



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.4.06

УДК 539.3

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОСТРУКТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

**М.А. Ташкинов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 13 ноября 2017 г.

Принята: 14 декабря 2017 г.

Опубликована: 29 декабря 2017 г.

#### Ключевые слова:

стохастическая краевая задача; случайная структура; критерии разрушения; поля напряжений и деформаций; статистическое осреднение; конечно-элементная модель; вероятность разрушения.

### АННОТАЦИЯ

Распространенным направлением в микромеханике структурно-неоднородных сред со случайной структурой являются методы стохастической механики. Неоднородность микроструктуры гетерогенного материала оказывает значительное влияние на распределение полей напряжений и деформаций при нагружении. Методы и инструменты статистического анализа позволяют учитывать взаимодействия внутри системы многих частиц, которой является случайная структура, и исследовать распределения полей с аналитической точки зрения, что используется при создании стохастических моделей, описывающих механическое поведение материала.

В данной работе представлен подход к анализу распределений полей напряжений и деформаций в представительных объемах неоднородных сред на основе восстановления их законов распределения. Описаны способы нахождения параметров законов распределения. В рамках стохастической модели для этого используются центральные моменты случайной величины, полученные для полей напряжений и деформаций в отдельных фазах материала. Предложен алгоритм расчета вероятности разрушения с использованием законов распределения полей напряжений и деформаций на основе вероятностного представления критериев разрушения. На основе анализа вероятности разрушения компонентов представительного объема предложена стохастическая модель прогрессирующего разрушения.

Приведены некоторые численные результаты для частного случая неоднородной структуры, проведено сравнение полученных с помощью стохастической модели оценок с результатами конечно-элементного моделирования. Проведено сравнение различных типов параметрических законов распределения, используемых для отражения реального распределения полей напряжений в представительном объеме, на основе полученных данных конечно-элементного анализа и расчета моментов в рамках стохастической модели. Для исследуемого частного случая реализована методика расчета вероятностей разрушения при статическом нагружении представительного объема.

© ПНИПУ

© **Ташкинов Михаил Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией, e-mail: [m.tashkinov@pstu.ru](mailto:m.tashkinov@pstu.ru)

**Mikhail A. Tashkinov** – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Head of Scientific Research Laboratory, e-mail: [m.tashkinov@pstu.ru](mailto:m.tashkinov@pstu.ru)



## STOCHASTICAL MODEL OF MICROSTRUCTURAL FAILURE BASED ON RESTORATION OF DISTRIBUTIONS LAWS FOR RANDOM STRESS AND STRAIN FIELDS IN MICROHETEROGENEOUS MEDIA

M.A. Tashkinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 13 November 2017  
Accepted: 14 December 2017  
Published: 29 December 2017

#### Keywords:

stochastic boundary value problem, random structure, failure criteria, stress and strain fields, statistical averaging, finite element model, failure probability.

### ABSTRACT

A common direction in the micromechanics of heterogeneous media with a random structure is related to the methods of stochastic mechanics. Microstructure of a heterogeneous material has a significant effect on the distribution of stress and strain fields. Methods and tools of statistical analysis allow to take into account interactions within a many-particle system and investigate fields distributions from an analytical point of view, which is used to create stochastic models describing the mechanical behavior of a material.

This paper presents an approach to the analysis of the distribution of stress and strain fields in representative volumes of inhomogeneous media based on the restoration of their distribution laws. The techniques of finding the parameters of the distribution laws are described. In the framework of the stochastic model, the central moments of the random variable obtained for the stress and strain fields in individual phases of the material are used for this. An algorithm for calculating the fracture probability using the laws of distribution of stress and strain fields is proposed on the basis of the probability representation of the failure criteria. Based on the analysis of the probability of failure of phases of a representative volume, a stochastic model of a progressive failure is presented.

Some numerical results were derived for the particular case of a non-homogeneous structure; the estimates obtained with the help of the stochastic model are compared with the results of finite element modeling. The different types of parametric distribution laws used to reflect a real distribution of stress fields in a representative volume are compared on the basis of the obtained finite element analysis and the calculation of the moments in the framework of the stochastic model. For the discussed case study, a technique for calculating the fracture probabilities at static loading of a representative volume is implemented.

© PNRPU

---

## Введение

Проблема исследования структурно-неоднородных сред не теряет своей актуальности в свете продолжающегося развития многофазных материалов, преимущества которых все больше способствуют их внедрению в конструкции для различных приложений.

Для анализа механического поведения и разрушения структурно-неоднородных сред необходимо учитывать многочастичное взаимодействие компонент и вклад каждого из них в эффективные прочностные характеристики. Как правило, многомасштабность иерархии структурно-неоднородных материалов изучается с помощью понятия представительного объема, когда размер микроструктурных неоднородностей значительно меньше размера самого объема.

В структурно-неоднородных материалах процессы деформирования и разрушения зависят от особенностей локальных полей напряжений, при расчете которых важны флуктуации и отклонения от осредненных значений, вызванные неоднородностями на микромасштабе. Распространенным направлением в микромеханике материалов со случайной структурой являются методы статистической механики для систем многих частиц, в которых для описания взаимодействия неоднородностей используются многоточечные статистики, введенные для случайных полей напряжений, деформаций и перемещений. Представленные таким образом характеристики учитывают хаотичность расположения элементов в структуре, а также дисперсию свойств фаз.

Описанию структурно-неоднородных сред при помощи инструментов статистики и теории вероятностей посвящено большое количество работ. Основные идеи предложены в работах [1–4]. Также можно выделить труды [5–9], которые посвящены методологии описания и идентификации микроструктуры неоднородных сред при помощи корреляционных функций; в работах [10–13] представлены результаты анализа свойств микроструктуры и их связи с механическими и физическими свойствами среды; влиянию параметров микроструктуры на эффективные свойства посвящены работы [14–19]. При этом отдельным вопросом является создание и идентификация точной геометрической модели микроструктуры конкретного материала [20–23].

Обзор подходов механики, использующих инструменты статистики и теории вероятностей для описания гетерогенных сред со случайным расположением включений, приведен в работе [24]. Более подробно разбор и описание методов статистического анализа микроструктуры неоднородных материалов изложен также в работах [25–29].

Неоднородность микроструктуры гетерогенного материала оказывает значительное влияние на распределение полей напряжений и деформаций в представительном объеме при нагружении. Методы и инструменты статистического анализа позволяют исследовать распределения с аналитической точки зрения для их использования в моделях механики. В таком случае, например, характеристики разрушения представительного объема и его компонент могут быть выражены в вероятностных величинах. В данной работе представлен подход, позволяющий исследовать вероятность начала разрушения отдельных фаз представительного объема на основе статистического представления критерия разрушения и восстановления функций распределения напряжений и деформаций.

## 1. Вероятностное представление критериев разрушения

На основе информации о законах распределения полей напряжений и деформаций в многокомпонентной среде и ее фазах в отдельности можно получить значение вероятности начала разрушения, соответственно, среды или фаз при заданном критерии и прочностных константах. Так, в простом случае вероятность начала разрушения определяется через законы распределения компонент тензора напряжений как

$$P\{\sigma_{ij} > \sigma_{ij}^{(cr)}, \sigma_{ij} \sim dist\}. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^{(cr)}$  – критическое значение напряжений (прочностная константа материала);  $\sigma_{ij} \sim dist$  обозначает, что напряжения распределены по параметрическому закону  $dist$ . В этом случае графический смысл вероятности разрушения – это площадь под графиком плотности распределения компоненты  $\sigma_{ij}$ , ограниченная слева критическим значением  $\sigma_{ij}^{(cr)}$  (рис. 1).

В общем случае, когда, например, свойства фаз не изотропны, может быть использован более сложный критерий (критерии Хашина, Цай-Ву, Мизеса и др.). Закон распределения значений выражений для таких критериев можно получить в виде трансформации законов распределения входящих в него компонент тензоров напряжений или деформаций:

$$\begin{aligned} P\{F(\sigma_{ij}, X_\sigma) > 1, \sigma_{ij} \sim dist\}, \\ P\{F(\varepsilon_{ij}, X_\varepsilon) > 1, \varepsilon_{ij} \sim dist\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $X_\sigma$ ,  $X_\varepsilon$  – совокупность критических констант, входящих в критерий.

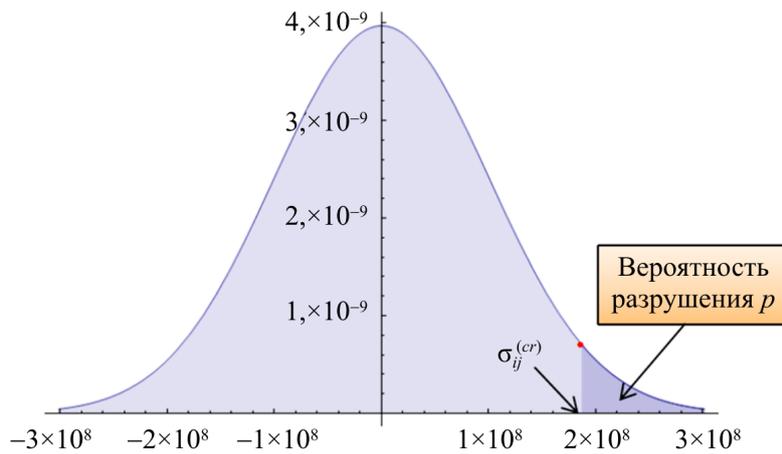


Рис. 1. Пример графического представления расчета вероятности разрушения на основе плотности распределения величины  $\sigma_{ij}$

Fig. 1. A sample of a graphical representation of the probability of fracture calculation based on the density of  $\sigma_{ij}$  value distribution

При рассмотрении многофазного материала подобное представление может быть введено как для каждой фазы материала в отдельности, так и для среды с эффективными свойствами. Таким образом, для оценки вероятности разрушения материала необходима оценка закона распределения напряжений в представительном объеме и его компонентах.

## 2. Вычисление моментов распределения напряжений и деформаций в представительном объеме при помощи стохастических моделей

Существует несколько подходов для получения распределения полей напряжений и деформаций при нагружении представительного объема. Все они, как правило, основаны на обратном анализе распределения случайной величины с использованием статистических метрик, в качестве которых применяются, например, статистические моменты различного порядка. Таким образом, выбирается тип закона распределения, параметры которого определяются из решения системы уравнений, связывающих эти параметры и моменты случайной величины. Точность восстановления закона распределения зависит от порядка моментных функций и порядка статистических моментов. Теоретически при наличии бесконечного набора моментов  $n$ -го порядка закон распределения может быть восстановлен точно, однако при наличии ограниченного числа моментов используются гипотезы и практические данные о характере распределения.

Моменты локальных полей напряжений и деформаций в представительном объеме могут быть получены на основе различных методов, применяемых в механике композитов и неоднородных сред. Первый и наиболее распространенный способ состоит в создании конечно-элементной модели и обработке расчетных данных в дискретных элементах, принадлежащих матрице или включениям. В данном случае результат зависит от разбивки сетки, плотность которой возрастает вместе со сложностью геометрии модели. Тогда восстановление закона распределения напряжений в представительном объеме и его фазах может быть выполнено при помощи следующей процедуры. Для каждого компонента тензора напряжений, полученного для конечных элементов, соответствующих каждой фазе, строится выборка пар значений напряжений и соответствующей вероятности (веса коэффициента).

В качестве инструмента анализа полученной выборки используются моменты случайной величины либо процедура максимизации логарифмической функции правдоподобия [30].

Во втором случае статистические моменты могут быть получены из решения стохастических краевых задач с кусочно-постоянными коэффициентами [2, 3, 28, 31]. Данный подход основан на формализации информации о микроструктуре при помощи моментных функций и решении интегрально-дифференциального уравнения, содержащего функцию Грина, для получения значений отклонения полей перемещений, деформаций и напряжений от их осредненных величин. Осреднение при этом происходит по представительному объему материала. Подробно такой подход описан в работах [25, 32, 33]. Ниже приведены основные выкладки для вывода выражений для моментов напряжений и деформаций на основе решения стохастических краевых задач.

Так, флуктуация поля перемещений в представительном объеме зависит от положения радиуса-вектора и принимает вид

$$\frac{\partial u_i^{(x)}(\vec{r})}{\partial x_j} = \int_{V_1} \frac{\partial G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial x_j} \left[ C'_{mnl}(\vec{r}_1) e_{kl} + C'_{mnl}(\vec{r}_1) \frac{\partial u_k^{(x-1)}(\vec{r}_1)}{\partial x_l} \right]_{,1n} dV_1, \quad (3)$$

где  $C'_{mnl}(\vec{r}_1)$  – функция флуктуации тензора структурных модулей упругости (здесь и далее апостроф ' обозначает флуктуацию величины, т.е. ее отклонение от среднего), которая в зависимости от положения радиуса-вектора характеризует ту или иную фазу материала. В данном случае флуктуация характеризует отклонение от средних по представительному объему модулей упругости  $\langle C_{mnl} \rangle$ . Нагружение задается при помощи тензора  $e_{kl}$  деформаций представительного объема как единого целого.  $G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)$  – функция Грина, с помощью которой получено решение краевой задачи. Согласно определению такая функция удовлетворяет равенство

$$C_{ijkl} G_{kn,jl}(\vec{r}, \vec{r}_1) = -\delta_{in} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1). \quad (4)$$

Для неограниченной среды существует функция Грина в виде тензора Кельвина-Соммильяны:

$$G_{mk}(\vec{r}, \vec{r}_1) = A \frac{\delta_{mk}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + B \frac{(r_m - r_{1m})(r_k - r_{1k})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \quad (5)$$

Поскольку размеры рассматриваемых представительных объемов намного меньше размеров конструкций, объем можно считать неограниченной средой. Константы  $A$  и  $B$  зависят от упругих свойств фаз материала [34, 35].

Структура уравнения (3) позволяет находить решения в итерационном порядке, подставляя решение, полученное на предыдущей итерации, в правую часть. В первом приближении флуктуациями перемещений в правой части пренебрегают, и решение сводится к следующему виду:

$$u_{i,j}^{(1)}(\vec{r}) = e_{kl} \int_{V_1} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) (C'_{mnl}(\vec{r}_1))_{,1n} dV_1. \quad (6)$$

Флуктуация тензора структурных модулей упругости определяется через индикаторную функцию  $\Phi_C(\vec{r})$ , поле ненулевых значений которой определяется положительным присутствием фазы  $C$  в координатах, заданных аргументом (радиусом-вектором). Таким

образом, для двухфазного материала флуктуация тензора модулей упругости сводится к следующему виду:

$$C'_{ijkl}(\vec{r}) = \varphi'_I(\vec{r}) (C_{ijkl}^{(I)} - C_{ijkl}^{(M)}), \quad (7)$$

где  $C_{ijkl}^{(C)} = \lambda_{(C)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_{(C)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ ;  $I$  – фаза включений;  $M$  – матрица;  $\lambda_{(C)}$  и  $\mu_{(C)}$  – константы Ламе.

Для численного решения краевых задач в виде интегральных уравнений (6) необходимо найти способ интегрирования сингулярности, вносимой знаменателями в слагаемых функции Грина (5). Один из методов, который используется в разных вариациях стохастического подхода, предполагает, что для нахождения решения уравнения (6) могут быть использованы вторые производные функции Грина, переход к которым осуществляется с использованием математического преобразования Стилтеса.

Такая трансформация была выполнена в [3] с целью разложить интеграл по второй производной функции Грина на две составляющие – сингулярную, представляющую из себя постоянный тензор, и формальную, интегрирование по которой происходит по всему интервалу, за исключением сингулярности и прилегающей к ней окрестности. В работе [3] для двух этих частей были выведены точные выражения. Преобразование Стилтеса двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$  по интервалу  $(a, b)$  определяется как

$$\Psi(t) \equiv \int_a^b f(t-x) g'(x) dx \equiv \int_a^b g(t-x) f'(x) dx. \quad (8)$$

Такая операция позволяет «переместить» дифференцирование с флуктуаций структурных модулей упругости на функцию Грина. С учетом тождества (8) в упругом случае решение в первом приближении будет иметь следующий вид:

$$u'_{i,j}{}^{(1)}(\vec{r}) = e_{kl} \bar{C}_{mnkl} \int_{V_1} G_{im,jn}(\vec{r}, \vec{r}_1) \varphi'(\vec{r}_1) dV_1. \quad (9)$$

Сингулярная и формальная составляющие второй производной функции Грина  $G_{im,jn}(\vec{r}, \vec{r}_1) = G_{kf,ls}^{(s)}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{kf,ls}^{(f)}(\vec{r}, \vec{r}_1)$ , полученные в [3], имеют вид

$$G_{kf,ls}^{(s)}(\vec{r}, \vec{r}_1) = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_1)}{3\mu} \left( \delta_{kf} \delta_{ls} - \frac{1}{5} \kappa \delta_{kfls} \right) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) g_{kfls}, \quad (10)$$

$$G_{kf,ls}^{(f)}(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{1}{8\pi\mu |\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \left( (2 - \kappa) \delta_{kf} (3n_f n_s - \delta_{fs}) - \right. \\ \left. - \kappa \left[ 3(n_{kf} n_{ls} + n_{kl} n_{fs} + n_{ks} n_{fl} + n_{fs} n_{kl} + n_{fl} n_{ks}) - 2I_{kfls} - 15n_k n_f n_l n_s \right] \right), \quad (11)$$

$$\kappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, n_i = \frac{r_i - r_{i1}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, n_{ij} = n_i n_j, I_{kfls} = \frac{1}{2} (\delta_{kl} \delta_{fs} + \delta_{ks} \delta_{fl}).$$

В структурно-неоднородных средах поля перемещений, напряжений и деформаций представляют собой случайные функции от координаты. Решение, полученное для флуктуаций поля перемещений, используется для нахождения моментов полей напряжений и деформаций в фазах представительного объема. Так, с учетом равенства

$\varepsilon'_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(u'_{i,j}(\vec{r}) + u'_{j,i}(\vec{r}))$  первый и второй моменты поля деформаций в представительном объеме как среде с эффективными свойствами записывается через решение (3) в виде

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = e_{ij}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij}(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) &= \\ &= \frac{1}{4}e_{kl}e_{\phi h}\bar{C}_{mnkl}\bar{C}_{\gamma\eta\phi h}\int_{V_1}\int_{V_2}(G_{im,j}(\vec{r},\vec{r}_1)+G_{jm,i}(\vec{r},\vec{r}_1))\times \\ &\times(G_{\alpha\gamma,\beta}(\vec{r},\vec{r}_2)+G_{\beta\gamma,\alpha}(\vec{r},\vec{r}_2))\frac{\partial^2 K_{\phi}^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial x_{1n}\partial x_{2\eta}}dV_2dV_1, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \varphi'_I(\vec{r}_1), \varphi'_I(\vec{r}_2)$  – моментная функция второго порядка случайной величины  $\varphi'_I(\vec{r}_1)$ , характеризующая корреляцию значений функции в точках, удаленных друг от друга на расстояние  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . В данном случае моментные функции флуктуаций индикаторной функции описывают морфологические особенности внутренней геометрии представительного объема.

Моменты первого и второго порядка полей деформации также могут быть получены для отдельных фаз представительного объема [2]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_C = e_{ij} + \frac{1}{2p_C}e_{kl}\bar{C}_{mnkl}\int_{V_1}(G_{im,j}(\vec{r},\vec{r}_1)+G_{jm,i}(\vec{r},\vec{r}_1))\frac{\partial K_{\phi}^{(2)}(\vec{r},\vec{r}_1)}{\partial x_{1n}}dV_1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle_C &= \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + e_{ij}e_{\alpha\beta} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_I \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_I + \\ &+ \frac{1}{p_C}(\langle \varphi'_C(\vec{r})\varepsilon'_{ij}(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + e_{ij}\langle \varphi'_C(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r}) \rangle + e_{\alpha\beta}\langle \varphi'_C(\vec{r})\varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle). \end{aligned} \quad (15)$$

Моменты первого порядка полей напряжений в фазах могут быть получены через соотношение

$$\sigma_{ijC} = C_{ijkl}^{(C)}\varepsilon_{klC}. \quad (16)$$

С учетом упругой постановки задачи и линейной связи между напряжениями и деформациями моменты второго порядка полей напряжений  $\sigma'_{ij}(\vec{r})\sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r})_C$  могут быть вычислены на основе полученных по формуле (15) моментов второго порядка полей деформаций.

### 3. Восстановление законов распределения случайных полей

Как было показано, представленная стохастическая модель дает возможность вычислять центральные моменты случайных полей. Параметры законов распределения аналитически связаны с моментами случайной величины, для каждого закона распределения эта связь имеет свой вид. Соответственно, для восстановления закона распределения полей деформаций или напряжений необходимо решить обратную задачу: найти такие па-

раметры, которые соответствовали бы распределению с центральными моментами, полученными с помощью решения краевой задачи.

При конечно-элементном моделировании распределение полей может быть получено на основе анализа выборки элементов, среднее значение полей в которых попадает в тот или иной диапазон значений. Для восстановления распределений по результатам конечно-элементного анализа используются средства пакета Wolfram Mathematica.

Для иллюстрации методик восстановления законов распределения были исследованы модели представительных объемов пористых неоднородных материалов с малой объемной долей.

Рассмотрим представительный объем структурно-неоднородной среды со сферическими полидисперсными частицами. Трехмерная геометрическая модель такого объема представляет из себя куб (матрица) со случайно расположенными непересекающимися сферами разных размеров (включения). Матрица обладает изотропными упругими характеристиками:  $E_M = 7 \times 10^{10}$  Па,  $\nu_M = 0,35$ . Включения представляют из себя поры, свойства которых с целью корректности математической постановки задач задаются ненулевыми, но в разы сниженными по отношению к матрице:  $E_I = 1$  Па,  $\nu_I = 0,3$ . Объемная доля включений составляет 5 %. Напряжение задано в виде растягивающих перемещений  $u_1 = 10^{-5}$  м по оси 1. Геометрия представительного объема отображена на рис. 2, а.

При использовании стохастической модели информация о морфологии микроструктуры учитывается в виде совокупности моментных функций, входящих в интегральные выражения (13) и (14). Для реализации алгоритма получения значений моментных функций (подробно изложен в [31]) используется воксельное разбиение представительного объема, представленное для исследуемого частного случая на рис. 2, б. В данной работе результаты, полученные при помощи стохастической модели, приведены в сравнении с результатами конечно-элементного анализа, выполненного на той же воксельной сетке.

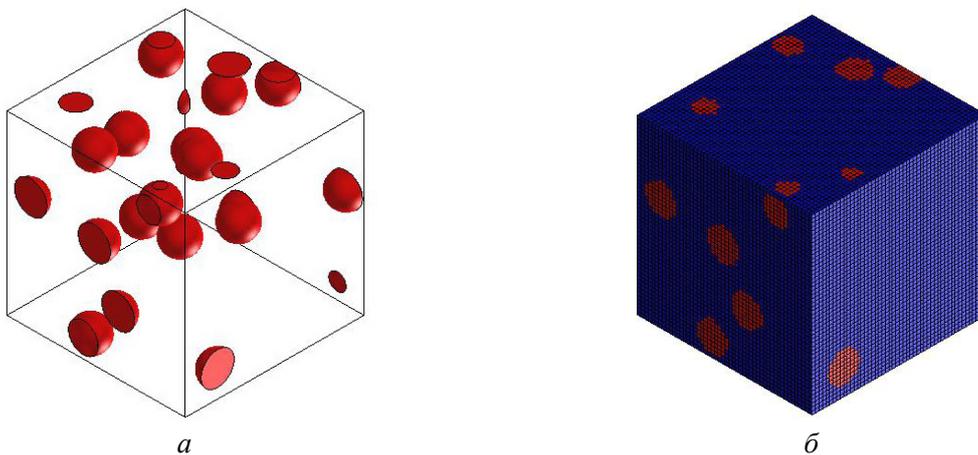


Рис. 2. Представительный объем (а) и воксельная сетка для него (б)

Fig. 2. Representative volume (a) and voxel mesh for it (b)

Для рассмотренного примера в качестве моделей распределений, используемых для восстановления распределения полей напряжений и деформаций, были исследованы нормальное распределение, косое нормальное распределение, и гамма-распределение. Нормальное распределение определяется параметрами масштаба и сдвига, при косом нор-

мальном распределении добавляется параметр формы, а при гамма-распределении – два параметра формы. Функции плотности этих распределений имеют следующий вид:

нормальное распределение

$$\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\alpha)^2}{2\beta^2}\right], \quad (17)$$

где  $\beta > 0$  – параметр масштаба;  $\alpha$  – параметр сдвига;

косое нормальное распределение

$$\frac{2}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta^2}\right] \int_{-\infty}^{k\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (18)$$

где  $\beta > 0$  – параметр масштаба,  $\alpha$  – параметр сдвига,  $k$  – параметр формы;

гамма-распределение

$$(x-\alpha)^{\theta k-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^k\right), \quad (19)$$

где  $\beta > 0$  – параметр масштаба;  $\alpha$  – параметр сдвига;  $k > 0$ ,  $\theta > 0$  – параметры формы.

Исходная гистограмма разброса вероятности значений компоненты  $\sigma_{11}$  напряжений в матрице, полученная на основе конечно-элементного моделирования на воксельной сетке при шаге нагружения  $u_1 = 2 \times 10^{-4}$  м, представлена на рис. 3. Поле значений  $\sigma_{11}$  напряжений представлено на рис. 4. Графики функции плотности вероятности для трех выбранных законов распределения отображены на рис. 5. Параметры распределений представлены в таблице.

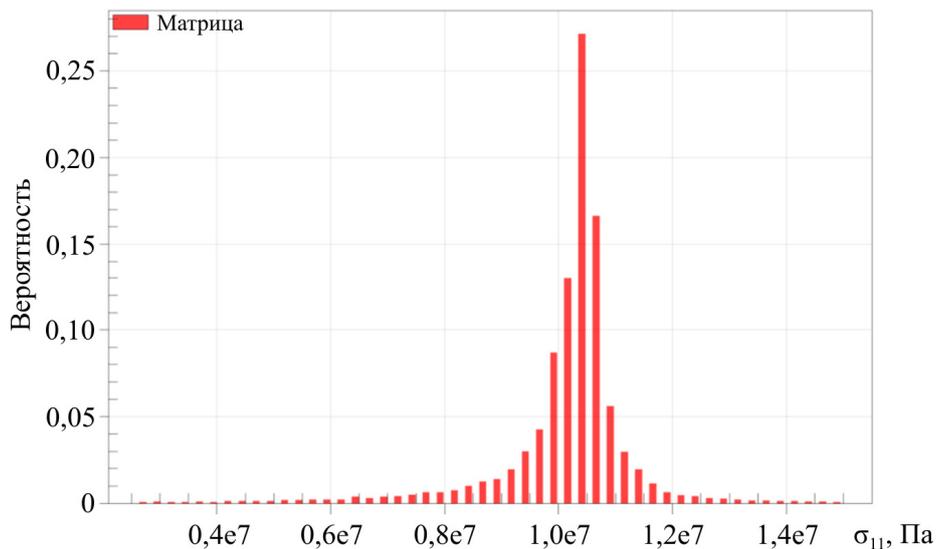


Рис. 3. Разброс вероятности значений компоненты  $\sigma_{11}$  напряжений

в матрице по результатам конечно-элементного моделирования

Fig. 3. Probabilities of  $\sigma_{11}$  component values of stresses in the matrix

according to the results of finite element modelling

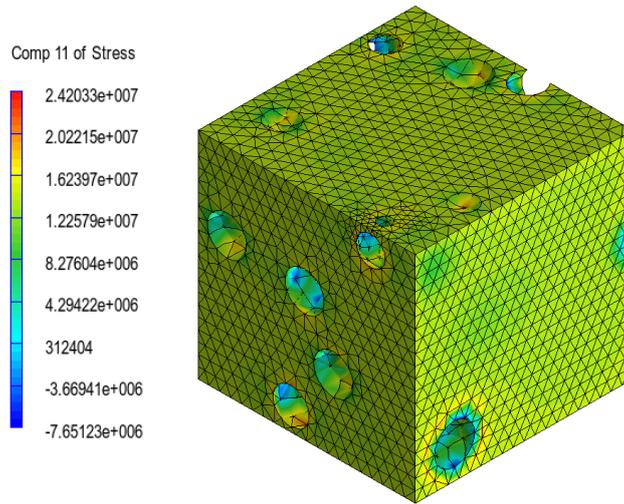


Рис. 4. Значения компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  в матрице пористого представительного объема  
 Fig. 4. Values of  $\sigma_{11}$  stresses component in the matrix of the porous representative volume

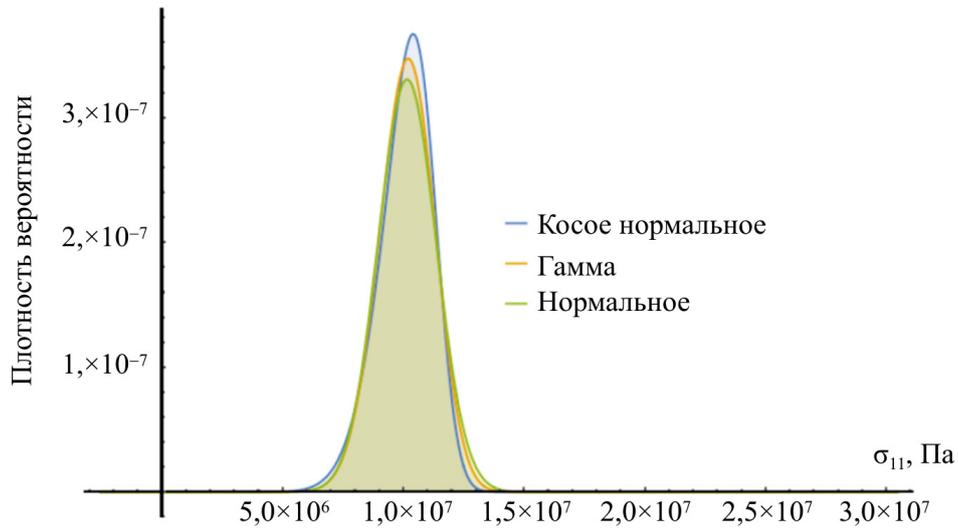


Рис. 5. Плотность распределения вероятности для компоненты 11 тензора напряжений в матрице  
 Fig. 5. Density of probability distribution for component 11 of stresses tensor in the matrix

Параметры законов распределения напряжений  $\sigma_{11}$  на шаге нагружения  $u_1 = 2 \times 10^{-4}$   
 Parameters of laws of stress distribution  $\sigma_{11}$  at a loading step  $u_1 = 2 \times 10^{-4}$

| Параметр                    | Распределение       |                     |                     |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                             | нормальное          | косое нормальное    | гамма               |
| Параметр сдвига $\alpha$    | $1,015 \times 10^7$ | $1,127 \times 10^7$ | 12,21               |
| Масштабный параметр $\beta$ | $1,207 \times 10^6$ | $1,641 \times 10^6$ | $7,147 \times 10^6$ |
| Параметр формы $k$          | –                   | –2,115              | 4,695               |
| Параметр формы $\theta$     | –                   | –                   | 4,200               |

В общем случае из-за несимметричности функции плотности вероятности необходимо использовать многопараметрические распределения (косое нормальное, гамма, Вейбулла и др.), для определения которых в рамках стохастического моделирования необходимо как минимум три центральных момента. Из результатов видно, что в рассматриваемом примере распределение значений напряжений близко к нормальному закону. В этом случае для определения параметров распределения на основе результатов стохастической модели достаточно первых двух центральных моментов (среднего значения и дисперсии).

Для полученных законов распределения напряжений  $\sigma_{11}$  в матрице можно получить зависимость вероятности разрушения от значения критической константы  $\sigma_{11}^{(cr)}$  (рис. 6).

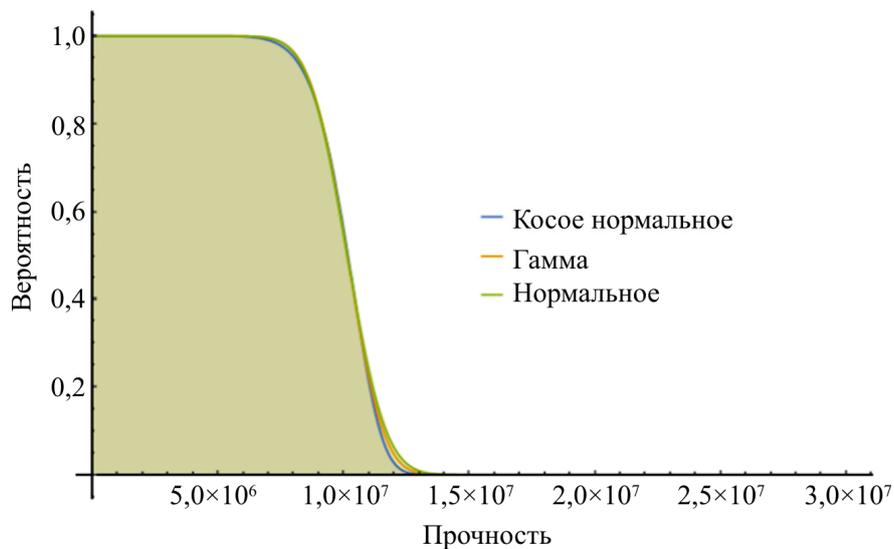


Рис. 6. Значение функции вероятности выполнения критерия в зависимости от предела прочности  $\sigma_{11}^{(cr)}$  для матрицы

Fig. 6. Value of the probability function of the criterion depending on the yield value  $\sigma_{11}^{(cr)}$  for the matrix

#### 4. Расчет вероятности разрушения при статическом нагружении

На основе ключевых положений предложенной методики можно реализовать стохастическую модель прогрессирующего разрушения. Тензор структурных модулей упругости  $C_{ijkl}(\vec{r})$  зависит от радиуса-вектора и является кусочно-постоянным в представительном объеме:

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) C_{ijkl}^{(I)} + (1 - \varphi(\vec{r})) C_{ijkl}^{(M)}. \quad (20)$$

Если принять, что вероятность разрушения равна отношению объема разрушенных элементов в представительном объеме к представительному объему целиком, то после осреднения получаем

$$\langle C_{ijkl}(\vec{r}) \rangle = p D_I C_{ijkl}^{(I)} + (1 - p) D_M C_{ijkl}^{(M)}, \quad (21)$$

где вероятности разрушения включений  $D_I$  и матрицы  $D_M$  определяются по формуле (2). При моделировании накопления повреждений в рамках стохастической модели происходит деградация свойств матрицы и включений за счет увеличения вероятности разрушения фаз на каждом шаге нагружения.

Для рассмотренного в предыдущем параграфе частного случая представительного объема было проведено моделирование прогрессирующего разрушения на основе конечно-элементной и стохастической упругой модели при использовании критерия максимальных напряжений (1) и значении критической константы  $\sigma_{11}^{(cr)} = 2,1 \times 10^7$  Па. На рис. 7 представлен график напряжения-деформации в матрице, полученный при помощи двух моделей.

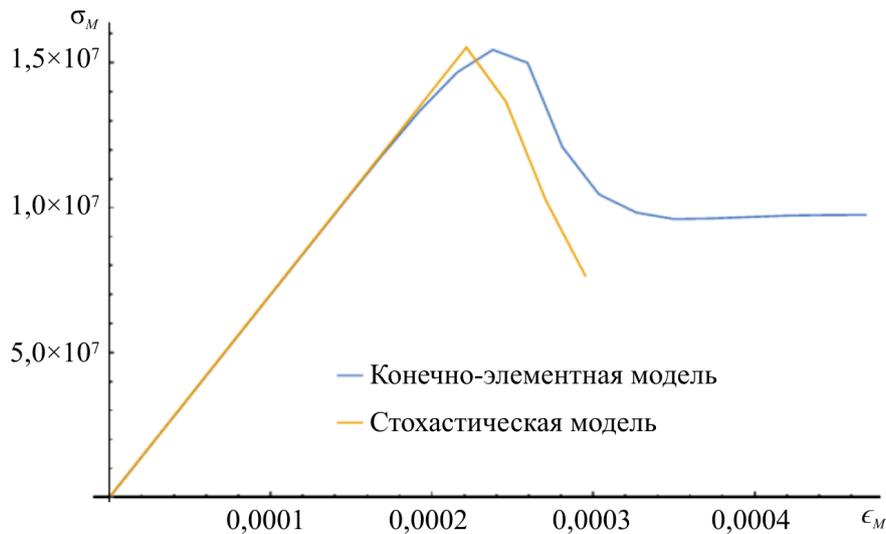


Рис. 7. Зависимость напряжений от деформаций в матрице  
 Fig. 7. Dependence of stresses on deformations in the matrix

Несмотря на то, что в упругой области модели дают идентичный результат, стохастическая модель имеет более выраженный обрыв на графике. Это связано с точностью численного решения интегральных уравнений в стохастической модели и разбивки сетки при конечно-элементном анализе, а также с шагом нагружения. На графике матрица начинает разрушаться до того, как среднее значение напряжений достигнет критического значения, поскольку обе модели оперируют осредненными величинами – в стохастической модели осреднение происходит по кусочно-постоянным функциям, а в конечно-элементной по объемам элементов.

## Выводы

В данной работе представлен подход, позволяющий восстанавливать законы распределений полей напряжений и деформаций в компонентах представительного объема и вычислять на их основе значения вероятностей разрушения фаз представительного объема при заданных критериях и прочностных константах. Рассмотрены численные примеры.

В общем случае описанная методика позволяет восстановить функции распределения всех компонент тензора напряжений, что позволяет вычислять вероятность разрушения с использованием более сложных критериев, комбинирующих в себе прочностные константы материала и значения компонент тензоров напряжений или деформаций.

Стохастический подход может быть использован для исследования степени влияния разброса параметров микроструктуры и констант неоднородной среды на прочностные характеристики материала [36]. Для оценки прочности всего представительного объема на основе вероятности микроразрушения существует ряд подходов, позволяющих установить связь между вероятностью разрушения микрокомпонент, количеством разрушенных микро-частиц, а также экспериментальными данными. Так, вводя параметры, определяемые экспериментально для каждого материала, можно получать соотношения, напрямую связывающие вероятности микро- и макромасштабного разрушения. Существуют также подходы, основанные на базовых математических теориях, таких как теория перколяции [37] и теория пучка [38]. Критерии для компонент, представленные в виде законов распределения тензоров напряжений и деформаций, могут соответствовать тому или иному механизму разрушения, что позволяет использовать модель разрушения с совокупностью критериев.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-2395.2017.1), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00327\_a, 16-41-590259-p\_a).

## Acknowledgments

The work was carried out with the financial support from the Grant of the Russian Federation President aimed at the State Support of Young Scientists, PhDs (MK-2395.2017.1), as well as the Russian Foundation for Basic Research (Projects 16-01-00327\_a, 16-41-590259-p\_a).

## Библиографический список

1. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 p.
2. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 p.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микroneоднородных сред. – М.: Наука, 1977.
4. Torquato S. Random Heterogeneous Materials // Applied Mechanics Reviews. – 2002. – Vol. 16. XXI. – 703 p.
5. 3-D microstructure reconstruction of polymer nano-composite using FIB-SEM and statistical correlation function / A. Sheidaei [et al.] // Compos. Sci. Technol. – 2013. – Vol. 80. – P. 47–54.
6. Yeong C., Torquato S. Reconstructing random media. II. Three-dimensional media from two-dimensional cuts // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 58. – No. 1. – P. 224–233.
7. Three-dimensional reconstruction and homogenization of heterogeneous materials using statistical correlation functions and FEM / M. Baniassadi [et al.] // Comput. Mater. Sci. – 2012. – Vol. 51. – No. 1. – P. 372–379.
8. Jiao Y., Stillinger F.H., Torquato S. Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions. II. Algorithmic details and applications // Phys. Rev. E – Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. – 2008. – Vol. 77. – No. 3. – P. 1–15.
9. Liu K.C., Ghoshal A. Validity of random microstructures simulation in fiber-reinforced composite materials // Compos. Part B Eng. – 2014. – Vol. 57. – P. 56–70.

10. Hyun S., Torquato S. Designing composite microstructures with targeted properties // *J. Mater. Res.* – 2001. – Vol. 16. – No. 1. – P. 280–285.
11. Multi-site micromechanical modelling of thermo-elastic properties of heterogeneous materials / W. Kpobie [et al.] // *Compos. Struct.* – 2012. – Vol. 94. – No. 6. – P. 2068–2077.
12. Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A. The Generalized Method of Cells Micromechanics // *Micromechanics of Composite Materials.* – 2013. – P. 227–350.
13. Torquato S. Optimal Design of Heterogeneous Materials // *Annu. Rev. Mater. Res.* – 2010. – Vol. 40. – No. 1. – P. 101–129.
14. Melro A.R., Camanho P.P., Pinho S.T. Influence of geometrical parameters on the elastic response of unidirectional composite materials // *Compos. Struct.* – 2012. – Vol. 94. – No. 11. – P. 3223–3231.
15. Yu M., Zhu P., Ma Y. Effects of particle clustering on the tensile properties and failure mechanisms of hollow spheres filled syntactic foams: A numerical investigation by microstructure based modeling // *Mater. Des.* – 2013. – Vol. 47. – P. 80–89.
16. Influence of waviness and curliness of fibres on mechanical properties of composites / A.Y. Matveeva [et al.] // *Comput. Mater. Sci.* – 2014. – Vol. 87. – P. 1–11.
17. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites // *Int. J. Eng. Sci.* – 2012. – Vol. 58. – P. 21–34.
18. Böhm H.J., Rasool A. Effects of particle shape on the thermoelastoplastic behavior of particle reinforced composites // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – Vol. 87. – P. 90–101.
19. A statistical descriptor based volume-integral micromechanics model of heterogeneous material with arbitrary inclusion shape / Z. Liu [et al.] // *Comput. Mech.* – 2015. – Vol. 55. – No. 5. – P. 963–981.
20. Islam M., Tudryn G.J., Picu C.R. Microstructure modeling of random composites with cylindrical inclusions having high volume fraction and broad aspect ratio distribution // *Comput. Mater. Sci.* – 2016. – Vol. 125. – P. 309–318.
21. Representative volume element for composites reinforced by spatially randomly distributed discontinuous fibers and its applications / W. Tian [et al.] // *Compos. Struct.* – 2015. – Vol. 131. – P. 366–373.
22. Zhou J., Qi L., Gokhale A.M. Generation of Three-Dimensional Microstructure Model for Discontinuously Reinforced Composite by Modified Random Sequential Absorption Method // *J. Eng. Mater. Technol.* – 2016. – Vol. 138. – No. 2. – P. 21001.
23. Internal geometric modelling of 3D woven composites: A comparison between different approaches / N. Isart [et al.] // *Compos. Struct.* – 2015. – Vol. 132. – P. 1219–1230.
24. Tashkinov M. Statistical methods for mechanical characterization of randomly reinforced media // *Mech. Adv. Mater. Mod. Process.* – 2017. – Vol. 3. – No. 1. – P. 18.
25. Buryachenko V.A. *Micromechanics of heterogeneous materials* // *Micromechanics of Heterogeneous Materials.* – Boston, MA: Springer US, 2007. – 1–686 p.
26. Берестова С.А., Хананов Ш.М. О некоторых путях становления структурно-феноменологических теорий в механике деформируемого твердого тела // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2010. – № 4. – С. 17–28.
27. Multiscale methods for composites: A review / P. Kanouté [et al.] // *Arch. Comput. Methods Eng.* Springer Netherlands. – 2009. – Vol. 16. – No. 1. – P. 31–75.
28. Microstructure sensitive design for performance optimization / D.T. Fullwood [et al.] // *Prog. Mater. Sci.* – 2010. – Vol. 55. – No. 6. – P. 477–562.
29. Tashkinov M. Micro-scale modeling of phase-level elastic fields of SiC reinforced metal matrix multiphase composites using statistical approach // *Comput. Mater. Sci.* – 2016. – Vol. 116. – P. 113–121.
30. Cam L. Le, Yang G. Lo. *Asymptotics in Statistics: Some Basic Concepts* // *Springer Series in Statistics*, 2000. – 285 p.
31. Tashkinov M.A. *Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials* BT – *Mechanics of Advanced Materials: Analysis of Properties and Performance*, eds. V.V. Silberschmidt, V.P. Matveenko. – Cham: Springer International Publishing, 2015. – P. 43–78.

32. Xu X.F., Chen X., Shen L. A Green-function-based multiscale method for uncertainty quantification of finite body random heterogeneous materials // *Comput. Struct.* – 2009. – Vol. 87. – No. 21–22. – P. 1416–1426.

33. Chen E.L., Ang W.T. Green's functions and boundary element analysis for bimetals with soft and stiff planar interfaces under plane elastostatic deformations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2014. – Vol. 40. – P. 50–61.

34. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1997.

35. Tashkinov M. Statistical characteristics of structural stochastic stress and strain fields in polydisperse heterogeneous solid media // *Comput. Mater. Sci.* – 2014. – Vol. 94. – No. C. – P. 44–50.

36. Tashkinov M., Spaskova E. Estimation of microstructural failure probability based on restoration of the field distributions laws in components of heterogeneous media // *Procedia Struct. Integr.* – 2017. – Vol. 5. – P. 608–613.

37. Durrett R.T. Percolation Theory for Mathematicians (Harry Kesten) // *SIAM Review.* – Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1984. – Vol. 26. – P. 446–448.

38. Bredon G.E. Sheaf Theory. – New York: Springer New York, 1997. – Vol. 170.

## References

1. Lomakin V.A. Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemykh tel [Statistical Problems of the Mechanics of Solid Deformable Bodies]. *Moscow, Nauka*, 1970, 139 p.

2. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statisticheskaya mekhanika kompozitnykh materialov [Statistical mechanics of composite materials]. *Minsk, Izd-vo Belarus, gos. un-ta*, 1978, 208 p.

3. Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Elasticity theory of microinhomogeneous media]. *Moscow, Nauka*, 1976, 400 p.

4. Torquato S. Random Heterogeneous Materials. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, vol. 16, 703 p.

5. Sheidaei A. et al. 3-D microstructure reconstruction of polymer nano-composite using FIB-SEM and statistical correlation function. *Compos. Sci. Technol.*, 2013, vol. 80, pp. 47-54.

6. Yeong C., Torquato S. Reconstructing random media. II. Three-dimensional media from two-dimensional cuts. *Phys. Rev. E.*, 1998, vol. 58, pp. 224-233.

7. Baniassadi M. et al. Three-dimensional reconstruction and homogenization of heterogeneous materials using statistical correlation functions and FEM. *Comput. Mater. Sci.*, 2012, vol. 51, pp. 372-379.

8. Jiao Y., Stillinger F.H., Torquato S. Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions. II. Algorithmic details and applications. *Phys. Rev. E – Stat. Nonlinear*, 2008, vol. 77, P. 1-15.

9. Liu K.C., Ghoshal A. Validity of random microstructures simulation in fiber-reinforced composite materials. *Compos. Part B Eng.*, 2014, vol. 57, P. 56-70.

10. Hyun S., Torquato S. Designing composite microstructures with targeted properties. *J. Mater. Res.*, 2001, vol. 16, P. 280-285.

11. Kpobie W. et al. Multi-site micromechanical modelling of thermo-elastic properties of heterogeneous materials. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, P. 2068-2077.

12. Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A. The Generalized Method of Cells Micromechanics. *Micromechanics of Composite Materials*, 2013, 227-350 p.

13. Torquato S. Optimal Design of Heterogeneous Materials. *Annu. Rev. Mater. Res.*, 2010, vol. 40, pp. 101-129.

14. Melro A.R., Camanho P.P., Pinho S.T. Influence of geometrical parameters on the elastic response of unidirectional composite materials. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, P. 3223-3231.

15. Yu M., Zhu P., Ma Y. Effects of particle clustering on the tensile properties and failure mechanisms of hollow spheres filled syntactic foams: A numerical investigation by microstructure based modeling. *Mater. Des.*, 2013, vol. 47, P. 80-89.

16. Matveeva A.Y. et al. Influence of waviness and curliness of fibres on mechanical properties of composites. *Comput. Mater. Sci.*, 2014, Vol. 87, P. 1-11.

17. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites. *Int. J. Eng. Sci.*, 2012, vol. 58, pp. 21-34.

18. Böhm H.J., Rasool A. Effects of particle shape on the thermoelastoplastic behavior of particle reinforced composites. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 87, pp. 90-101.
19. Liu Z. et al. A statistical descriptor based volume-integral micromechanics model of heterogeneous material with arbitrary inclusion shape. *Comput. Mech.* 2015, vol. 55, no. 5, pp. 963-981.
20. Islam M., Tudryn G.J., Picu C.R. Microstructure modeling of random composites with cylindrical inclusions having high volume fraction and broad aspect ratio distribution. *Comput. Mater. Sci.*, 2016, vol. 125, pp. 309-318.
21. Tian W. et al. Representative volume element for composites reinforced by spatially randomly distributed discontinuous fibers and its applications. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 131, pp. 366-373.
22. Zhou J., Qi L., Gokhale A.M. Generation of Three-Dimensional Microstructure Model for Discontinuously Reinforced Composite by Modified Random Sequential Absorption Method. *J. Eng. Mater. Technol.* 2016, vol. 138, no. 2, pp. 21001.
23. Isart N. et al. Internal geometric modelling of 3D woven composites: A comparison between different approaches. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 132, pp. 1219-1230.
24. Tashkinov M. Statistical methods for mechanical characterization of randomly reinforced media. *Mech. Adv. Mater. Mod. Process.*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 18.
25. Buryachenko V.A. Micromechanics of heterogeneous materials. *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. Boston, MA: Springer US, 2007, 1-686 p.
26. Berestova S.A., Khananov Sh.M. O nekotoryh putyah stanovleniya strukturno-fenomonologicheskikh teoriy v mehanike deformiruемого tverdogo tela [About several ways of establishment of structural-phenomenological theories in mechanics of solids]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2010, no. 4, pp. 17-28.
27. Kanouté P. et al. Multiscale methods for composites: A review. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 2009, vol. 16, pp. 31-75.
28. Fullwood D.T. et al. Microstructure sensitive design for performance optimization. *Prog. Mater. Sci.*, 2010, vol. 55, no. 6, pp. 477-562.
29. Tashkinov M. Micro-scale modeling of phase-level elastic fields of SiC reinforced metal matrix multiphase composites using statistical approach. *Comput. Mater. Sci.* 2016, vol. 116, pp. 113-121.
30. Cam L. Le, Yang G. Lo. Asymptotics in Statistics: Some Basic Concepts. *Springer Series in Statistics*, 2000, 285 p.
31. Tashkinov M.A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials, in Silberschmidt V.V., Matveenko V.P. (eds.) *Mechanics of Advanced Material*, Springer, pp. 43-78.
32. Xu X.F., Chen X., Shen L. A Green-function-based multiscale method for uncertainty quantification of finite body random heterogeneous materials. *Comput. Struct.*, 2009, vol. 87, pp. 1416-1426.
33. Chen E.L., Ang W.T. Green's functions and boundary element analysis for bimetals with soft and stiff planar interfaces under plane elastostatic deformations. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2014, Vol. 40, pp. 50-61.
34. Vil'deman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mehanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Mechanics of nonlinear deformation and failure of composite materials]. *Moscow, Nauka*, 1997, 288 p.
35. Tashkinov M. Statistical characteristics of structural stochastic stress and strain fields in polydisperse heterogeneous solid media. *Comput. Mater. Sci.* 2014, vol. 94, pp. 44-50.
36. Tashkinov M., Spaskova E. Estimation of microstructural failure probability based on restoration of the field distributions laws in components of heterogeneous media. *Procedia Struct. Integr.*, 2017, vol. 5, pp. 608-613.
37. Durrett R.T. Percolation Theory for Mathematicians (Harry Kesten). *SIAM Review*, 1984, vol. 26, pp. 446-448.
38. Bredon G.E. Sheaf Theory. *New York, NY: Springer New York*, 1997, vol. 170.