;  $\varepsilon_{i*}^{\pm}$  – предельно допустимые продольные деформации  $i$ -го слоя при растяжении (+) и сжатии (–). Ис-

пользование кубической зависимости (6) позволяет учитывать характерную для дерева разносопротивляемость при растяжении и сжатии, а также нелинейный характер связи между напряжениями  $\sigma_i$  и деформациями  $\varepsilon_i$  [9–11].

Основываясь на вышеприведенных положениях, в работе [14] была получена разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений 3-й степени относительно двух неизвестных  $\kappa$  и  $\varepsilon_0$ :

$$\begin{cases} \sum_{t=0}^3 (-\kappa)^t \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_0^{j-t} \sum_{i=1}^{n_{cl}} E_{ij} d_{it} = N, \\ \sum_{t=0}^3 (-\kappa)^t \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_0^{j-t} \sum_{i=1}^{n_{cl}} E_{ij} d_{i(t+1)} = -M_z. \end{cases} \quad (7)$$

$$d_{it} = \int_{S_i} y^t dS_i, C_j^t = \frac{j!}{t!(j-t)!}. \quad (8)$$

Коэффициенты  $E_{i0}$  равны нулю и введены для получения краткой и удобной для решения записи. В (8) интегрирование ведется по площади поперечного сечения  $i$ -го слоя стержня. Приняв  $E_{ij} = 0 (j = 2,3)$ , получим определяющие уравнения для слоистого, линейно-упругого стержня. Если при этом  $n_{cl} = 1$ , то приходим к уравнениям технической теории изгиба стержней [12].

Условие прочности задается соотношением

$$|\varepsilon_{i,max}^{\pm}| \leq \varepsilon_{i*}^{\pm} (i = 1 \dots n_{cl}), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_{i,max}^{\pm}$  – максимальные продольные деформации растяжения (+) и сжатия (–)  $i$ -го слоя. Проверка выполнения условия прочности осуществляется в каждом слое поперечного сечения для его верхних и нижних границ. Устойчивость стержня считается обеспеченной.

Полученные выше статические, геометрические и физические зависимости в общем случае характеризуются сложными уравнениями относительно искомых функций. В связи с этим удобно представить все необходимые функции в дискретном виде:

$$F = [F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_{n+1}]^T, \quad (10)$$

где  $n$  – число расчетных участков при разбиении стержня. Узлы аппроксимации задаются исходя из конкретных условий задачи. Например, в окрестности резкого изменения функций внутренних усилий шаг может сгущаться и наоборот.

Дискретное представление функций позволяет упростить решение разрешающих уравнений: от уравнений относительно неизвестных функций приходим к уравнениям относительно неизвестных значений функций в узлах аппроксимации. И, что немаловажно, приспособливает полученные уравнения для вычислений на компьютере.

## 2. Решение системы нелинейных уравнений

Получение решения системы (7) в аналитическом виде представляет значительные трудности. В связи с этим будем использовать численный метод, основанный на линеаризации разрешающих уравнений.

Разбиваем загрузку стержня на  $n_{ш}$  шагов в соответствии с действительной историей приложения нагрузки. Количество шагов подбирается таким, что на каждом шаге происходит незначительное изменение внутренних усилий и, следовательно, обобщенных деформаций. Это позволяет представить основные неизвестные  $\varepsilon_0$  и  $\kappa$  в линеаризованном виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0(n+1)}^t &= \left(\varepsilon_{0(n)} + d\varepsilon_{0(n+1)}\right)^t \approx \varepsilon_{0(n)}^{t-1} \left(\varepsilon_{0(n)} + t \cdot d\varepsilon_{0(n+1)}\right), \\ \kappa_{(n+1)}^t &= \left(\kappa_{(n)} + d\kappa_{(n+1)}\right)^t \approx \kappa_{(n)}^{t-1} \left(\kappa_{(n)} + t \cdot d\kappa_{(n+1)}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь  $n$  – номер шага нагружения;  $\varepsilon_{0(n)}$  и  $\kappa_{(n)}$  – значения неизвестных на  $n$  шаге нагружения;  $d\varepsilon_{0(n+1)}$  и  $d\kappa_{(n+1)}$  – приращения неизвестных на  $n+1$  шаге нагружения.

Подставляем (11) в (7) и после преобразований получаем

$$\begin{aligned}\left(p_0 - \kappa_{(n)}p_1 + \kappa_{(n)}^2p_2 - \kappa_{(n)}^3p_3\right) + d\kappa_{(n+1)}\left(-p_1 + 2\kappa_{(n)}p_2 - 3\kappa_{(n)}^2p_3\right) &= N_{(n+1)}, \\ \left(p_0' - \kappa_{(n)}p_1' + \kappa_{(n)}^2p_2' - \kappa_{(n)}^3p_3'\right) + d\kappa_{(n+1)}\left(-p_1' + 2\kappa_{(n)}p_2' - 3\kappa_{(n)}^2p_3'\right) &= -M_{z(n+1)}.\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}p_t &= \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t-1} \left(\varepsilon_{0(n)} + (j-t)d\varepsilon_{0(n+1)}\right) D_{jt}, D_{jt} = \sum_{i=1}^{n_{сз}} E_{ij} d_{it}, \\ p_t' &= \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t-1} \left(\varepsilon_{0(n)} + (j-t)d\varepsilon_{0(n+1)}\right) D_{j(t+1)}.\end{aligned}\tag{13}$$

Выражаем из первого уравнения (12)  $d\kappa_{(n+1)}$  и подставляем во второе. После преобразований получаем квадратное уравнение относительно  $d\varepsilon_{0(n+1)}$ :

$$T_1 d\varepsilon_{0(n+1)}^2 + T_2 d\varepsilon_{0(n+1)} + T_3 = 0.\tag{14}$$

$$\begin{aligned}T_1 &= K_2 K_4' - K_2' K_4, T_2 = \left(N_{(n+1)} + K_1\right) K_4' - \left(-M_{z(n+1)} + K_1'\right) K_4 + K_2 K_3' - K_2' K_3, \\ T_3 &= \left(N_{(n+1)} + K_1\right) K_3' - \left(-M_{z(n+1)} + K_1'\right) K_3, \\ K_1 &= -\sum_{t=0}^3 \left(-\kappa_{(n)}\right)^t \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{jt}, K_2 = -\sum_{t=1}^3 t \left(-\kappa_{(n)}\right)^{t-1} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{j(t-1)}, \\ K_3 &= \frac{\partial K_1}{\partial \kappa_{(n)}} = -\sum_{t=0}^3 t \left(-\kappa_{(n)}\right)^{t-1} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{jt}, \\ K_4 &= \frac{\partial K_2}{\partial \kappa_{(n)}} = -\sum_{t=1}^3 t(t-1) \left(-\kappa_{(n)}\right)^{t-2} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{j(t-1)}, \\ K_1' &= -\sum_{t=0}^3 \left(-\kappa_{(n)}\right)^t \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{j(t+1)}, K_2' = -\sum_{t=1}^3 t \left(-\kappa_{(n)}\right)^{t-1} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{jt}, \\ K_3' &= \frac{\partial K_1'}{\partial \kappa_{(n)}} = -\sum_{t=0}^3 t \left(-\kappa_{(n)}\right)^{t-1} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{j(t+1)}, \\ K_4' &= \frac{\partial K_2'}{\partial \kappa_{(n)}} = -\sum_{t=1}^3 t(t-1) \left(-\kappa_{(n)}\right)^{t-2} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_{0(n)}^{j-t} D_{jt}.\end{aligned}\tag{15}$$

Решаем (14) относительно  $d\varepsilon_{0(n+1)}$ :

$$d\varepsilon_{0(n+1)} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_3T_1}}{2T_1}, d\varepsilon_{0(n+1)} = -\frac{T_3}{T_2} \text{ при } T_1 = 0. \quad (16)$$

Первое уравнение (16) дает два значения  $d\varepsilon_{0(n+1)} - d\varepsilon_{0(n+1)}^{(1)}$  и  $d\varepsilon_{0(n+1)}^{(2)}$ . Для того чтобы выбрать из них одно действительное, вычисляем  $d\kappa_{(n+1)}^{(1)}$  и  $d\kappa_{(n+1)}^{(2)}$  по (12). После этого находим пары обобщенных деформаций  $\varepsilon_{0(n+1)}^{(i)}, \kappa_{(n+1)}^{(i)}$  ( $i = 1-2$ ) из (11). Подставляем их в (7) и получаем значения внутренних усилий  $M_{z(n+1)}^{(i)}$  и  $N_{(n+1)}^{(i)}$  ( $i = 1-2$ ). Действительные значения  $\varepsilon_{0(n+1)}^{(i)}, \kappa_{(n+1)}^{(i)}$  должны удовлетворять следующим условиям: полученные с помощью них величины  $M_{z(n+1)}^{(i)}$  и  $N_{(n+1)}^{(i)}$  должны быть равными или близкими по величине к заданным значениям  $M_{z(n+1)}$  и  $N_{(n+1)}$ ; должно выполняться условие прочности (9).

Пройдя все шаги итерационного процесса, находим окончательные значения  $\varepsilon_{0(n_{ш})}$  и  $\kappa_{(n_{ш})}$ . Значения обобщенных деформаций на первом шаге загрузки принимаются нулевыми:  $\varepsilon_{0(1)} = \kappa_{(1)} = 0$ .

В случае если стержень находится в безызгибном состоянии растяжения-сжатия,  $\kappa = 0$ , а  $\varepsilon_0$  определяется по известным формулам [15] из решения кубического уравнения.

$$\sum_{j=0}^3 \varepsilon_0^j \sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{ij} d_{i0} = N. \quad (17)$$

Следуя [15], преобразуем (17) к стандартному виду

$$\varepsilon_0^3 + a\varepsilon_0^2 + b\varepsilon_0 + c = 0, \quad (18)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{i2} d_{i0}}{\sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{i3} d_{i0}}, b = \frac{\sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{i1} d_{i0}}{\sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{i3} d_{i0}}, \quad (19)$$

$$c = \left( \sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{i0} d_{i0} - N \right) / \sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{i3} d_{i0}, \sum_{i=1}^{n_{сн}} E_{i3} d_{i0} \neq 0.$$

Делаем замену переменной

$$\varepsilon_0 = y - a/3 \quad (20)$$

и приводим (17) к «неполному» виду

$$y^3 + py + q = 0, \quad (21)$$

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{3}\right)^2. \quad (22)$$

В зависимости от знака  $Q$  и  $p$  получим следующие значения корней «неполного» кубического уравнения (21):



1. Если  $Q < 0$ , то  $p < 0$  и

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y_{2,3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left( \frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \right), \quad \cos \alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}}. \quad (23)$$

2. Если  $Q \geq 0$ , то  $p > 0$  и

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ctg}(2\alpha), \quad y_{2,3} = \sqrt{\frac{p}{3}} \left( \operatorname{ctg}(2\alpha) \pm i\sqrt{3} \operatorname{cosec}(2\alpha) \right). \quad (24)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \left( \frac{\beta}{2} \right)} \left( \left| \alpha \right| \leq \frac{\pi}{4} \right), \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2}{q} \sqrt{\left( \frac{p}{3} \right)^3} \left( \left| \beta \right| \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

3. Если  $Q \geq 0$ , то  $p < 0$  и

$$y_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \operatorname{cosec}(2\alpha), \quad y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left( \operatorname{cosec}(2\alpha) \pm i\sqrt{3} \operatorname{ctg}(2\alpha) \right). \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \left( \frac{\beta}{2} \right)} \left( \left| \alpha \right| \leq \frac{\pi}{4} \right), \quad \sin \beta = \frac{2}{q} \sqrt{\left( -\frac{p}{3} \right)^3} \left( \left| \beta \right| \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Во всех случаях берется действительное значение кубического корня.

Подставляем получившиеся значения корней в (20) и находим  $\varepsilon_0$ . Далее выбираем тот корень, который соответствует физическому смыслу задачи. Отбрасываются все мнимые значения корней. Также знаки  $N$  и  $\varepsilon_0$  должны совпадать, то есть положительное (отрицательное) значение продольной силы должно создавать положительную (отрицательную) деформацию. Из оставшихся корней принимаем наименьший по модулю.

С другой стороны, к уравнению (17) можно применить численный метод, использованный выше при решении системы уравнений (7). Для этого подставляем линеаризированное значение  $\varepsilon_0$  из (11) в (17) и после преобразований получаем

$$d\varepsilon_{0(n+1)} = \left( N_{(n+1)} - \sum_{j=0}^3 \varepsilon_{0(n)}^j D_{j0} \right) / \sum_{j=0}^3 j \cdot \varepsilon_{0(n)}^{j-1} D_{j0}. \quad (26)$$

На первом шаге загрузки принимаем  $\varepsilon_{0(1)} = 0$ . Вычислив  $d\varepsilon_{0(n+1)}$ , находим  $\varepsilon_{0(n+1)}$  из (11). Пройдя все шаги итерационного процесса, получаем окончательные значения  $\varepsilon_{0(n_{ш})}$ .

Вычислив обобщенные деформации стержня, находим перемещения по формулам (5) и нормальные напряжения по (6).

### 3. Проектирование равнопрочных стержней

Пусть имеется стержень с заданной силовой нагрузкой и определенными условиями закрепления. Требуется путем изменения размеров поперечного сечения стержня вдоль оси добиться его равнопрочности. Стержень будем считать равнопрочным, если в каждом поперечном сечении как минимум в двух точках выполняется условие (9) со знаком равенства [16]:

$$|\varepsilon(y_{j*})| = \varepsilon_{i*}^{\pm} (j = 1, 2). \quad (27)$$

Здесь  $y_{j*}$  –  $y$  координата точки, в которой достигнуто предельное значение деформаций.

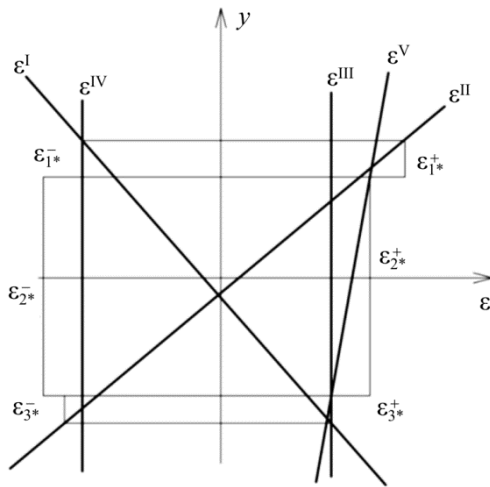


Рис. 3. Возможные предельные распределения  $\varepsilon(y)$

Fig. 3. Possible limit distributions of  $\varepsilon(y)$

Многослойный стержень, выполненный из различных материалов, может иметь большое количество вариантов предельных распределений  $\varepsilon(y)$ , обеспечивающих выполнение критерия равнопрочности (27). На рис. 3 для трехслойного сечения показаны предельные деформации  $\pm\varepsilon_{i*}^{\pm}$  и линии, отражающие распределение деформаций  $\varepsilon(y)$ .

Каждое предельное распределение деформаций соответствует определенным значениям внутренних усилий. Так, линии  $\varepsilon^I$  и  $\varepsilon^{II}$  отличаются знаками изгибающего момента  $M_z$ , а  $\varepsilon^{III}$  и  $\varepsilon^{IV}$  – знаками продольной силы. Для выбора действительного деформированного состояния необходимо использовать предварительную информацию о распределении деформации  $\varepsilon(y)$  в сечении. Подробно этот вопрос изложен в [16].

В данном случае для упрощения расчетов будем рассматривать только четыре предельных распределения  $\varepsilon(y)$ : I –  $\varepsilon(y_{\max}) = -\varepsilon_{1*}^-$ ,  $\varepsilon(y_{\min}) = \varepsilon_{n_{cl}*}^+$ ; II –  $\varepsilon(y_{\max}) = \varepsilon_{1*}^+$ ,  $\varepsilon(y_{\min}) = -\varepsilon_{n_{cl}*}^-$ ; III –  $\varepsilon(y_{1*}) = \varepsilon(y_{2*}) = \min(\varepsilon_{i*}^+)$ ; IV –  $\varepsilon(y_{1*}) = \varepsilon(y_{2*}) = \max(-\varepsilon_{i*}^-)$ . Здесь  $y_{\max(\min)}$  –  $y$  координата верхних (нижних) фибровых волокон.

Для каждого из предельных состояний можно найти обобщенные деформации, используя 1-е уравнение из (4):

$$\varepsilon_0(x) = \frac{\mp \varepsilon_{1*}^{\mp} y_{\max} \mp \varepsilon_{n_{cl}*}^{\pm} y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}, \quad \kappa(x) = \frac{\mp \varepsilon_{1*}^{\mp} \mp \varepsilon_{n_{cl}*}^{\pm}}{y_{\max} - y_{\min}}. \quad (28)$$

В (28) верхние знаки берутся для I, а нижние знаки для II предельного состояния. При осуществлении III и IV предельного состояния  $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_{i*}^+)$ ,  $\kappa = 0$  и  $\varepsilon_0 = \max(-\varepsilon_{i*}^-)$ ,  $\kappa = 0$  соответственно.

Для I и II предельных распределений  $\varepsilon$  необходимо делать проверку условия прочности во внутренних точках сечения.

Если стержень статически определимый, то, подставляя  $\varepsilon_0$  и  $\kappa$  в (7), будем иметь два уравнения, из которых можно найти два, предварительно выбранных для варьирования, размером  $b_i(h_i)$ . В случае статически неопределимого стержня к системе (7) добавляются уравнения совместности деформаций.

Определяемые размеры должны удовлетворять ограничениям, отражающим требования по обеспечению местной устойчивости, конструктивные, технологические, эксплуатационные и иные требования. В простейшем случае они представляют собой ограничения вида

$$b_i \geq b_{i \min} \geq 0, h_i \geq h_{i \min} \geq 0. \quad (29)$$

Будем рассматривать параметрическое и функциональное проектирование стержней. В случае параметрического проектирования стержень имеет постоянное поперечное сечение, а условие равнопрочности (27) выполняется в одном опасном сечении. Искомыми являются два выбранных размера опасного сечения  $b_i(h_i)$ .

При функциональном проектировании условие равнопрочности (27) выполняется по всей длине стержня, а определению подлежат уже функции двух выбранных размеров  $b_i(x)(h_i(x))$ .

#### 4. Параметрическая оптимизация 1

Рассмотрим однопролетную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 4, а). Поперечное сечение неизменно по длине и представляет собой двутавр, составленный из трех слоев (рис. 4, б). Все размеры, кроме ширины верхнего и нижнего поясов, являются заданными. На рис. 4 все размеры выражены в миллиметрах.

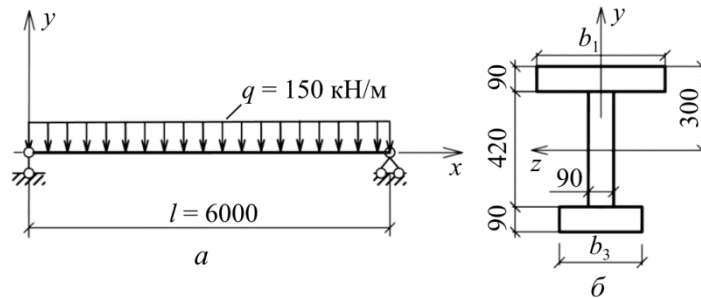


Рис. 4. К расчету балки: а – расчетная схема; б – поперечное сечение  
 Fig. 4. To calculate the beam: a – calculation scheme; b – the cross-section

Пусть имеется три породы древесины: 1 – сосна, 2 – лиственница и 3 – береза. Удельный вес древесины при 12-процентной влажности указан в табл. 1 по данным [17]. Значения величин  $E_{ij}$  и  $\varepsilon_{i*}^{\pm}$  в табл. 1 взяты из [18]. Предельные напряжения растяжения-сжатия  $\sigma_{i*}^{\pm}$  могут быть непосредственно вычислены по формуле (6):  $\sigma_{i*}^{\pm} = \sigma_i(\varepsilon_{i*}^{\pm})$ .

Таблица 1

#### Характеристики материалов

Table 1

#### Material characteristics

Номер материала	Порода древесины	$E_1$ $10^3$ МПа	$E_2$ $10^6$ МПа	$E_3$ $10^9$ МПа	$\varepsilon_+^*$ $10^{-3}$	$\varepsilon_-^*$ $10^{-3}$	$\gamma$ кН/м <sup>3</sup>	$c$ руб/м <sup>3</sup>
1	Ель	13,68	0,71	-0,09	7,0	-5,0	4,41	2000
2	Ясень	12,89	0,45	-0,04	11,0	-7,2	6,77	3000
3	Сосна	18,06	0,76	-0,18	7,4	-4,6	5,00	2100
4	Дуб	12,43	0,44	-0,03	7,4	-8,0	6,87	3200
5	Береза	16,36	0,96	-0,07	10,7	-5,3	6,28	1300
6	Лиственница	12,86	0,44	-0,03	8,4	-8,4	6,57	2500

Каждый слой двутавра может быть изготовлен из трех выбранных пород. В этом случае количество различных расположений пород в сечении равно количеству размещений с повторениями из 3 по 3 –  $\bar{A}_3^3 = 3^3 = 27$ . Для каждого варианта распределения пород найдем такую ширину верхнего и нижнего поясов, что в опасном сечении предельные деформации достигаются одновременно в двух уровнях.

Опасное сечение балки находится в середине пролета. Значения внутренних усилий в этом сечении:  $M_z = 675 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $N = 0 \text{ кН}$ . При таком распределении усилий осуществляется первое предельное состояние ( $\varepsilon(y) = \varepsilon^1$ ), а обобщенные деформации находим из (28):

$$\varepsilon_0 = \frac{-\varepsilon_{1*}^- y_{\max} + \varepsilon_{n_{\text{сн}}}^+ y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}, \quad \kappa = \frac{-\varepsilon_{1*}^- + \varepsilon_{n_{\text{сн}}}^+}{y_{\max} - y_{\min}}. \quad (30)$$

Подставляем  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa$  в (7) и после преобразований получаем систему двух линейных уравнений относительно  $b_1$  и  $b_3$ :

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + a_{13}b_3 &= N - a_{12}b_2, \\ a_{21}b_1 + a_{23}b_3 &= -M_z - a_{22}b_2. \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \sum_{t=0}^3 (-\kappa)^t d'_{it} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_0^{j-t} E_{ij}, \\ a_{2i} &= \sum_{t=0}^3 (-\kappa)^t d'_{i(t+1)} \sum_{j=t}^3 C_j^t \varepsilon_0^{j-t} E_{ij}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $d'_{it} = d_{it} / b_i$ . Решая систему (31), находим выражения для ширины искомых слоев:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_{23}(N - a_{12}b_2) + a_{13}(M_z + a_{22}b_2)}{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}, \\ b_3 &= -\frac{a_{21}(N - a_{12}b_2) + a_{11}(M_z + a_{22}b_2)}{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Зная все размеры поперечного сечения, находим  $\varepsilon_0$  и  $\kappa$  для всего стержня из решения системы (7) по методу, описанному в п. 2. Перемещения балки вычисляем по формулам (5). При этом  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$  и  $u_0(0)$  находим из условий:  $w(0) = w(l) = 0$ ,  $u_0(l) = 0$ . Результаты расчетов сведены в табл. 2.

Второй столбец табл. 2 содержит информацию о материале слоев. Так, шифр 132 означает, что первый слой выполнен из сосны, второй из березы и третий из лиственницы. В столбцах 3 и 4 приведена ширина слоев, вычисленная по формулам (33). Вес и стоимость балки даны в столбцах 5–6. В столбце 7 приведено максимальное значение прогиба.

Для сравнения был произведен расчет двух эталонных балок. Все их слои выполнены из древесины сосны. Поперечное сечение симметрично относительно осей  $y$  и  $z$ . Эталонная балка № 1 имеет двутавровое сечение, размеры которого даны на рис. 4, б. Ширина первого слоя равна ширине третьего. Поперечное сечение эталонной балки № 2 прямоугольное. Высота прямоугольного сечения  $h = 60$  см. Длина эталонных балок и интенсивность нагрузки  $q$  остается неизменной.

Таблица 2

## Результаты расчета

Table 2

## Calculation results

№	Материал слоев	$b_1$ , см	$b_3$ , см	$V$ , кН	$C$ , руб	$w_{max}$ , см	Слой, в котором достигнуты предельные деформации	Знак предельных деформаций
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	111	34,3	4,9	2,19	920,8	7,0	1,3	-,+
2	121	33,6	7,0	2,59	1027,2	7,1	1,3	-,+
3	221	17,7	11,4	2,43	935,3	9,2	1,3	-,+
4	211	разрушение во 2-м слое					2	-
5	131	34,9	4,3	2,48	739,9	7,1	1,3	-,+
6	331	32,4	5,4	2,67	583,7	7,5	1,3	-,+
7	311	31,6	5,9	2,37	765,6	7,4	1,3	-,+
8	321	31,5	7,8	2,77	876,9	7,4	1,3	-,+
9	231	разрушение во 2-м слое					2	-
10	112	37,6	2,8	2,25	940,8	7,7	1,3	-,+
11	122	36,4	4,7	2,64	1043,4	7,9	1,3	-,+
12	222	19,4	9,0	2,50	950,1	10,1	1,3	-,+
13	212	разрушение во 2-м слое					2	-
14	132	38,5	1,7	2,52	754,5	7,9	1,3	-,+
15	332	35,8	2,7	2,73	582,8	8,2	1,3	-,+
16	312	34,8	3,7	2,45	770,7	8,1	1,3	-,+
17	322	34,2	5,5	2,84	881,2	8,3	1,3	-,+
18	232	разрушение во 2-м слое					2	-
19	113	разрушение во 2-м слое					2	+
20	123	43,5	0,5	2,68	1063,6	9,3	2	+
21	223	23,7	3,0	2,43	908,2	11,4	1,3	-,+
22	213	разрушение во 2-м слое					2	-
23	133	отрицательное значение ширины 3-го слоя						
24	333	отрицательное значение ширины 3-го слоя						
25	313	разрушение во 2-м слое					2	+
26	323	40,8	0,9	2,91	860,3	9,7	1,3	-,+
27	233	разрушение во 2-м слое					2	-
28	Эталон 1	22,2	22,2	2,30	979,8	5,0	1	-
29	Эталон 2	$h = 60$ см, $b = 16,8$ см		3,00	1266,3	5,2	1	-

Неизвестную ширину слоев эталонных балок № 1 и 2 определяем из расчета. Задаем произвольное значение ширины и определяем НДС балки. После этого производим проверку по условию прочности (9). Если балка недогружена, то уменьшаем варьируемую ширину, иначе увеличиваем. Так поступаем до тех пор, пока продольные деформации не достигнут предельных значений. Результаты расчета эталонных балок даны в строках 28,29 табл. 2.

Анализируя данные табл. 2, можно отметить следующее:

1. Свойство существенной разносопротивляемости древесины привело к большому различию в ширине слоев 1, 3. Так, для балки, полностью выполненной из сосны,  $b_1 = 34,3$  см,  $b_3 = 4,9$  см. Наименьшее различие в ширине слоев у балки № 3:  $b_1 = 17,7$  см,  $b_3 = 11,4$  см.

2. Минимальный вес имеет балка № 1, максимальный – № 26. Балка № 1 легче эталонной балки № 1 в 1,05 раза, а эталонной балки № 2 в 1,37 раза.

3. Наилучшей с точки зрения стоимости оказалась балка № 15, наихудшей – № 20. Балка № 15 дешевле эталонной балки № 1 в 1,68 раза, а эталонной балки № 2 в 2,17 раза.

4. Максимальный прогиб имеет балка № 21, минимальный – № 1. Прогиб балки № 1 больше чем у эталонной балки № 1(2) в 1,40(1,35) раза. Балка с наименьшей стоимостью имеет в 1,64(1,58) раза больший прогиб, чем эталонная балка № 1(2).

5. Предельные деформации эталонных балок достигались в верхних фибровых волокнах. При этом максимальное значение продольных деформаций нижних фибровых волокон эталонной балки № 1 и № 2 достигало соответственно 74 % и 54 % от предельно допустимых. Это также является следствием разносопротивляемости древесины.

В отдельных случаях предельные деформации достигались раньше во втором слое, чем в первом и третьем. Для балок № 23–24 получено отрицательное значение ширины третьего слоя.

## 5. Параметрическая оптимизация 2

Рассмотрим вертикальную стойку, жестко закрепленную в опорном сечении (рис. 5, а). Стойка нагружена продольной силой  $N$  и равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Загружение нагрузками  $q$  и  $N$  начинается и заканчивается одновременно, а по времени идет равномерно. Поперечное сечение представлено трехслойным двутавром (рис. 5, б). В качестве искомых размеров примем ширину первого и третьего слоев. Остальные размеры заданы и приведены на рис. 5 в мм.

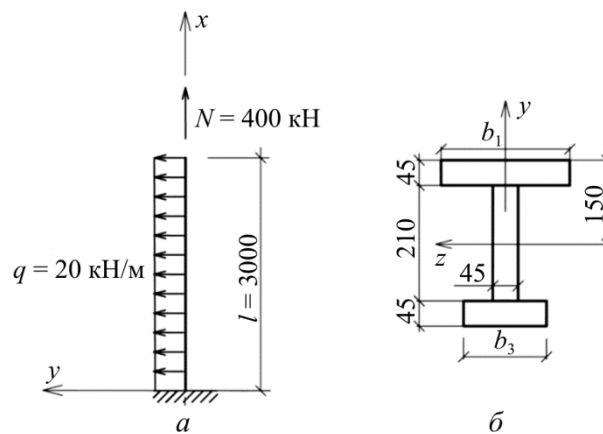


Рис. 5. К расчету стойки: а – расчетная схема; б – поперечное сечение  
Fig. 5. To the calculation of the rack: a – calculation scheme; b – the cross-section

Для расчета возьмем три породы древесины: 1 – ель, 2 – ясень, 3 – дуб. Удельный вес и удельная стоимость пород древесины дана в табл. 1. Каждый слой двутавра может быть изготовлен из трех выбранных пород. В этом случае количество различных расположений пород в сечении равно количеству размещений с повторениями из 3 по 3 –  $\bar{A}_3^3 = 3^3 = 27$ . Для каждого варианта распределения пород найдем такую ширину верхнего и нижнего поясов, что в опасном сечении предельные деформации достигаются одновременно в двух уровнях.

Опасное сечение балки находится в заделке. Значения внутренних усилий в этом сечении:  $M_z = 90 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $N = 400 \text{ кН}$ . При таком распределении усилий осуществляется первое предельное состояние ( $\varepsilon(y) = \varepsilon^1$ ), а обобщенные деформации вычисляются по формулам (30).

Ширина искомых слоев определяется так же, как и в п. 4 формулы (33). Определив размеры слоев, находим  $\varepsilon_0$  и  $\kappa$  для всего стержня из решения системы (7) по методу, описанному в п. 2. Перемещения балки вычисляем по формулам (5). При этом из условий закрепления получим  $w(0) = \varphi(0) = u_0(0) = 0$ . Результаты расчетов сведены в табл. 3.

Таблица 3

## Результаты расчета

Table 3

## Calculation results

№	Материал слоев	$b_1$ , см	$b_3$ , см	$V$ , кН	$C$ , руб	$w_{\max}$ , см	Слой, в котором достигнуты предельные деформации	Знак предельных деформаций	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	111	9,2	9,8	0,24	107,9	8,0	1,3	-,+	
2	121	8,9	10,1	0,31	136,4	8,0	1,3	-,+	
3	221	3,6	11,7	0,29	131,1	8,1	1,3	-,+	
4	211	4,0	11,4	0,23	103,8	8,1	1,3	-,+	
5	131	8,9	10,2	0,31	142,3	8,0	1,3	-,+	
6	331	2,6	12,3	0,29	135,0	8,1	1,3	-,+	
7	311	разрушение во 2-м слое						2	-
8	321	2,5	12,3	0,29	129,1	8,2	1,3	-,+	
9	231	3,6	11,7	0,30	137,1	8,1	1,3	-,+	
10	112	разрушение во 2-м слое						2	+
11	122	15,5	4,3	0,32	144,3	12,4	1,3	-,+	
12	222	7,7	5,3	0,31	138,0	12,7	1,3	-,+	
13	212	разрушение во 2-м слое						2	+
14	132	разрушение во 2-м слое						2	+
15	332	разрушение во 2-м слое						2	+
16	312	разрушение во 2-м слое						2	+
17	322	6,3	5,7	0,30	135,2	12,8	1,3	-,+	
18	232	разрушение во 2-м слое						2	+
19	113	9,8	9,2	0,27	122,9	8,7	1,3	-,+	
20	123	9,5	9,5	0,34	151,8	8,7	1,3	-,+	
21	223	4,0	11,1	0,33	149,0	8,9	1,3	-,+	
22	213	4,4	10,8	0,27	121,1	8,9	1,3	-,+	
23	133	9,5	9,6	0,34	157,8	8,7	1,3	-,+	
24	333	2,9	11,7	0,33	153,8	8,9	1,3	-,+	
25	313	разрушение во 2-м слое						2	-
26	323	2,9	11,7	0,33	147,8	8,9	1,3	-,+	
27	233	4,0	11,1	0,33	155,1	8,9	1,3	-,+	
28	Эталон 1	9,3	9,3	0,37	171,1	8,9	3	+	
29	Эталон 2	$h = 30 \text{ см}$ , $b = 7,4 \text{ см}$		0,46	213,1	9,3	3	+	

Второй столбец табл. 3 содержит информацию о материале слоев. Так, шифр 132 означает, что первый слой выполнен из ели, второй из дуба и третий из ясеня. Остальные обозначения аналогичны обозначениям в табл. 2.

Для сравнения был произведен расчет двух эталонных балок. Все их слои выполнены из древесины дуба. Поперечное сечение симметрично относительно осей  $y$  и  $z$ . Эталонная балка № 1 имеет двутавровое сечение, размеры которого даны на рис. 5, б. Ширина первого слоя равна ширине третьего. Поперечное сечение эталонной балки № 2 прямоугольное. Высота прямоугольного сечения  $h = 30$  см. Длина и интенсивность нагрузки  $q$  эталонных балок остается неизменной.

Неизвестную ширину  $u$  эталонных балок № 1 и 2 определяем так же, как и в п. 4. Результаты расчета эталонных балок даны в строках 28, 29 табл. 3.

Анализируя данные табл. 3, можно отметить следующее:

1. В отличие от расчетов, выполненных в п. 4, во многих случаях ширина искомым слоев была близка по величине. При этом искомые слои могли быть выполнены как из одного материала – строки 1 и 2 в табл. 3, так и из разных – строки 17, 19, 20 и 23 в табл.3. Связано это с одновременным действием момента и продольной силы.

2. Соотношение ширины первого и третьего слоев сильно зависит от распределения пород в сечении. Так, для строки 8 табл. 3:  $b_1 = 2,5$  см,  $b_3 = 12,3$  см, а для строки 11 табл. 3:  $b_1 = 15,5$  см,  $b_3 = 4,3$  см.

3. Минимальный вес имеет балка № 4, максимальный – № 20. Балка № 4 легче эталонной балки № 1 в 1,09 раза, а эталонной балки № 2 в 1,35 раза.

4. Наилучшей с точки зрения стоимости оказалась балка № 4, наихудшей – № 23. Балка № 4 дешевле эталонной балки № 1 в 1,65 раза, а эталонной балки № 2 в 2,05 раза.

6. Максимальный прогиб имеет балка № 17, минимальный – № 1. Прогиб балки № 1 меньше, чем у эталонной балки № 1 в 1,11 раза, а эталонной балки № 2 в 1,16 раза. Балка с наименьшей стоимостью имеет в 1,10(1,15) раза меньший прогиб, чем эталонная балка № 1(2).

5. Предельные деформации эталонных балок достигались в нижних фибровых волокнах (3-й слой). При этом максимальное значение продольных деформаций верхних фибровых волокон эталонных балок № 1 и № 2 достигало соответственно 76 и 75 % от предельно допустимых.

6. В балках № 7, 10, 13–16, 18 и 25 предельные деформации достигались раньше во втором слое, чем в первом и третьем. При этом в балках № 7 и 25 достигались предельные деформации сжатия, а в остальных предельные деформации растяжения.

## 6. Параметрическая оптимизация 3

Рассмотрим однопролетную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 6, а). Поперечное сечение неизменно по длине и представляет собой тавр, составленный из двух слоев (рис. 6, б). Неизвестными являются ширина первого слоя и высота второго, остальные размеры заданы на рис. 6.

Пусть имеется шесть пород древесины: 1 – ель, 2 – ясень, 3 – сосна, 4 – дуб, 5 – береза и 6 – лиственница. Каждый слой тавра может быть изготовлен из любой породы. В этом случае количество различных расположений пород в сечении равно количеству размещений с повторениями из 6 по 2 –  $\bar{A}_6^2 = 6^2 = 36$ . Для каждого варианта распределения пород найдем такие размеры  $b_1$  и  $h_2$ , что в опасном сечении предельные деформации достигаются одновременно в двух уровнях.



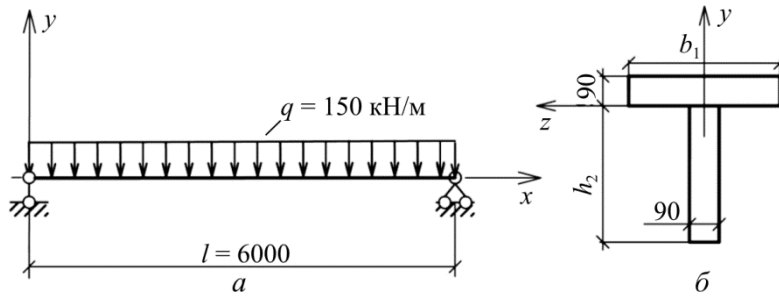


Рис. 6. К расчету балки: *a* – расчетная схема; *б* – поперечное сечение  
 Fig. 6. To the calculation of the beam: *a* – calculation scheme; *b* – the cross-section

Опасное сечение балки находится в середине пролета. Значения внутренних усилий в этом сечении:  $M_z = 675 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $N = 0 \text{ кН}$ . При таком распределении усилий осуществляется первое предельное состояние ( $\varepsilon(y) = \varepsilon^l$ ), а обобщенные деформации определяем из (30). Подставляем  $\varepsilon_0$  и  $\kappa$  в (7) и после преобразований получаем систему двух нелинейных уравнений относительно  $b_1$  и  $h_2$ :

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 &= N, \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 &= -M_z. \end{aligned} \quad (34)$$

Находим из первого уравнения  $b_1$  и подставляем во второе:

$$F(h_2) = a_{21}(N - b_2a_{12}) + a_{11}(M_z + b_2a_{22}) = 0. \quad (35)$$

Выражение (35) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно неизвестной  $h_2$ . Решаем его методом секущих [19]. В качестве начального приближения принимаем  $h_2^{(0)} = 0,1l$  и  $h_2^{(1)} = 0,01l$ , а последующие приближения будем строить по формуле

$$h_2^{(n)} = \frac{h_2^{(0)}F(h_2^{(n-1)}) - h_2^{(n-1)}F(h_2^{(0)})}{F(h_2^{(n-1)}) - F(h_2^{(0)})}, (n = 2, 3, \dots). \quad (36)$$

Итерационное решение продолжаем до тех пор, пока разница между решениями на соседних итерациях  $|h_2^{(n+1)} - h_2^{(n)}|$  не достигнет малой, наперед заданной величины. Определив  $h_2$ , находим  $b_1$  из (34).

Зная все размеры поперечного сечения, находим  $\varepsilon_0$  и  $\kappa$  для всего стержня из решения системы (7) по методу, описанному в п. 2. Перемещения балки вычисляем по формулам (5). При этом  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$  и  $u_0(0)$  находим из условий:  $w(0) = w(l) = 0$ ,  $u_0(l) = 0$ . Результаты расчетов сведены в табл. 4.

Для сравнения был произведен расчет двух эталонных балок. Все их слои выполнены из древесины ели. Эталонная балка № 1 имеет тавровое сечение (см. рис. 6, б). Высота первого слоя и ширина второго равны 90 мм. Высота второго слоя связана с шириной первого слоя соотношением  $h_2 = 2b_1$ . Поперечное сечение эталонной балки № 2 прямоугольное с размерами  $b \times h$ , при этом  $h = 2b$ . Длина эталонных балок и интенсивность нагрузки  $q$  остаются неизменными.

Таблица 4

## Результаты расчета

Table 4

## Calculation results

№	Материал слоев	$b_1$ , см	$b_3$ , см	$V$ , кН	$C$ , руб	$w_{max}$ , см	Слой, в котором достигнуты предельные деформации	Знак предельных деформаций	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	11	31,8	32,1	1,52	690,1	10,5	1,2	-,+	
2	12	58,8	23,2	2,25	1010,7	18	2	-	
3	13	38,0	28,5	1,67	733,1	11,6	1,2	-,+	
4	14	32,8	31,8	1,96	903,6	11,1	1,2	-,+	
5	15	77,0	18,7	2,5	963,2	20,7			
6	16	40,6	27,9	1,96	815,1	13,3	1,2	-,+	
7	21	16,3	35,9	1,45	651,4	11,3	1,2	-,+	
8	22	32,9	25,0	2,11	936,6	19,3	1,2	-,+	
9	23	19,5	31,8	1,57	676,5	12,5	1,2	-,+	
10	24	16,9	35,4	1,93	886,0	11,9	1,2	-,+	
11	25	41,4	20,4	2,21	814,3	22,1	1,2	-,+	
12	26	22,3	30,6	1,90	774,6	14,3	1,2	-,+	
13	31	27,0	31,5	1,48	646,1	10,4	1,2	-,+	
14	32	50,7	22,8	2,20	943,6	17,8	1,2	-,+	
15	33	32,3	28,0	1,63	683,3	11,4	1,2	-,+	
16	34	27,8	31,2	1,91	854,3	10,9	1,2	-,+	
17	35	67,8	18,2	2,45	897,4	20,5	1,2	-,+	
18	36	34,3	27,4	1,90	759,8	13,1	1,2	-,+	
19	41	разрушение внутри 2-го слоя						2	-
20	42	28,7	25,6	2,00	910,0	19,7	1,2	-,+	
21	43	разрушение внутри 2-го слоя						2	-
22	44	13,7	36,9	1,88	874,2	12,1	1,2	-,+	
23	45	36,1	20,9	2,05	770,9	22,6	1,2	-,+	
24	46	18,9	31,7	1,82	753,5	14,6	1,2	-,+	
25	51	24,6	32,6	1,61	524,0	10,6	1,2	-,+	
26	52	45,3	23,4	2,39	697,2	18,2	1,2	-,+	
27	53	29,3	28,9	1,77	533,3	11,7	1,2	-,+	
28	54	25,4	32,2	2,06	735,2	11,2	1,2	-,+	
29	55	58,6	19,0	2,63	544,4	20,8	1,2	-,+	
30	56	31,5	28,2	2,07	602,4	13,4	1,2	-,+	
31	61	разрушение внутри 2-го слоя						2	-
32	62	25,6	25,9	1,86	765,4	19,9	1,2	-,+	
33	63	разрушение внутри 2-го слоя						2	-
34	64	11,6	37,7	1,81	809	12,2	1,2	-,+	
35	65	32,2	21,2	1,86	584,1	22,8	1,2	-,+	
36	66	16,5	32,3	1,73	658,2	14,7	1,2	-,+	
37	Эталон 1	20,2	40,4	1,44	654,5	7,6	1	-	
38	Эталон 2	$h = 41$ см, $b = 20,5$ см		2,23	1008,6	8,1	1	-	

Неизвестную ширину слоев эталонных балок № 1 и 2 определяем из расчета. Задаем произвольное значение ширины и определяем НДС балки. После этого производим проверку

по условию прочности (9). Если балка недогружена, то уменьшаем варьируемую ширину, иначе увеличиваем. Так поступаем до тех пор, пока продольные деформации не достигнут предельных значений. Результаты расчета эталонных балок даны в строках 37, 38 табл. 4.

Анализируя данные табл. 4, отметим следующее:

1. Наблюдается большое различие в полученных размерах слоев в зависимости от выбора комбинации материалов. Так,  $b_{1\max}/b_{1\min} = 6,64$ , а  $h_{2\max}/h_{2\min} = 2,07$ . Это является следствием значительных различий в механических характеристиках пород древесины, а также их разносопротивляемости при растяжении и сжатии.

2. Минимальный вес имеет балка № 7, максимальный – № 29. Балка № 7 тяжелее эталонной балки № 1 в 1,01 раза и легче эталонной балки № 2 в 1,55 раза.

3. Наилучшей с точки зрения стоимости оказалась балка № 25, наихудшей – № 2. Балка № 25 дешевле эталонной балки № 1 в 1,25 раза, а эталонной балки № 2 в 1,92 раза.

7. Максимальный прогиб имеет балка № 35, минимальный – № 13. Прогиб балки № 13 больше, чем у эталонной балки № 1 в 1,37 раза, а эталонной балки № 2 в 1,28 раза. Балка с наименьшей стоимостью имеет в 1,39 (1,31) раза больший прогиб, чем эталонная балка № 1(2).

4. Предельные деформации эталонных балок достигались в верхних фибровых волокнах. При этом максимальное значение продольных деформаций нижних фибровых волокон эталонной балки № 1 и № 2 достигало соответственно 77 и 56 % от предельно допустимых. Это также является следствием разносопротивляемости древесины.

5. Наилучшими балками как с точки зрения стоимости, так и с точки зрения веса и прогиба являются балки, слои которых выполнены из различных пород древесины. Это говорит в пользу конструирования комбинированных конструкций.

В отдельных случаях предельные деформации достигались раньше на внутренних границах слоев.

## 7. Функциональная оптимизация

В случае параметрической оптимизации требовалось выполнение условия равнопрочности (27) в одном сечении стержня. Из этого условия находились неизвестные размеры поперечного сечения, которые принимались неизменными по всей длине стержня. Теперь будем требовать выполнения условия (27) на всей длине стержня. При этом искомые размеры будут функциями координаты  $x$ .

Возьмем для расчета стойку из п. 5. Также имеем три породы древесины: 1 – ель, 2 – ясень и 3 – дуб. Каждый слой двутавра (см. рис. 5, б) может быть изготовлен из трех выбранных пород. В этом случае количество различных расположений пород в сечении равно количеству размещений с повторениями из 3 по 3 –  $\bar{A}_3^3 = 3^3 = 27$ . Для каждого варианта распределения пород найдём такую ширину верхнего и нижнего поясов, что на всей длине стержня предельные деформации достигаются одновременно в двух уровнях.

Значения внутренних усилий задаются функциями:  $M_z = 0,5q(l-x)^2$ ,  $N = 400$  кН. При таком распределении усилий сложно определить, какое из предельных распределений  $\varepsilon(y)$  будет осуществляться по длине стойки. Поэтому вычислим  $b_1$  и  $b_3$  для всех четырех рассматриваемых предельных распределений  $\varepsilon^{1-IV}$ .

Искомую ширину слоев определяем по (33), подставляя каждый раз обобщенные деформации, соответствующие  $\varepsilon^{1-IV}$ .

Определив размеры слоев, проверяем выполнение конструктивных ограничений (29) при  $b_{\min} = 0$ . Если размеры имеют отрицательное значение, то они принимаются равными нулю.

В тех областях, где искомые размеры имеют отрицательное значение, находим  $\varepsilon_0$  и  $k$  из решения системы (7) по методу, описанному в п. 2. Перемещения балки вычисляем по формулам (5). При этом из условий закрепления получим  $w(0) = \varphi(0) = u_0(0) = 0$ . Результаты расчетов сведены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты расчета

Table 5

Calculation results

№	Материал слоев	$V$ , кН	$C$ , руб.	$w_{\max}$ , см	Слой, в котором достигнуты предельные деформации	Знак предельных деформаций
1	2	3	4	5	6	7
1	111	0,12	55,0	12,5	1,3	-,+
2	121	0,19	83,4	12,3	1,3	-,+
3	221	0,17	74,8	12,0	1,3	-,+
4	211	разрушение во 2-м слое			2	-
5	131	0,19	89,3	12,3	1,3	-,+
6	331	0,17	78,4	11,8	1,3	-,+
7	311	разрушение во 2-м слое			2	-
8	321	0,17	72,4	11,8	1,3	-,+
9	231	0,17	80,8	12,0	1,3	-,+
10	112	разрушение во 2-м слое			2	+
11	122	0,20	89,3	20,4	1,3	-,+
12	222	0,18	80,4	20,2	1,3	-,+
13	212	разрушение во 2-м слое			2	+
14	132	разрушение во 2-м слое			2	+
15	332	разрушение во 2-м слое			2	+
16	312	разрушение во 2-м слое			2	+
17	322	0,18	77,5	19,9	1,3	-,+
18	232	разрушение во 2-м слое			2	+
19	113	0,13	61,0	13,4	1,3	-,+
20	123	0,20	89,8	13,2	1,3	-,+
21	223	0,19	83,5	13,0	1,3	-,+
22	213	0,12	55,6	13,2	1,3	-,+
23	133	0,20	95,8	13,2	1,3	-,+
24	333	0,19	87,9	12,8	1,3	-,+
25	313	разрушение во 2-м слое			2	-
26	323	0,19	81,9	12,8	1,3	-,+
27	233	0,19	89,5	13,0	1,3	-,+

Второй столбец табл. 5 содержит информацию о материале слоев. Так, шифр 132 означает, что первый слой выполнен из ели, второй из дуба и третий из ясеня. Вес и стоимость балки даны в столбцах 3–4. В столбце 5 приведено максимальное значение прогиба.

Для сравнения был произведен расчет двух эталонных балок с постоянным поперечным сечением. Результаты расчета эталонных балок даны в строках 28, 29 табл. 3.

Анализируя данные табл. 5, отметим следующее:

1. По сравнению с параметрической оптимизацией, где сечение оставалось неизменным по длине, удалось снизить вес балок в 1,60–2,25 раза, стоимость – в 1,59–2,18 раза. При этом максимальный прогиб возрос в 1,44–1,65 раза.

2. Минимальный вес имеет балка № 1, максимальный – № 23. Балка № 1 легче эталонной балки № 1 в 3,08 раза, а эталонной балки № 2 в 3,83 раза.

3. Наилучшей с точки зрения стоимости оказалась балка № 1, наихудшей – № 23. Балка № 1 дешевле эталонной балки № 1 в 3,11 раза, а эталонной балки № 2 в 3,87 раза.

4. Максимальный прогиб имеет балка № 11, минимальный – № 6. Прогиб балки № 6 больше, чем у эталонной балки № 1 в 1,33 раза, а эталонной балки № 2 в 1,27 раза. Балка с наименьшей стоимостью имеет в 1,40 (1,34) раза больший прогиб, чем эталонная балка № 1 (2).

В отдельных случаях предельные деформации достигались раньше во втором слое, чем в первом и третьем.

На рис. 7 приведены графики ширины первого и второго слоя балки №1.

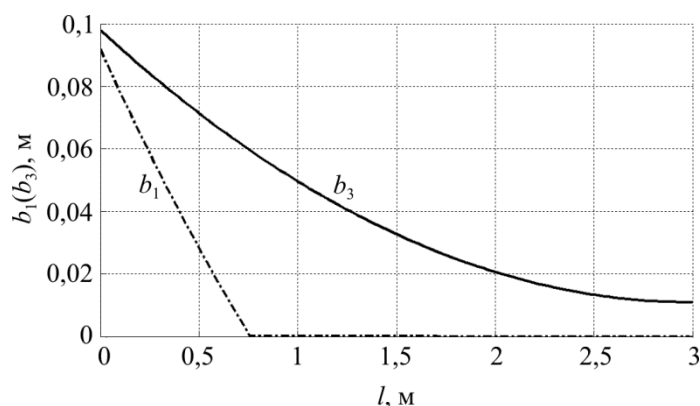


Рис. 7. Размеры искомых слоев балки № 1  
Fig. 7. Layer dimensions for beam № 1

При  $x \in [0, 76, 3]$  ширина первого слоя имела отрицательное значение, поэтому на этом участке  $b_1 = 0$ . Для других балок графики  $b_1$  и  $b_3$  имеют подобный вид.

## Заключение

В работе представлено решение проблемы определения напряженно-деформированного состояния гибридных деревянных брусев с учетом физической нелинейности и разносопротивляемости материала. Приведено большое количество расчетов слоистых деревянных стержней при различных вариантах закрепления, различных распределениях материалов и нагрузок. Полученные данные показывают следующее:

1. Использование критерия равнопрочности в совокупности с принципами гибридного проектирования (когда конструкция создается путем рационального сочетания материалов с различными механическими свойствами) позволяет значительно снизить вес и стоимость материала конструкции по сравнению с эталонными балками. При парамет-

рическом проектировании снижение веса (стоимости) достигало 1,65 (2,17) раза, при функциональном проектировании – 3,83 (3,87) раза.

2. Использование условия равнопрочности приводит к тому, что практически во всех случаях происходит возрастание прогибов в 1,28–1,65 раза в сравнении с эталонными балками. Однако возрастание прогиба происходит в намного меньшей степени, чем уменьшение стоимости материала проектируемых конструкций.

3. Сильное различие в диаграммах деформирования древесины при растяжении и сжатии значительно влияет на полученные при проектировании поперечные размеры бруса.

4. В зависимости от распределения пород в сечении бруса возможно возникновение скрытых механизмов разрушения, когда предельное состояние достигается во внутренних слоях стержня.

### **Библиографический список**

1. Конструкции из дерева и пластмасс / Д.К. Арленинов [и др.]. – М.: АСВ, 2002. – 280 с.
2. Шмидт А.Б., Дмитриев П.А. Атлас строительных конструкций из клееной древесины и водостойкой фанеры. – М.: АСВ, 2002. – 292 с.
3. Porteous J., Kermani A. Structural timber design to Eurocode 5. – John Wiley & Sons, 2013. – 640 p.
4. Pischl R., Schickhofer G. The Mur River wooden bridge, Austria // Structural Engineering International. – 1993. – Vol. 3. – No. 4. – P. 217–219.
5. Poirier E. Design and construction of a 53-meter-tall timber building at the university of British Columbia // Proceedings of WCTE. – 2016.
6. de la Rosa García P., Escamilla A. C., García M. N. G. Bending reinforcement of timber beams with composite carbon fiber and basalt fiber materials // Composites Part B: Engineering. – 2013. – Vol. 55 – P. 528–536.
7. Raftery G.M., Whelan C. Low-grade glued laminated timber beams reinforced using improved arrangements of bonded-in GFRP rods // Construction and Building Materials. – 2014. – Vol. 52 – P. 209–220.
8. Рощина С.И., Сергеев М.С., Лукина А.В. Армирование деревянных конструкций // Изв. вузов. Лесной журнал. – 2013. – № 4. – С. 80–85.
9. Исследование прочности и деформативности древесины: сб. ст. / под ред. д-ра техн. наук проф. Г.Г. Карлсена. – М.: Госстройиздат, 1956. – 172 с.
10. Быков В.В. Экспериментальные исследования прочности и деформативности древесины сибирской лиственницы при сжатии и растяжении вдоль волокон с учетом длительного действия нагрузки // Изв. вузов. Строительство. – 1967. – № 8. – С. 3–8.
11. Квасников Е.Н. Вопросы длительного сопротивления древесины. – Л.: Стройиздат, 1972. – 96 с.
12. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1978. – 616 с.
13. Немировский Ю.В. Метод расчета композитных стержневых систем из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы V Всерос. науч. конф. – Томск, 2006. – С. 288–290.
14. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Особенности деформирования и разрушения деревянных клееных многопролетных балок. Сообщение 1 // Изв. вузов. Строительство. – 2016. – № 6. – С. 116–126.
15. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

16. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2004. – 488 с.
17. Боровиков А.М., Уголев Б.Н. Справочник по древесине. – М.: Лесная промышленность, 1989. – 296 с.
18. Немировский Ю.В., Болтаев А.И. Метод расчета деревянных стропильных покрытий зданий. Сообщение 1: Моделирование и общие закономерности // Изв. вузов. Строительство. – 2014. – № 3. – С. 5–13.
19. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
20. Гениев Г.А. Некоторые задачи расчета стержней при общей нелинейной зависимости напряжений от деформаций // Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности: сб. ст. / под ред. А.Р. Ржаницына. – М., 1956. – С. 188–222.
21. Ржаницын А.Р. Изгиб и сложное сопротивление прямоугольного сечения стержня при произвольной диаграмме работы материала // Расчет тонкостенных пространственных конструкций: сб. ст. / под ред. А.Р. Ржаницына. – М., 1964. – С. 7–22.
22. Строительная механика в СССР. 1917-1967: сб. ст. / под ред. И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1969. – 423 с.
23. Геммерлинг А.В. Расчет стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1974. – 208 с.
24. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
25. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
26. Рудых О.Л., Соколов Г.П., Пахомов В.Л. Введение в нелинейную строительную механику. – М.: АСВ, 1998. – 103 с.
27. Лукашевич А.А. Современные численные методы строительной механики. – Хабаровск: Изд-во ХГТУ, 2003. – 135 с.
28. Нелинейные методы расчета в современном проектировании / Шапиро Д.М. [и др.] // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2009. – № 3. – С. 85–94.
29. Owen D.R., Hinton E. Finite elements in plasticity: Theory and Practice. – Swansea, U.K.: John Wiley & Sons, 2013. – 640 p.
30. McGuire W., Gallagher R.H., Ziemian R.D. Matrix structural analysis, 2014. – 460 p.
31. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.

## References

1. Arleninov D.K. et al. Konstruktsii iz dereva i plastmass [Construction of wood and plastics]. Moscow, Publishing house ASV, 2002, 280 p.
2. Shmidt A.B., Dmitriev P.A. Atlas stroitel'nykh konstruktsii iz kleenoi drevesiny i vodostoikoï fanery [Atlas of building structures made of laminated wood and waterproof plywood]. Moscow, Publishing house ASV, 2002, 292 p.
3. Porteous J., Kermani A. Structural timber design to Eurocode 5. John Wiley & Sons, 2013, 640 p.
4. Pischl R., Schickhofer G. The Mur River wooden bridge, Austria. *Structural Engineering International*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 217-219.
5. Poirier E. Design and construction of a 53-meter-tall timber building at the university of British Columbia. *Proceedings of WCTE*, 2016.
6. de la Rosa García P., Escamilla A. C., García M. N. G. Bending reinforcement of timber beams with composite carbon fiber and basalt fiber materials. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 528-536.
7. Raftery G.M., Whelan C. Low-grade glued laminated timber beams reinforced using improved arrangements of bonded-in GFRP rods. *Construction and Building Materials*, 2014, vol. 52, pp. 209-220.
8. Roshchina S.I., Sergeev M.S., Lukina A.V. Armirovanie dereviannykh konstruktsii [Reinforcement of wooden structures]. *News of higher educational institutions. Forest journal*, 2013, no. 4, pp. 80-85.
9. Karlsen G.G. Issledovanie prochnosti i deformativnosti drevesiny. Sbornik statei. [Investigation of strength and deformability of wood. Collection of articles]. Moscow, Gosstroizdat, 1956, 172 p.

10. Bykov V.V. Eksperimental'nye issledovaniia prochnosti i deformativnosti drevesiny sibirskoi listvenitsy pri szhatii i rastiazhenii vdol' volokon s uchetom dlitel'nogo deistviia nagruzki [Experimental studies of the strength and deformability of Siberian larch wood during compression and stretching along the fibers, taking into account the long-term action of the load]. *News of higher educational institutions. Construction*, 1967, no. 8, pp. 3-8.
11. Kvasnikov E.N. Voprosy dlitel'nogo soprotivleniya drevesiny [Questions prolonged resistance of wood]. *Leningrad, Stroizdat*, 1972, 96 p.
12. Filin A.P. Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruемого tela T. II. [Applied Mechanics of solid deformable body]. *Moscow, Nauka*, 1978, 616 p.
13. Nemirovskiy Yu.V. Metod rascheta kompozitnykh sterzhnevnykh sistem iz raznomodul'nykh materialov [The method of calculation of composite beam systems made of materials multimodulus]. *Fundamental and applied problems of modern mechanics. Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference, Tomsk*, 2006, pp. 288-290.
14. Nemirovskiy Yu.V., Boltaev A.I. Osobennosti deformirovaniya i razrusheniya derevyannykh kleenykh mnogo proletnykh balok. Soobshchenie 1 [Features of deformation and fracture of multi-span glued wooden beams. Message 1]. *News of higher educational institutions. Construction*, 2016, no. 6, pp. 116-126.
15. Korn G.A., Korn T.M. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Mathematical handbook for scientists and engineers]. *Moscow, Science*, 1968, 720 p.
16. Nemirovskiy Yu.V., Mishchenko A.V., Vokhmyanin I.T. Ratsional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistnykh sterzhnevnykh sistem [Rational and optimal design of laminated beam systems]. *Novosibirsk, NGASU*, 2004, 488 p.
17. Borovikov A.M., Ugolev B.N. Spravochnik po drevesine [Wood directory]. *Moscow, Forest industry*, 1989, 296 p.
18. Nemirovskiy Yu.V., Boltaev A.I. Metod rascheta derevyannykh stropil'nykh pokrytii zdaniy. Soobshchenie 1: Modelirovanie i obshchie zakonomernosti [Method of calculation of wooden rafter coverings of buildings. Message 1 modellings and general regularities]. *News of higher educational institutions. Construction*, 2014, no. 3, pp. 5-13.
19. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychisleniy. [Calculation methods]. *Moscow, Fizmatgiz*, 1962, 640 p.
20. Geniev G.A. Nekotorye zadachi rascheta sterzhnei pri obshchei nelineinoy zavisimosti napriazhenii ot deformatsii [Some problems of calculating rods with a general nonlinear stress-strain relation]. *Moscow, Issledovaniia po voprosam stroitel'noi mekhaniki i teorii plastichnosti: sbornik statei* (Studies in the field of structural mechanics and the theory of plasticity: a collection of articles). 1956, pp. 188-222.
21. Rzhantsyn A.R. Izgib i slozhnoe soprotivlenie priamougol'nogo secheniia sterzhnia pri proizvol'noi diagramme raboty materiala [Bending and complex resistance of the rectangular cross-section of the rod for an arbitrary diagram of the work of the material]. *Moscow, Raschet tonkostennykh prostranstvennykh konstrukttsii: sbornik statei* (Calculation of thin-walled spatial structures: a collection of articles). 1964, pp. 7-22.
22. Stroitel'naia mekhanika v SSSR. 1917-1967. [Construction mechanics in the USSR. 1917-1967]. *Moscow, Stroizdat*, 1969, 423 p.
23. Gemmerling A.V. Raschet sterzhnevnykh sistem [Calculation of rod systems]. *Moscow, Stroizdat*, 1974, 208 p.
24. Lukash P.A. Osnovy nelineinoy stroitel'noi mekhaniki [Fundamentals of nonlinear construction mechanics]. *Moscow, Stroizdat*, 1978, 204 p.
25. Grigoliuk E.I., Shalashilin V.I. Problemy nelineinogo deformirovaniia: Metod prodolzheniia resheniia po parametru v nelineinykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruемого tela [Problems of nonlinear deformation: The method of continuation of a solution with respect to a parameter in nonlinear problems of the mechanics of a rigid deformed body]. *Moscow, Nauka*, 1988, 232 p.
26. Rudykh O.L., Sokolov G.P., Pakhomov V.L. Vvedenie v nelineinuiu stroitel'niuiu mekhaniku [Introduction to nonlinear construction mechanics]. *Moscow, Publishing house ASV*, 1998, 103 p.
27. Lukashovich A.A. Sovremennye chislennyye metody stroitel'noi mekhaniki [Modern numerical methods of construction mechanics]. *Habarovsk, Publishing house of KhSTU*, 2003, 135 p.
28. Shapiro D.M. et. al. Nelineinye metody rascheta v sovremennom proektirovanii [Nonlinear methods of calculation in modern design]. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*, 2009, no. 3, pp. 85-94.
29. Owen D.R., Hinton E. Finite elements in plasticity: Theory and Practice. – Swansea, *United Kingdom, John Wiley & Sons*, 2013, 640 p.
30. McGuire W., Gallagher R. H., Ziemian R. D. Matrix structural analysis, 2014, 460 p.
31. Petrov V.V. Nelineinaiia inkremental'naia stroitel'naia mekhanika [Nonlinear incremental building mechanics]. *Moscow, Infra-Inzheneriia*, 2014, 480 p.