

Романова Т.П. Моделирование динамического изгиба жесткопластической армированной слоистой криволинейной пластины с закрепленным круглым отверстием при взрывных нагрузках // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 167–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.10

Romanova T.P. Modeling of dynamic bending of rigid-plastic reinforced layered curvilinear plate with supported circular hole under explosive loads. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 3, pp. 167-187. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.10



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.10

УДК 539.4+539.37

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ АРМИРОВАННОЙ СЛОИСТОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ВЗРЫВНЫХ НАГРУЗКАХ

Т.П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 11 апреля 2017 г.

Принята: 22 августа 2017 г.

Опубликована: 30 сентября 2017 г.

#### Ключевые слова:

жесткопластическая модель, слоисто-волокнистая структура, криволинейный контур, закрепленное отверстие, динамическая нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

### АННОТАЦИЯ

Разработан общий метод расчета динамического поведения жесткопластических гибридных слоистых композитных пластин с произвольным кусочно-гладким свободным внешним контуром и с круглым внутренним отверстием, шарнирно опертым или защемленным. На пластины действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Пластины являются гибридными слоисто-волокнистыми с распределением слоев симметрично относительно срединной поверхности. В каждом слое находятся армирующие волокна, расположенные по радиальным, окружным и угловым направлениям. Используется структурная модель армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах. Рассмотрены разные схемы деформирования пластин. При нагрузках, незначительно превышающих предельные значения, пластины деформируются в форме линейчатых поверхностей, вращаясь вокруг опорного контура. При больших амплитудах нагрузки во внутренней области пластин может образовываться пластический шарнир в форме окружности. На основе принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера для каждого из механизмов движения получены уравнения, описывающие динамическое деформирование пластин, и определены условия их реализации. Получены аналитические выражения для оценки предельных нагрузок, времени деформирования и остаточных прогибов пластин. Приведены примеры численных решений для квадратной пластины с круглым закрепленным отверстием и для кольцевой пластины. Показано, что изменение параметров армирования существенно влияет как на несущую способность пластин, так и на остаточные прогибы. Предложенные решения могут быть использованы при проектировании армированных металлокомпозитных криволинейных плоских элементов конструкций с закрепленным круглым отверстием.

© ПНИПУ

© Романова Татьяна Павловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: lab4nemir@gmail.com

Tatiana P. Romanova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: lab4nemir@gmail.com



## MODELING OF DYNAMIC BENDING OF A RIGID-PLASTIC REINFORCED LAYERED CURVILINEAR PLATE WITH A SUPPORTED CIRCULAR HOLE UNDER EXPLOSIVE LOADS

T.P. Romanova

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 11 April 2017  
Accepted: 22 August 2017  
Published: 30 September 2017

#### Keywords:

rigid-plastic model, fibrous-laminated structure, curvilinear contour, supported hole, dynamic load, limit load, final deflection.

### ABSTRACT

A general method is developed to calculate the dynamic behavior of rigid-plastic hybrid laminated composite plates with an arbitrary piecewise-smooth free outer contour and a circular inner simply supported or clamped hole. The plates are under a uniformly distributed, short-term dynamic load of a high intensity explosive type. The plates are hybrid fibrous-laminated with the distribution of layers symmetrically relative to the middle surface. In each layer the reinforcing fibres are placed in radial, circumferential and angular directions. The structural model of the reinforced layer with one-dimensional stress states in the fibres is used. Different schemes of dynamic deformation of the plates are possible. In case when the loads slightly exceed the ultimate values, the plates are deformed in the form of ruled surfaces rotating around the supported contour. At high load amplitudes, the plastic hinge in the form of a circle can be formed in the inner region of the plates. On the basis of the virtual power principle together with the principle of d'Alembert for each of the schemes of motion, the dynamic deformation equations are obtained and the conditions for their implementation are analyzed. Analytical expressions are obtained for the evaluation of limit loads, time of deformation and final deflections of the plates. Numerical examples are given for square plates with a supported circular hole and for annular plates. It is shown that the change in the reinforcement parameters significantly affects both the carrying capacity of plates and the final deflections. The proposed solutions can be used in the design of reinforced metal-composite curvilinear flat structural elements with a supported circular hole.

© PNRPU

---

## Введение

В настоящее время существует большое количество технологий, позволяющих создавать слоисто-волоконистые композиты из практически любых наборов материалов с различными физико-механическими свойствами. Многослойные армированные плоские конструкции находят широкое применение в различных областях современной техники: космической, авиационной, кораблестроительной; промышленном, гражданском и транспортном строительстве, химическом и энергетическом машиностроении [1–6]. При воздействии высокоинтенсивных нагрузок на такие элементы конструкций их материалы проявляют в основном пластические свойства. Исследования динамического деформирования композитных элементов конструкций за пределом упругого поведения имеют принципиальное значение для оценки степени их повреждаемости, оценки рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. Анализ литературных источников показывает, что такие исследования находятся пока в зачаточном состоянии [7–17]. Для решения динамических задач при взрывном типе нагрузок широкое распространение благодаря простоте и удобству расчетных схем получила модель жесткопластического тела [7, 18]. В [7] обсуждается современное состояние расчетов неупругого динамического деформирования оболочечных конструкций слоисто-волоконистой структуры и приведено обоснование использования модели жесткопластического тела в таких расчетах. Достоинство решений жесткопластической теории состоит в том, что, будучи довольно простыми, они способ-

ны давать быстрое и качественно верное представление о деформации. При этом следует учитывать, что область применения этой модели ограничена малыми прогибами тонкостенных конструкций [18]. В работе [7] также рассмотрены достоинства и недостатки структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [19, 20], которая с допустимой точностью моделирует композитные материалы в случае неидеального контакта арматуры со связующим. В [21] рассматривается численное моделирование упругопластического динамического поведения осесимметричных однослойных и многослойных пластин и оболочек переменной толщины из традиционных и композиционных материалов и отмечено, что при решении многих задач динамики композитных оболочек даже достаточно грубые модели пластического деформирования материала, какой, например, является жесткопластическая модель, позволяют во многих случаях получить адекватное представление о процессах деформирования.

В настоящей работе построена модель динамического поведения жесткопластических гибридных слоистых композитных пластин со свободным произвольным кусочно-гладким внешним контуром и закрепленным круглым внутренним отверстием, шарнирно опертым или защемленным, на которые действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Армирование пластин выполнено в радиальном (по отношению к опертому круглому контуру), окружном и угловом направлениях. Считается, что механические характеристики материалов, составляющих слоистый пакет, являются соразмерными (отличающимися не более чем на порядок). По толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру, на границах между слоями выполняются условия идеального механического контакта. В этом случае для слоистых пластин приемлемо использование традиционных гипотез Кирхгофа–Лява. Количество параметров предложенной математической модели позволяет в широком диапазоне изменять структуру армирования пластин, объемное содержание армирующих волокон, а также толщину слоев и физические характеристики композита. Известные в литературе динамические решения для двусвязных пластических пластин с закрепленным отверстием касаются только однородных кольцевых [22] и криволинейных пластин [23, 24]. Настоящая работа является развитием модели деформирования, разработанной в [24], на случай слоисто-волоконистых гибридных пластин.

## 1. Формулировка задачи, основные геометрические соотношения и предположения

Рассмотрим пластину с круглым закрепленным отверстием  $L_1$  радиусом  $R_1$ , шарнирно опертым или защемленным, со свободным кусочно-гладким внешним контуром  $L_2$ . Уравнение внешнего контура  $L_2$  в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с полюсом в центре окружности  $L_1$  имеет вид  $r = R_2(\varphi)$ , где  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (рис. 1). Считаем для определенности, что контур  $L_2$  имеет ось симметрии  $\varphi = \pi$ . Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки высокой интенсивности взрывного типа  $P(t)$  с  $P_{\max} = P(0)$ . Прогибы пластины считаются малыми. Влиянием мембранных сил и вертикальных сдвигов в условии пластичности и геометрически изменениями пренебрегаем.

Пластина выполнена из композитного материала, который является слоистым с симметричным относительно срединной поверхности пластины распределением слоев. Предполагается, что каждый слой пластины содержит по толщине большое количество армированных элементарных слоев и связующих их изотропных прослоек, описываемых моделью идеального жесткопластического материала. В каждом слое возможно расположение волокон арматуры, которые деформируются, как одномерные элементы, и расположены в виде симметричных относительно радиуса двух семейств криволинейных траекторий (угловое армирование), в радиальном и окружном направлениях. Траектории волокон углового армирования  $r = \bar{r}(\varphi - \varphi_0)$  описываются неубывающими или невозрастающими функциями окружной координаты  $\varphi$ , соответственно ( $\varphi_0$  – начальное значение  $\varphi$ , свое для каждой траектории). Значение  $\varphi_0$  при переходе от одной траектории к соседней того же семейства изменяется на малую фиксированную величину (шаг). Тогда вследствие такой равномерной укладки волокон в каждом элементарном армирующем слое параметры углового армирования (плотность и угол армирования) не зависят от окружной координаты [25]. В разных слоях пластины материалы арматуры и связующего различные. Структура армирования пластины из одних и тех же составляющих материалов может иметь разный вид за счет взаимного изменения порядка расположения слоев и изменения направления расположения волокон.

Для рассматриваемой пластины приведенная поверхностная плотность материала пластины определяется так:

$$\rho(r) = 2 \sum_{k=1}^n \rho_k(r)(h_k - h_{k-1}),$$

$$\rho_k(r) = [1 - \omega_{1k}(r) - \omega_{2k}(r) - 2\omega_{3k}(r)]\rho_{0k} + \omega_{1k}(r)\rho_{1k} + \omega_{2k}(r)\rho_{2k} + 2\omega_{3k}(r)\rho_{3k},$$

где  $n$  – половина общего количества слоев;  $\rho_{0k}$  – плотность связующего материала в  $k$ -м слое;  $\rho_{ik}$ ,  $\omega_{ik}(r)$  – плотность материала арматуры и ее плотность армирования (относительное объемное содержание волокон в слое) в  $k$ -м слое в радиальном ( $i=1$ ), окружном ( $i=2$ ) и угловом ( $i=3$ ) направлении;  $h_k$  – координаты раздела слоев;  $h_0 = 0$ ;  $h_n = H$ ;  $2H$  – толщина пластины.

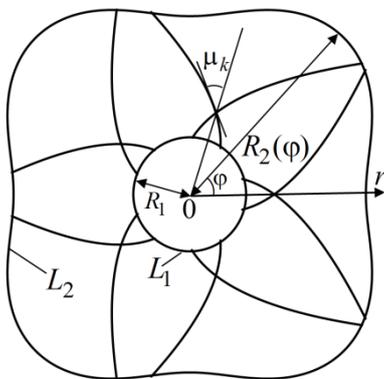


Рис. 1. Криволинейная пластина с круглым отверстием. Схема 1  
Fig. 1. A curvilinear plate with a circular hole. Scheme 1

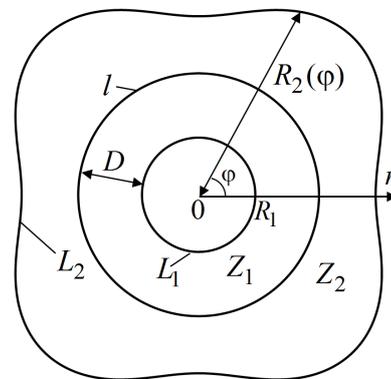


Рис. 2. Криволинейная пластина с круглым отверстием. Схема 2  
Fig. 2. A curvilinear plate with a circular hole. Scheme 2

Предельные изгибающие моменты  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  (погонные), нормальные и тангенциальные к закрепленному контуру пластины  $L_1$  в рамках структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах определяются следующим образом:

$$M_{0j}(r) = \sum_{k=1}^n \sigma_{0jk}(r)(h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (j = 1, 2);$$

$$\sigma_{0jk}(r) = [1 - \omega_{jk}(r) - \omega_{jk}^a(r)]\sigma_{0k} + \omega_{jk}(r)\sigma_{jk} + \omega_{jk}^a(r)\sigma_{3k};$$

$$\omega_{1k}^a(r) = 2\omega_{3k}(r)\cos^2 \mu_k(r); \quad \omega_{2k}^a(r) = 2\omega_{3k}(r)\sin^2 \mu_k(r).$$

Здесь  $\sigma_{0k}$  – предел текучести связующего материала в  $k$ -м слое;  $\sigma_{jk}$ ,  $\sigma_{3k}$  – пределы текучести материала арматуры, расположенной в радиальном, окружном и угловом направлениях в  $k$ -м слое;  $\mu_k(r)$  – угол армирования угловых волокон в  $k$ -м слое (см. рис. 1). В отличие от [19, 20] в предлагаемом варианте структурной модели выполняется следующий предельный переход: если условно принять во всех слоях связующее одно и то же и материал арматуры один и тот же, тогда, если материал арматуры заменить на материал связующего, получим приведенную плотность и предельные значения изгибающих моментов для однородной пластины, выполненной из материала связующего. И наоборот, если материал связующего поменять на материал арматуры, получим приведенную плотность и предельные значения изгибающих моментов для однородной пластины, выполненной из материала арматуры.

Для рассматриваемой пластины из жесткопластического материала возможны разные схемы деформирования в зависимости от величины  $P_{\max}$ . При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки («низких» нагрузках), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные («средних» нагрузках), в случае шарнирного опирания опорного контура  $L_1$  плоскость пластины вращается вокруг контура  $L_1$  с углом поворота  $\alpha_1$  и деформируется в линейчатую поверхность (схема 1). В отличие от однородных пластин [22, 24] в случае защемления опорного контура армированной пластины плоскость пластины при схеме 1 вращается конусообразно вокруг контура  $r = R_1 + d$ ,  $d \geq 0$ . Часть пластины между контуром  $L_1$  и окружностью радиусом  $r = R_1 + d$  не деформируется. Величина  $d$  определяется из условия минимума предельной нагрузки пластины, как это будет показано ниже.

При достаточно высоких значениях  $P_{\max}$  («высоких» нагрузках) схема 1 переходит в схему 2, в которой, как и в случае однородных кольцевых и двусвязных пластин [22–24], движение пластины сопровождается возникновением нестационарной пластической шарнирной окружности  $l$  с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению, движущейся поступательно (рис. 2). При этом пластина деформируется в форме линейчатых поверхностей.

Поскольку деформирование пластины при различном опирании закрепленного контура немного различается, рассмотрим отдельно случаи его шарнирного опирания и защемления.

## 2. Шарнирное опирание внутреннего контура. Схема 1

Уравнения движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [26]:

$$K = A - N. \quad (1)$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} \dot{u}^* ds; \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds. \quad (2)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m \left[ \dot{\theta}^* \right]_{l_m} dl_m + \iint_S \left( M_{01} |\kappa_1^*| + M_{02} |\kappa_2^*| \right) ds. \quad (3)$$

Здесь  $K$ ,  $A$ ,  $N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $S$ ,  $ds$  – площадь и элемент площади пластины;  $u$  – прогиб;  $m$  – количество линий разрыва поля скоростей;  $l_m$  – линии разрыва поля скоростей, включая контур пластины;  $[\dot{\theta}]_{l_m}$  – разрыв скорости угла поворота плоскости пластины на  $l_m$ ;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ ;  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины. Точки над символами обозначают производные по времени. Верхним индексом «\*» обозначены кинематически допустимые величины.

Скорости прогибов пластины для схемы 1 будут представлены в виде

$$(r, \varphi) \in S: \dot{u}(r, \varphi, t) = \dot{\alpha}_1(t)(r - R_1). \quad (4)$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = -\frac{\dot{\alpha}_1(t)}{r}. \quad (5)$$

Выражения (2) будут выглядеть следующим образом:

$$K = 2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi R_2(\varphi)} \int_{R_1}^{\pi R_2(\varphi)} \rho(r)(R_1 - r)^2 r dr d\varphi, \quad (6)$$

$$A = 2P(t) \dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi R_2(\varphi)} \int_{R_1}^{\pi R_2(\varphi)} (r - R_1) r dr d\varphi = \frac{1}{3} P(t) \dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi} (R_2 - R_1)^2 (R_1 + 2R_2) d\varphi. \quad (7)$$

Мощность внутренних сил (3) с учетом (5) имеет выражение

$$N = 2 \int_0^{\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) |\dot{\kappa}_2^*| r dr \right) d\varphi = 2\dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi. \quad (8)$$

Уравнение движения (1) для схемы деформирования 1 примет вид

$$6\dot{\alpha}_1 \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} \rho(r)(R_1 - r)^2 r dr d\varphi = P(t) \int_0^{\pi} (R_2 - R_1)^2 (R_1 + 2R_2) d\varphi - 6 \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi. \quad (9)$$

В начальный момент пластина покоится, и выполняются условия

$$\dot{\alpha}_1(0) = \alpha_1(0) = 0. \quad (10)$$

Предельную нагрузку определим из (9) при учете  $\ddot{\alpha}_1 = 0$ . Тогда имеем

$$P_0 = 6 \left[ \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi \right] / \left[ \int_0^\pi (R_2 - R_1)^2 (R_1 + 2R_2) d\varphi \right]. \quad (11)$$

Запишем уравнение движения (9) в виде

$$\ddot{\alpha}_1(t) = G [P(t) - P_0], \quad (12)$$

$$G = \left[ \int_0^\pi (R_2 - R_1)^2 (R_1 + 2R_2) d\varphi \right] / \left[ 6 \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} \rho(r) (R_1 - r)^2 r dr d\varphi \right].$$

Интегрируя уравнение (12), имеем

$$\dot{\alpha}_1(t) = G \left[ \int_0^t P(\tau) d\tau - P_0 t \right]; \quad \alpha_1(t) = G \left[ \int_0^t \int_0^q P(\tau) d\tau dq - P_0 \frac{t^2}{2} \right].$$

Пластина будет двигаться до остановки в момент времени  $t_f$ , когда выполняется равенство

$$\dot{\alpha}_1(t_f) = 0, \quad (13)$$

тогда

$$t_f = \left( \int_0^{t_f} P(t) dt \right) / P_0.$$

Максимальный остаточный прогиб

$$u_f = \alpha_1(t_f) \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} [R_2(\varphi) - R_1].$$

В случае нагрузки с прямоугольным импульсом  $P(t) = P_{\max}$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$  максимальный остаточный прогиб вычисляется по формуле

$$u_f = G \left[ \left( \int_0^T P(t) dt \right)^2 / (2P_0) - \int_0^T t P(t) dt \right] \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} [R_2(\varphi) - R_1].$$

Все прогибы в пластине определяются соотношениями (4).

Отметим, что в случае шарнирного закрепления контура параметры радиального армирования не входят в выражение (11), но они присутствуют в коэффициенте  $G$  в формуле (12). Следовательно, в рассматриваемой модели при шарнирном опирании контура армирование в радиальном направлении не влияет на величину предельной нагрузки (нагрузки, при которой пластина начнет деформироваться), но влияет на динамическое поведение пластины и ее остаточный прогиб.

Для композитной пластины с произвольным свободным контуром  $L_2$  возможно, что в предельном состоянии пластина вращается вокруг образовавшегося контура  $L_3$ , кото-

рый является пластическим шарниром и пересекает контур  $L_2$ , но не касается его, так как нормальный изгибающий момент на  $L_2$  равен нулю (как, например, на рис. 3).

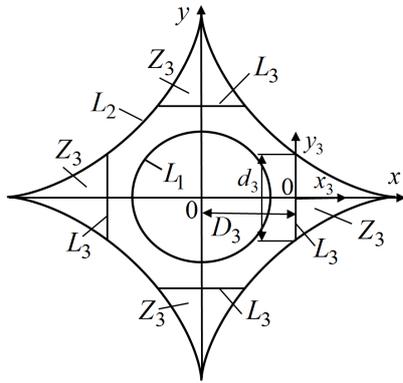


Рис. 3. Криволинейная пластина с круглым отверстием. Схема 3  
Fig. 3. A curvilinear plate with a circular hole. Scheme 3

В силу симметрии контур  $L_3$  состоит из нескольких одинаковых прямолинейных участков, а деформирующаяся часть пластины – из стольких же областей  $Z_3$ , жестко вращающихся вокруг своего опорного участка контура  $L_3$ , длину которого обозначим через  $d_3$  и скорость угла поворота области  $Z_3$  вокруг  $L_3$  – через  $\dot{\alpha}_3$ . Часть пластины между контурами  $L_1$  и  $L_3$  остается недеформированной. Мощности внешних и внутренних сил для  $Z_3$  вычисляются следующим образом:

$$A = \dot{\alpha}_3^*(t)P(t) \iint_{Z_3} x_3 dx_3 dy_3, \quad N = \dot{\alpha}_3^*(t) \int_{-d_3/2}^{d_3/2} M_{nn}(y_3) dy_3,$$

$$M_{nn}(y_3) = M_{01}(r_3) \cos^2 \theta + M_{02}(r_3) \sin^2 \theta, \quad r_3 = y_3 / \sin \theta, \quad \operatorname{tg} \theta = y_3 / D_3.$$

Здесь  $(x_3, y_3)$  – декартова система координат в области  $Z_3$  (см. рис. 3);  $D_3$  – расстояние от центра окружности  $L_1$  до прямой  $L_3$ . В этом случае предельная нагрузка  $P_{03}$  вычисляется так:

$$P_{03} = \min_{L_3} \left[ \int_{-d_3/2}^{d_3/2} M_{nn}(y_3) dy_3 \right] / \left[ \iint_{Z_3} x_3 dx_3 dy_3 \right].$$

Если выполняется неравенство  $P_0 < P_{03}$ , то деформирование будет происходить по схеме 1. Пластины с условием  $P_{03} < P_0$  здесь рассматриваться не будут.

### 3. Шарнирное опирание внутреннего контура. Схема 2

Рассмотрим подробно схему 2, в которой движение пластины сопровождается возникновением нестационарной пластической шарнирной окружности  $l$ , движущейся поступательно. Кривая  $l$  разбивает пластину на две линейчатые поверхности  $Z_1$  и  $Z_2$  (см. рис. 2). Область  $Z_2$  движется поступательно и вращается вокруг кривой  $l$ . Поскольку кривая  $l$  движется поступательно, то все ее точки движутся с одинаковой скоростью, которую обозначим через  $\dot{w}_c(t)$ . Как в [24], из непрерывности скоростей на  $l$  следует, что нормаль к линии  $l$  является нормалью к окружности  $L_1$  и что расстояние  $D$  между  $L_1$  и  $l$  не зависит от параметра  $\varphi$ . Следовательно, линия  $l$  будет окружностью радиуса  $R_1 + D$ . Вследствие непрерывности скоростей на линии  $l$  область  $Z_1$  вращается вокруг опорного контура  $L_1$  с одинаковой скоростью; обозначим ее через  $\dot{\alpha}_1(t)$ . Считаем, что область  $Z_2$  вращается вокруг подвижной шарнирной окружности  $l$  со скоростью  $\dot{\alpha}_2(t)$ ,

также не зависящей от параметра  $\varphi$ . Тогда скорости прогибов пластины для схемы 2 будут представлены в виде (рис. 4)

$$(r, \varphi) \in Z_1: \dot{w}(r, \varphi, t) = \dot{\alpha}_1(t)(r - R_1), \quad (14)$$

$$(r, \varphi) \in Z_2: \dot{w}(r, \varphi, t) = \dot{w}_c(t) + \dot{\alpha}_2(t)(r - R_1 - D),$$

где области  $Z_1$  и  $Z_2$  определены так:

$$Z_1: R_1 \leq r \leq R_1 + D, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$Z_2: R_1 + D \leq r \leq R_2(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины в области  $Z_1$  имеют вид (5) и в области  $Z_2$

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -\dot{\alpha}_2(t)/r.$$

Учитывая введенные обозначения, выражения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} K &= \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_1} \rho (r - R_1)^2 r dr d\varphi + \\ &+ \iint_{Z_2} \rho [\ddot{\alpha}_2 (r - R_1 - D) + \ddot{w}_c] [\dot{\alpha}_2^* (r - R_1 - D) + \dot{w}_c^*] r dr d\varphi = \\ &= 2\dot{\alpha}_1^* \ddot{\alpha}_1 \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_1+D} \rho (r - R_1)^2 r dr d\varphi + 2\dot{\alpha}_2^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} \rho (r - R_1 - D)^2 r dr d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \ddot{w}_c \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} \rho (r - R_1 - D) r dr d\varphi \right] + \\ &+ 2\dot{w}_c^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} \rho (r - R_1 - D) r dr d\varphi + \ddot{w}_c \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} \rho r dr d\varphi \right], \\ A &= P(t) \left\{ \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_1} (r - R_1) r dr d\varphi + \iint_{Z_2} [\dot{w}_c^* + \dot{\alpha}_2^* (r - R_1 - D)] r dr d\varphi \right\} = \\ &= P(t) \left[ \dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_1+D} (r - R_1) r dr d\varphi + \dot{w}_c^* \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} r dr d\varphi + \dot{\alpha}_2^* \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} (r - R_1 - D) r dr d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение (3) для мощности внутренних сил  $N$  представим в виде

$$N = \sum_{i=1}^3 N_i,$$

где  $N_1, N_2, N_3$  – мощности внутренних сил внутри области  $Z_1$ , на линии  $l$  и внутри области  $Z_2$  соответственно. Эти мощности вычисляются так:

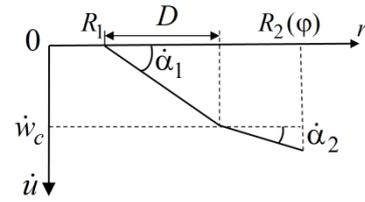


Рис. 4. Скорости прогибов пластины для схемы 2  
Fig. 4. Velocities of plate deflections for scheme 2

$$N_1 = \iint_{Z_1} M_{02}(r) \left| \kappa_2^* \right| ds = 2\dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_1+D} M_{02}(r) dr d\varphi = 2\dot{\alpha}_1^* \pi \int_{R_1}^{R_1+D} M_{02}(r) dr ,$$

$$N_2 = M_{01}(R_1 + D) \oint_l \left[ \dot{\theta}^* \right]_l dl = 2 \left| \dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_2^* \right| M_{01}(R_1 + D) \int_0^{\pi} dl =$$

$$= 2\pi \left| \dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_2^* \right| (R_1 + D) M_{01}(R_1 + D),$$

$$N_3 = \iint_{Z_2} M_{02}(r) \left| \kappa_2^* \right| ds = 2\dot{\alpha}_2^* \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi .$$

Полная мощность внутренних сил пластины  $N$  определяется выражением

$$N = \dot{\alpha}_1^* m_1 + \dot{\alpha}_2^* m_2, \tag{17}$$

$$m_1(D) = 2\pi \left[ \int_{R_1}^{R_1+D} M_{02}(r) dr \pm (R_1 + D) M_{01}(R_1 + D) \right],$$

$$m_2(D) = 2 \left[ \mp \pi (R_1 + D) M_{01}(R_1 + D) + \int_0^{\pi} \int_{R_1+D}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi \right],$$

где верхний знак соответствует  $\dot{\alpha}_1^* > \dot{\alpha}_2^*$  (вариант а схемы 2 – схема 2а); нижний знак – случаю  $\dot{\alpha}_1^* < \dot{\alpha}_2^*$  (вариант б схемы 2 – схема 2б). При условии  $\dot{\alpha}_1^* = \dot{\alpha}_2^*$  схема 2 переходит в схему 1.

Подставляя (15)–(17) в (1), учитывая независимость функций  $\dot{\alpha}_1^*$ ,  $\dot{\alpha}_2^*$ ,  $\dot{w}_c^*$ , получим уравнения движения пластины:

$$\ddot{\alpha}_1 \Sigma_{11}(D) = P(t) \Sigma_{12}(D) - m_1(D), \tag{18}$$

$$\ddot{\alpha}_2 \Sigma_{21}(D) = P(t) \Sigma_{22}(D) - m_2(D) \Sigma_{23}(D), \tag{19}$$

$$\ddot{w}_c \Sigma_{21}(D) = P(t) \Sigma_{32}(D) + m_2(D) \Sigma_{33}(D). \tag{20}$$

$$\Sigma_{11}(D) = \iint_{Z_1} \rho(r - R_1)^2 ds = 2\pi \int_{R_1}^{R_1+D} \rho(r - R_1)^2 r dr ,$$

$$\Sigma_{12}(D) = \iint_{Z_1} (r - R_1) ds = \frac{\pi}{3} D^2 (3R_1 + 2D) ,$$

$$\Sigma_{21}(D) = \iint_{Z_2} \rho(r) ds \iint_{Z_2} \rho(r) r^2 ds - \left[ \iint_{Z_2} \rho(r) r ds \right]^2 ;$$

$$\Sigma_{22}(D) = \iint_{Z_2} r ds \iint_{Z_2} \rho(r) ds - \iint_{Z_2} ds \iint_{Z_2} \rho(r) r ds , \quad \Sigma_{23}(D) = \iint_{Z_2} \rho(r) ds ,$$

$$\Sigma_{32}(D) = \iint_{Z_2} \rho(r) (r - R_1 - D)^2 ds \iint_{Z_2} ds - \iint_{Z_2} (r - R_1 - D) ds \iint_{Z_2} \rho(r) (r - R_1 - D) ds ,$$

$$\Sigma_{33}(D) = \iint_{Z_2} \rho(r)(r - R_1 - D)ds .$$

Из непрерывности скоростей на границе областей  $Z_1$  и  $Z_2$  имеем равенство

$$\dot{\alpha}_1 D = \dot{w}_c . \quad (21)$$

Система уравнений (18)–(21) описывает поведение пластины в случае деформирования по схеме 2. Начальные условия имеют вид (10) и

$$\dot{\alpha}_2(0) = \alpha_2(0) = \dot{w}_c(0) = w_c(0) = 0 . \quad (22)$$

Начальное значение  $D_0 = D(0)$  определяется в зависимости от значения  $P_{\max}$ , как это будет показано ниже.

Из неравенства Коши–Буняковского для вещественного гильбертова пространства интегрируемых функций, определенных на  $Z_2$ , с интегрируемым квадратом и скалярным произведением функций  $f$ ,  $g$ , определенным как  $\iint_{Z_2} (fg)ds$ , следует [27], что если область  $Z_2$  не вырождена, то

$$\left( \iint_{Z_2} fgds \right)^2 \leq \left( \iint_{Z_2} f^2 ds \right) \iint_{Z_2} g^2 ds .$$

Тогда принимая  $f = \sqrt{\rho}r > 0$  и  $g = \sqrt{\rho} > 0$ , получим, что выполняется неравенство  $\Sigma_{21}(D) > 0$ , которое необходимо для последующего анализа системы уравнений движения пластины.

Величину нагрузки  $P_1$ , которая является минимальным значением  $P_{\max}$ , при котором реализуется схема 2, определим из условия  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$ . Значение функции  $D(t)$ , соответствующее нагрузке  $P_1$ , обозначим через  $D_1$ . Из (18), (19) при условии  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$  при  $t \geq 0$  получаем

$$P(t) = (m_1 \Sigma_{21} - m_2 \Sigma_{11} \Sigma_{23}) / (\Sigma_{12} \Sigma_{21} - \Sigma_{22} \Sigma_{11}) . \quad (23)$$

Дифференцируя (21) по времени и с помощью полученного равенства, исключая функции  $\ddot{\alpha}_1$ ,  $\ddot{w}_c$  из (17), (19), имеем

$$-\dot{\alpha}_1(t) \dot{D}(t) \Sigma_{11} \Sigma_{21} = P(t) (D \Sigma_{12} \Sigma_{21} - \Sigma_{32} \Sigma_{11}) - m_1 D \Sigma_{21} - m_2 \Sigma_{11} \Sigma_{33} . \quad (24)$$

При учете начальных условий (10) уравнение (24) принимает вид

$$P_{\max} = \frac{m_1(D_0) D_0 \Sigma_{21}(D_0) + m_2(D_0) \Sigma_{11}(D_0) \Sigma_{33}(D_0)}{D_0 \Sigma_{12}(D_0) \Sigma_{21}(D_0) - \Sigma_{32}(D_0) \Sigma_{11}(D_0)} . \quad (25)$$

Считая в (23), (25)  $P_{\max} = P_1$  и  $D = D_0 = D_1$ , получаем, что  $P_1$  определяется из равенства

$$P_1 = \frac{m_1(D_1) D_1 \Sigma_{21}(D_1) + m_2(D_1) \Sigma_{11}(D_1) \Sigma_{33}(D_1)}{D_1 \Sigma_{12}(D_1) \Sigma_{21}(D_1) - \Sigma_{32}(D_1) \Sigma_{11}(D_1)} , \quad (26)$$

а  $D_1$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & m_1(D_1)\Sigma_{21}(D_1)[D_1\Sigma_{22}(D_1) - \Sigma_{32}(D_1)] = \\ & = m_2(D_1)\{\Sigma_{23}(D_1)[D_1\Sigma_{12}(D_1)\Sigma_{21}(D_1) - \Sigma_{11}(D_1)\Sigma_{32}(D_1)] + \\ & + \Sigma_{33}(D_1)[\Sigma_{12}(D_1)\Sigma_{21}(D_1) - \Sigma_{11}(D_1)\Sigma_{22}(D_1)]\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим динамическое поведение пластины при «высоких» нагрузках,  $P_{\max} > P_1$ . Движение пластины начнется по схеме 2 при наличии шарнирной линии  $l$ , начальное положение которой определяется значением  $D_0$  из уравнения (25). Чтобы определить по схеме 2а или 2б, как будет деформироваться пластина, надо выбрать минимальную нагрузку  $P_1$  из (26) при верхнем и нижнем знаке в выражениях для  $m_1$ ,  $m_2$  в формуле (17). Если армирование таково, что функция  $\rho(r)$  постоянна или изменяется только вблизи опорного контура  $L_1$  и постоянна в остальной части пластины, то  $\rho(r)$  постоянна в области  $Z_2$ , поэтому  $\Sigma_{22} = 0$ ,  $\Sigma_{32} = \Sigma_{21} > 0$ . Тогда из (19) следует, что поскольку  $\Sigma_{23} > 0$  и  $\ddot{\alpha}_2(0)$  не может быть отрицательным, то  $m_2 < 0$ . В этом случае из выражения для  $m_2$  следует, что  $\dot{\alpha}_1 > \dot{\alpha}_2$ , и реализуется схема 2а.

В первой фазе ( $0 \leq t \leq t_1$ ) движение пластины описывается уравнениями (18)–(21) при начальных условиях (10), (22),  $D_0 = D(0)$ . Движение шарнирной линии  $l$  определяется уравнением (24). При обеих схемах 2а и 2б либо существует момент времени  $t_1$ , при котором выполняется равенство  $\dot{\alpha}_1(t_1) = \dot{\alpha}_2(t_1)$  и дальнейшее движение осуществляется по схеме 1 во второй фазе, либо происходит остановка в момент  $t = t_f$ , который определяется из равенства, полученного из (24) при условии (13):

$$\begin{aligned} & P(t_f)\left\{\left[R_1 + D(t_f)\right]\Sigma_{12}\left(D(t_f)\right)\Sigma_{21}\left(D(t_f)\right) - \Sigma_{32}\left(D(t_f)\right)\Sigma_{11}\left(D(t_f)\right)\right\} = \\ & = m_1\left(D(t_f)\right)\left(R_1 + D(t_f)\right)\Sigma_{21}\left(D(t_f)\right) + m_2\left(D(t_f)\right)\Sigma_{11}\left(D(t_f)\right)\Sigma_{33}\left(D(t_f)\right). \end{aligned}$$

В случае если движение пластины продолжается во второй фазе ( $t_1 < t \leq t_f$ ), поведение пластины описывается уравнением (12) с начальными условиями  $\dot{\alpha}_1(t_1)$ ,  $\alpha_1(t_1)$ , определенными в конце первой фазы движения. Пластина останавливается в момент времени  $t_f$ , определяемый из условия (13). Все прогибы вычисляются из (14), (4) с учетом обеих фаз движения.

#### 4. Защемление внутреннего контура

В случае защемления внутреннего контура уравнения движения пластины получают аналогично случаю шарнирного опирания контура, но при этом следует учитывать, что на закрепленном контуре или на контуре  $r = R_1 + d$  ( $d \geq 0$ ) образуется пластический шарнир. Скорости прогибов пластины для схемы 1 будут представлены в виде

$$(r, \varphi) \in S: \dot{u}(r, \varphi, t) = \dot{\alpha}_1(t)(r - R_1 - d). \quad (28)$$

Тогда мощности инерционных, внешних и внутренних сил при схеме 1 рассчитываются так:

$$K = 2\ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi} \int_{R_1+d}^{R_2(\varphi)} \rho(r)(R_1+d-r)^2 r dr d\varphi, \quad (29)$$

$$A = \frac{1}{3} P(t) \dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi} (R_2 - R_1 - d)^2 (R_1 + d + 2R_2) d\varphi. \quad (30)$$

$$N = 2\dot{\alpha}_1^* \left[ \pi(R_1 + d)M_{01}(R_1 + d) + \int_0^{\pi} \int_{R_1+d}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi \right]. \quad (31)$$

Из равенства мощностей внешних и внутренних сил рассчитывается предельная нагрузка:

$$P_0 = 6 \min_{0 \leq d < \min_{\varphi} [R_2(\varphi) - R_1]} \frac{\pi(R_1 + d)M_{01}(R_1 + d) + \int_0^{\pi} \int_{R_1+d}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi}{\int_0^{\pi} (R_2 - R_1 - d)^2 (R_1 + d + 2R_2) d\varphi} =$$

$$= 6 \frac{\pi(R_1 + d)M_{01}(R_1 + d) + \int_0^{\pi} \int_{R_1+d}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi}{\int_0^{\pi} (R_2 - R_1 - d)^2 (R_1 + d + 2R_2) d\varphi} \Bigg|_{d=d_0}. \quad (32)$$

Подставляя (29)–(31) при  $d = d_0$ , получим уравнение движения

$$6\ddot{\alpha}_1 \int_0^{\pi} \int_{R_1+d_0}^{R_2(\varphi)} \rho(r)(R_1+d_0-r)^2 r dr d\varphi = P(t) \int_0^{\pi} (R_2 - R_1 - d_0)^2 (R_1 + d_0 + 2R_2) d\varphi -$$

$$- 6 \left[ \pi(R_1 + d_0)M_{01}(R_1 + d_0) + \int_0^{\pi} \int_{R_1+d_0}^{R_2(\varphi)} M_{02}(r) dr d\varphi \right]$$

с начальными условиями (10). Таким образом, анализ деформирования пластины по схеме 1 совпадает с анализом уравнения (12), в котором  $G$  заменено на  $\bar{G}$ :

$$\bar{G} = \frac{\int_0^{\pi} (R_2 - R_1 - d_0)^2 (R_1 + d_0 + 2R_2) d\varphi}{6 \int_0^{\pi} \int_{R_1+d_0}^{R_2(\varphi)} \rho(r)(R_1 + d_0 - r)^2 r dr d\varphi},$$

а прогибы в пластине определяются соотношениями (28).

Деформирование пластины по схеме 2 в случае защемления опорного контура описывается системой уравнений (17)–(20), в которых  $m_1$  заменено на  $\bar{m}_1$ :

$$\bar{m}_1(D) = 2\pi \left[ R_1 M_{01}(R_1) \pm (R_1 + D) M_{01}(R_1 + D) + \int_{R_1}^{R_1+D} M_{02}(r) dr \right].$$

Таким образом, анализ поведения деформирования по схеме 2 совпадает с анализом, выполненным для шарнирно опертого опорного контура при замене  $m_1$  на  $\bar{m}_1$ . Все прогибы вычисляются из (28) и (14) при этой же замене с учетом всех фаз движения.

### 5. Армированная квадратная пластина с круглым закрепленным отверстием

В качестве примера рассмотрим армированную квадратную пластину со стороной  $2\gamma R_1$  ( $\gamma > 1$ ) с закрепленным круглым отверстием (рис. 5). В этом случае для четверти пластины в силу симметрии уравнение внешнего контура имеет вид

$$0 \leq \varphi \leq \pi/4: R_2(\varphi) = \gamma R_1 / \cos \varphi; \quad \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2: R_2(\varphi) = \gamma R_1 / \sin \varphi.$$

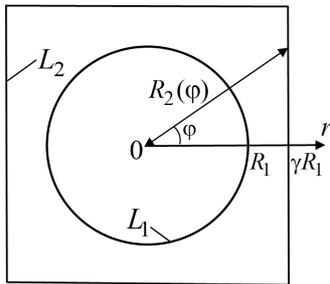


Рис. 5. Квадратная пластина с круглым отверстием  
Fig. 5. A square plate with a circular hole

Считаем, что пластина является четырехслойной и армированы только внешние слои:  $n = 2$ ,  $h_1 = 0,85H$ ,  $h_2 = H$ ,  $\omega_{i2} = \omega_i$ ,  $\omega_{i1} = 0$ ,  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{12} = \rho_0$ ,  $\rho_{i2} / \rho_0 = 3$ ,  $\sigma_{02} = \sigma_{i1} = \sigma_0$ ,  $\sigma_{i2} = \sigma_i = 10\sigma_0$  ( $i = 1-3$ ). Такое соотношение армирующих параметров возможно, например, если связующий материал является алюминием, а материал арматуры – сталью.

Будем рассматривать следующие типы армирования волокнами постоянного сечения и соответствующие им плотности армирования [28]:

а) армирование в форме логарифмических спиралей:

$$\omega_3(r) = \omega_{30} R_1 / r, \quad \mu(r) = \mu_0 = \text{const}; \quad (33)$$

б) армирование в форме «спиц велосипеда»:

$$\omega_3(r) = \frac{\omega_{30} R_1 \cos \mu_0}{\sqrt{r^2 - (R_1 \sin \mu_0)^2}}, \quad \sin \mu(r) = \frac{R_1}{r} \sin \mu_0; \quad (34)$$

в) армирование по радиусам окружности:

$$\omega_1(r) = \omega_{10} R_1 / r, \quad (35)$$

г) армирование по окружности:

$$\omega_2(r) = \omega_{20}, \quad (36)$$

где  $\omega_{i0} = \omega_i(R_1)$  ( $i = 1-3$ ),  $\mu_0 = \mu(R_1)$  – заданные на опорной окружности плотности армирования и угол армирования.

Для рассматриваемой пластины на рис. 6 кривые 1–5 изображают зависимости безразмерной предельной нагрузки  $p_0 = P_0 b$  ( $b = R_1^2 / (\sigma_0 H^2)$ ) от параметра  $\gamma$ , вычисленные по (11), (32), при разных значениях условий закрепления на контуре пластины и разном армировании. Кривая 1 – шарнирное опирание, армирование отсутствует. Кривая 2 – шарнирное опирание, армирование (36),  $\omega_{20} = 0,2$ . Кривая 3 – защемление, армирование отсутствует. Кривая 4 – защемление, армирование (35),  $\omega_{10} = 0,2$ . Кривая 5 – защемление, армирование (35), (36),  $\omega_{10} = 0,1$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ .

В случае углового армирования для рассматриваемой шарнирно опертой пластины на рис. 7 нижние кривые 1–6 изображают зависимости безразмерной предельной нагрузки  $p_0$  от начального угла армирования  $\mu_0$  при условии одинакового расхода арматуры:

$$(H - h_1) \int_0^{\pi/2} \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} [\omega_1(r) + \omega_2(r) + 2\omega_3(r)] r dr d\varphi = \text{const},$$

которое в случае только углового армирования принималось в виде

$$2 \int_0^{\pi/2} \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} \omega_3(r) r dr d\varphi = C\Sigma, \quad \Sigma = \int_0^{\pi/2} \int_{R_1}^{R_2(\varphi)} r dr d\varphi, \quad (37)$$

$4\Sigma$  – площадь пластины. Кривая 1 – армирование (33),  $C = 0,3$ . Кривая 2 – армирование (33),  $C = 0,2$ . Кривая 3 – армирование (33),  $C = 0,15$ . Кривая 4 – армирование (34),  $C = 0,3$ . Кривая 5 – армирование (34),  $C = 0,2$ . Кривая 6 – армирование (34),  $C = 0,15$ . Получено, что в случае армирования по логарифмическим спиральям (33) (кривые 1–3) при  $\mu_0 \rightarrow \pi/2$  предельная нагрузка стремится к значению предельной нагрузки при окружном армировании (36) с  $\omega_{20} = C$ .

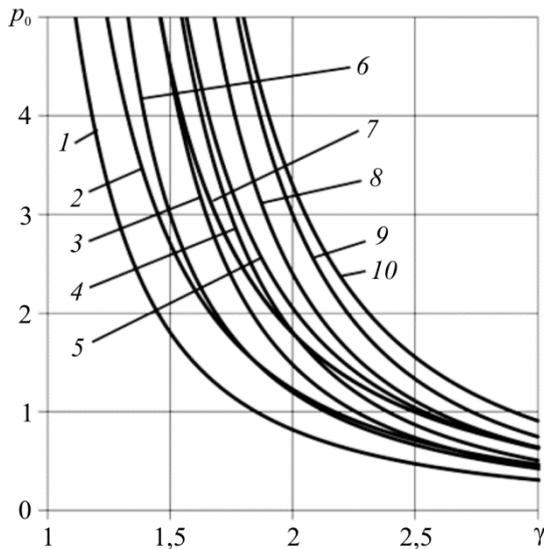


Рис. 6. Безразмерная предельная нагрузка в зависимости от размера пластины  $\gamma$   
 Fig. 6. A dimensionless limit load depending on  $\gamma$  plate size

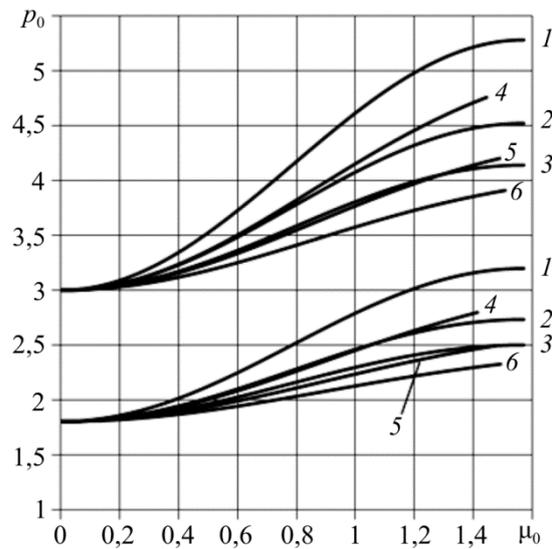


Рис. 7. Безразмерная предельная нагрузка при угловом армировании в зависимости от начального угла армирования  $\mu_0$   
 Fig. 7. A dimensionless limit load depending on the initial angle of reinforcement  $\mu_0$

На рис. 8 приведены безразмерные прогибы  $w = uR_1^2 \rho_0 / (\sigma_0 H^2 T^2)$ , полученные по предлагаемой методике для квадратной пластины со стороной  $6R_1$  ( $R_2(0) = 3R_1$ ), защемленной по внутреннему круглому контуру, в сечении  $\varphi = 0$  при воздействии «высокой» нагрузки прямоугольного вида с  $P_{\max} = 12,05/b$ . Кривые 1–3 соответствуют армированию (36) при  $\omega_{20} = 0,2$ . В этом случае  $P_0 = 0,6/b$ ,  $P_1 = 5,48/b$ ,  $D_1 = 1,46R_1$ . Прогибы приведены при снятии нагрузки  $t = T$  (кривая 1), в момент исчезновения шарнира 1 при

$t = t_1 = 2,58T$  (кривая 2) и в момент остановки при  $t = t_k = 19,15T$  (кривая 3). Линия 4 изображает остаточные прогибы этой же пластины в случае, если расчеты вести только по схеме 1, без учета образования шарнира  $l$ , при этом  $t_k = 20,17T$ . Максимальный остаточный прогиб, учитывая образование пластического шарнира  $l$ , меньше на 10 %, чем этот прогиб без учета возникновения шарнира  $l$ .

Кривая 5 на рис. 8 изображает остаточные прогибы в случае армирования (35), (36) при  $\omega_{10} = 0,1$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ . В этом случае  $P_0 = 0,63/b$ ,  $P_1 = 6,1/b$ ,  $D_1 = 1,44R_1$ ,  $t_1 = 2,25T$ ,  $t_k = 17,99T$ . Линия 6 изображает остаточные прогибы в случае отсутствия армирования:  $P_0 = 0,44/b$ ,  $P_1 = 5,24/b$ ,  $D_1 = 1,35R_1$ ,  $t_1 = 2,61T$ ,  $t_k = 25,44T$ .

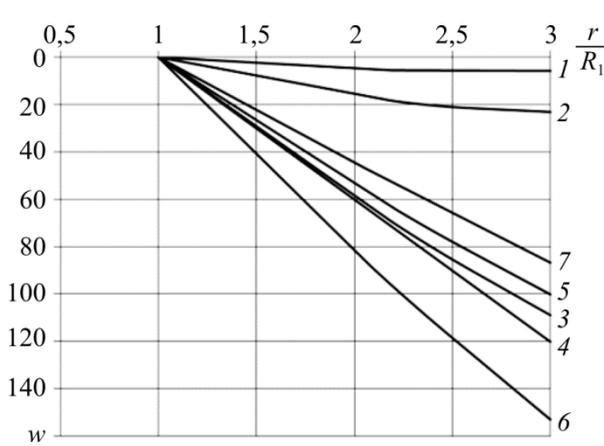


Рис. 8. Безразмерные прогибы пластин  
Fig. 8. Dimensionless deflections of plates

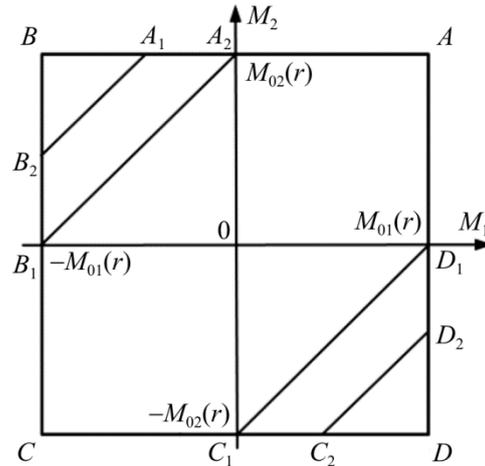


Рис. 9. Условия пластичности  
Fig. 9. Conditions of plasticity

## 6. Армированная кольцевая пластина, закрепленная по внутреннему контуру

В качестве другого примера рассмотрим армированную кольцевую пластину с внешним радиусом  $R_2 = \gamma R_1$  ( $\gamma > 1$ ), закрепленную по внутреннему контуру. В случае шарнирного закрепления контура предельная нагрузка (11) определяется так:

$$P_0 = 6 \int_{R_1}^{\gamma R_1} M_{02}(r) dr / \left[ R_1^3 (\gamma - 1)^2 (1 + 2\gamma) \right]. \quad (38)$$

Это значение полностью совпадает с точным значением предельной нагрузки армированной кольцевой пластины, шарнирно опертой по внутреннему контуру, вычисленной при условии пластичности типа Йогансена (Johansen) [29] в форме прямоугольника, записанного для радиального и окружного изгибающих моментов  $M_1$ ,  $M_2$  (типа прямоугольника  $ABCD$  на рис. 9) [30]. Очевидно, что в случае условия пластичности типа Треска в форме шестиугольника ( $AA_1B_1CC_1D_1A$  или  $AA_2B_2CC_2D_2A$ , как в [31], на рис. 8) предельная нагрузка будет иметь также вид (38).

Для кольцевой пластины на рис. 6 кривые 6–10 изображают зависимости безразмерной предельной нагрузки  $p_0$  от параметра  $\gamma$ , вычисленные по (38), (32). Кривая 6 – шарнирное опирание, армирование отсутствует. Кривая 7 – шарнирное опирание, армирова-

ние (36),  $\omega_{20} = 0,2$ . Кривая 8 – защемление, армирование отсутствует. Кривая 9 – защемление, армирование (35),  $\omega_{10} = 0,2$ . Кривая 10 – защемление, армирование (35), (36),  $\omega_{10} = 0,1$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ .

В случае углового армирования для шарнирно опертой кольцевой пластины на рис. 7 верхние кривые 1–6 изображают зависимости безразмерной предельной нагрузки  $p_0$  от начального угла армирования  $\mu_0$  при условии одинакового расхода арматуры (37). Кривые 1–6 соответствуют тем же значениям параметра  $C$ , что и в п. 6 для квадратной пластины. Также для кольцевой пластины численно получено, что в случае армирования по логарифмическим спиралям (33) (кривые 1–3) при  $\mu_0 \rightarrow \pi/2$  предельная нагрузка стремится к значению предельной нагрузки при окружном армировании (36) с  $\omega_{20} = C$ .

На рис. 8 кривая 7 изображает безразмерные остаточные прогибы для защемленной кольцевой армированной пластины, вычисленные по предлагаемой методике. Считалось, что при  $\gamma = 3$  действует «высокая» нагрузка прямоугольного вида с  $P_{\max} = 12,05/b$  (та же нагрузка, что и в примере для квадратной пластины), армирование (35), (36) при  $\omega_{10} = 0,1$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ . В этом случае  $P_0 = 0,91/b$ ,  $P_1 = 9,94/b$ ,  $D_1 = 1,09R_1$ ,  $t_1 = 1,28T$ ,  $t_k = 12,62T$ .

Во всех приведенных примерах системы дифференциальных уравнений, описывающих динамическое поведение, решались численно методом Рунге-Кутты, и при деформировании по схеме 2 реализовывалась схема 2а.

Из приведенных расчетов видно, что армирование существенно влияет на предельную нагрузку, время деформирования и остаточные прогибы пластин. При одних и тех же параметрах армирования и значениях  $\gamma$  кольцевая пластина является более прочной, чем квадратная пластина, с точки зрения максимума предельной нагрузки и минимума остаточных прогибов.

## Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала с использованием структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах построено общее решение задачи о динамическом изгибе гибридных слоистых композитных пластин с произвольным кусочно-гладким свободным внешним контуром и с круглым внутренним отверстием, шарнирно опертым или защемленным. На пластины действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Пластины являются гибридными слоисто-волоконистыми с распределением слоев симметрично относительно срединной поверхности. В каждом слое находятся семейства армирующих волокон, расположенных по радиальным, окружным и угловым направлениям. В зависимости от амплитуды приложенной нагрузки возможны несколько схем деформирования пластин в форме линейчатых поверхностей. На основе принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера для каждой из схем получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации. Представлены аналитические зависимости для описания механизмов развития пластических шарниров, времени остановки и остаточных прогибов, позволяющие построить простую программную процедуру для решения рассматриваемой сложной проблемы. Получены простые аналитические выражения

для оценки предельных нагрузок. Найденная предельная нагрузка соответствует определению несущей способности рассматриваемых пластин по второму предельному состоянию. Приведены примеры численных решений для четырехслойной квадратной пластины с круглым закрепленным отверстием и кольцевой пластины в случае радиального, окружного армирования, углового армирования в форме логарифмических спиралей и “спиц велосипеда”. На основе анализа и численных расчетов показано, что изменения параметров армирования существенно влияют на несущую способность рассматриваемых пластин и на остаточные прогибы. Получено, что в случае кольцевой пластины с шарнирно опертым внутренним отверстием предельная нагрузка совпадает с предельной нагрузкой, вычисленной на основе точного решения с использованием условия пластичности типа Йогансена (Johansen), в форме прямоугольника. Показано, что при одинаковом армировании и равенстве внешнего диаметра кольцевой пластины стороне квадратной пластины кольцевая пластина является более прочной, чем квадратная пластина, с точки зрения максимума предельной нагрузки и минимума остаточных прогибов. Предложенные решения могут быть использованы при проектировании армированных металлокомпозитных криволинейных плоских элементов конструкций с закрепленным круглым отверстием. Количество параметров разработанной математической модели позволяет в широком диапазоне изменять структуру армирования пластин, объемное содержание армирующих волокон, толщину слоев и физические характеристики композита, а также форму внешнего контура и способ крепления внутреннего контура пластины.

### Библиографический список

1. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / A.P. Mouritz, E. Gellert, P. Burchill, K. Challis // *Composite Structures*. – 2001. – Vol. 53. – No. 1. – P. 21–42. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00175-6
2. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites, Part A*. – 2001. – Vol. 32. – No. 7. – P. 901–910. DOI: 10.1016/S1359-835X(01)00008-2
3. Панин В.Ф., Гладков Ю.А. Конструкции с наполнителем. – М.: Машиностроение, 1991. – 272 с.
4. A new nonlinear model for studying a sandwich panel with thin composite faces and elastic-plastic core / M. Rezaeifard, S.J. Salami, M.B. Dehkordi, M. Sadighi // *Thin-Walled Structures*. – 2016. – Vol. 107. – P. 119–137. DOI: 10.1016/j.tws.2016.06.012
5. Kazancı Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. of Non-Linear Mechanics*. – 2011. – Vol. 46. – P. 807–817. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011
6. Finite element analysis of indentation of aluminium foam and sandwich panels with aluminium foam core / A. Xu, T. Vodenitcharova, K. Kabir, E.A. Flores-Johnson, M. Hoffman // *Materials Science and Engineering: A*. – 2014. – Vol. 599. – No. 2. – P. 125–133. DOI: 10.1016/j.msea.2014.01.080
7. Янковский А. П. Вязкопластическая динамика металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнутой структуры при действии нагрузок взрывного типа I. Постановка задачи и метод решения // *Математичні методи та фізико-механічні поля*. – 2012. – Т. 55, № 2. – С. 119–130. DOI: 10.1007/s10958-013-1421-7
8. Янковский А. П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 279–297. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.24
9. Янковский А.П. Вязкопластическое деформирование цилиндрических армированных оболочек переменной толщины при динамическом осесимметричном нагружении взрывного типа.

Ч. 1. Постановка задачи и метод решения // Конструкции из композиционных материалов. – 2013. – № 1 (129). – С. 12–21.

10. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости / О.Н. Попов, А.П. Малиновский, М.О. Моисеенко, Т.А. Трепутнева // Вестник ТГАСУ. – 2013. – № 4. – С. 127–142.

11. Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А. Численный анализ влияния структуры армирования на динамическое поведение и предельную деформируемость композитных оболочек вращения // Механика композитных материалов. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 313–326. DOI: 10.1007/s11029-014-9409-z

12. Qatu M. S, Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Composite Structures. – 2010 – Vol. 93. – P. 14–31. DOI: 10.1016/j.compstruct.2010.05.014

13. A review of optimization techniques used in the design of fibre composite structures for civil engineering applications / Z.K. Awad, T. Aravinthan, Y. Zhuge, F. Gonzalez // Materials and Design. – 2012. – Vol. 33. – P. 534–544. DOI: 10.1016/j.matdes.2011.04.061

14. Caliri M. F. Jr., Ferreira A. J. M., Tita. V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the finite element method // Composite Structures. – 2016. – Vol. 156. – P. 63–77. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.02.036

15. Balkan D., Mecitoglu Z. Nonlinear dynamic behavior of viscoelastic sandwich composite plates under non-uniform blast load: theory and experiment // International journal of impact engineering. – 2014. – Vol. 72. – P. 85–104. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2014.05.003

16. Zhang Y.X., Yang C.H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates // Composite Structures. – 2009. – Vol. 88. – P. 147–157. DOI: 10.1016/j.compstruct.2008.02.014

17. Arora H., P. Del Linz, Dear J.P. Damage and deformation in composite sandwich panels exposed to multiple and single explosive blasts // International Journal of Impact Engineering. – 2017. – Vol. 104. – P. 95–106. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.01.017

18. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. – Новосибирск: ГЕО, 2009. – 311 с.

19. Немировский Ю. В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя // Прикл. механика и техн. физика. – 1969. – № 5. – С. 81–88. DOI: 10.1007/BF00907434.

20. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement // Archiwum Inzynierii Ladowej. – 1975. – Vol. XXI. – No. 1. – P. 57–67.

21. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 391 с.

22. Кострик В. К., Лизгунов О. Л. Мазалов В. Н. Динамическое поведение защемленной по внутреннему контуру жесткопластической пластинки // Динамика сплошной среды. Уругопластические модели и задачи: сб. ст. / Ин-т гидродинамики. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1982. – Вып. 55. – С. 133–142.

23. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Моделирование динамического поведения двусвязной жесткопластической криволинейной пластины, закрепленной по внутреннему контуру // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. Пятой Всерос. конф. с междунар. участием. Ч. 1. Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций (г. Самара, 29-30 мая 2008 г.). – Самара: Изд-во СамГТУ, 2008. – С. 197–207.

24. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической произвольной пластины с круглым внутренним закрепленным отверстием // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: тр. 6-й Всерос. науч. конф. (Томск, 30 сент. – 2 окт. 2008 г.) / НИИ ПММ ТГУ. – Томск, 2008. – С. 263–265.

25. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 20–40.

26. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
27. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ – М.: Наука, 1984. – 752 с.
28. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. тр. 8-й Всерос. науч. конф. (Новокузнецк 1–3 декабря 2006 г.). Т. 1 / НФИ КемГУ; под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2006. – С. 25–31.
29. Hopkins H. G. Some remarks concerning of the solution of plastic plate problems upon the yield criterion // Proc. 9<sup>th</sup> Inter. Cong. Appl. Mech. – 1957. – Vol. 6. – P. 448–457.
30. Романова Т.П. Несущая способность и оптимизация трехслойных железобетонных кольцевых пластин, опертых по внутреннему контуру // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 3. – С. 114–132. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.09
31. Шамиев Ф.Г. Об одной задаче оптимизации пластинок из композитного материала // Механика композитных материалов. – 1981. – № 2. – С. 244–248.

## References

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Composite Structures*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21-42. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00175-6.
2. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Composites: Part A*, 2001, vol. 32, no. 7, pp. 901-910. DOI: 10.1016/S1359-835X(01)00008-2.
3. Panin V.F., Gladkov Iu.A. Konstruktsii s zapolnitelem [Constructions with filler]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1991, 272 p.
4. Rezaeifard M., Salami S.J., Dehkordi M.B., Sadighi M. A new nonlinear model for studying a sandwich panel with thin composite faces and elastic-plastic core. *Thin-Walled Structures*, 2016, vol. 107, pp. 119-137. DOI: 10.1016/j.tws.2016.06.012.
5. Kazancı Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 807-817. DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011.
6. Xu A., Vodenitcharova T., Kabir K., Flores-Johnson E.A., Hoffman M. Finite element analysis of indentation of aluminium foam and sandwich panels with aluminium foam cor. *Materials Science and Engineering: A*, 2014, vol. 599, no. 2, pp. 125-133. DOI: 10.1016/j.msea.2014.01.080.
7. Yankovskii A.P. Viscoplastic dynamics of metallic composite shells of layered-fibrous structure under the action of loads of explosive type. I. Statement of the problem and method for solution. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 192, no. 6, pp. 623- 633. DOI: 10.1007/s10958-013-1421-7.
8. Yankovskii A.P. Primenenie iavnogo po vremeni metoda tsentral'nykh raznostei dlia chislenного моделиrovaniia dinamicheskogo povedeniia uprugoplasticheskikh gibkikh armirovannykh plastin [Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates]. *Computational continuum mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 279-297. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.24.
9. Yankovskii A.P. Viazkoplasticheskoe deformirovanie tsilindricheskikh armirovannykh obolochek peremennoi tolshchiny pri dinamicheskom osesimmetrichnom nagruzhении vzyryvnogo tipa. Chast' 1. Postanovka zadachi i metod resheniia [Viscoplastic deformation of the cylindrical reinforced shells of variable thickness at dynamic axisymmetric loads of explosive type. Part 1. Formulation of the problem and the method of the solution]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov*, 2013, no. 1 (129), pp. 12-21.
10. Popov O. N., Malinovskii A. P., Moiseenko M. O., Treputneva T. A. Sostoianie voprosa po raschetu neodnorodnykh elementov konstruktsii za predelom uprugosti [The state of the question on the calculation of the heterogeneous elements of structures beyond the elastic limit]. *Vestnik TGASU*, 2013, no. 4, pp. 127-142.
11. Abrosimov N. A., Elesin A. V., Novoseltseva N. A. Numerical analysis of the effect of reinforcement structure on the dynamic behavior and ultimate deformability of composite shells of revolution. *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 223- 232. DOI: 10.1007/s11029-014-9409-z.
12. Qatu M. S, Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite Structures*, 2010, vol. 93, pp. 14-31. DOI:10.1016/j.compstruct.2010.05.014.
13. Awad Z.K., Aravinthan T., Zhuge Y., Gonzalez F. A review of optimization techniques used in the design of fibre composite structures for civil engineering applications. *Materials and Design*, 2012, vol. 33, pp. 534-544. DOI:10.1016/j.matdes.2011.04.061.

14. Caliri M. F. Jr., Ferreira A. J. M., Tita. V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the finite element method. *Composite Structures*, 2016, vol. 156, pp. 63-77. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.02.036.
15. Balkan D., Mecitoglu Z. Nonlinear dynamic behavior of viscoelastic sandwich composite plates under non-uniform blast load: theory and experiment. *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 72, pp. 85-104. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2014.05.003.
16. Zhang Y.X., Yang C.H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite Structures*, 2009, vol. 88, pp. 147-157. DOI: 10.1016/j.compstruct.2008.02.014.
17. Arora H., P. Del Linz, Dear J.P. Damage and deformation in composite sandwich panels exposed to multiple and single explosive blasts. *Int. J. Impact Eng.*, 2017, vol. 104, pp. 95-106. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.01.017
18. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dinamicheskoe soprotivlenie ploskikh plasticheskikh pregrad [Dynamic behavior of flat plastic barriers]. *Novosibirsk, GEO*, 2009, 311 p.
19. Nemirovsky Ju.V. Plasticity (strength) condition for a reinforced layer. *J. Appl. Mech. Tech. Phys*, 1969, vol. 10, no. 5, pp. 759-765. DOI: 10.1007/BF00907434.
20. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement. *Archivum Inzynierii Ladowej*, 1975, vol. XXI, no. 1, pp. 57-67.
21. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii [Nonlinear problems of dynamics of composite structures]. *Nizhnii Novgorod: NNGU*, 2002, 391 p.
22. Kostrik V.K., Lizgunov O.L. Mazalov V.N. Dinamicheskoe povedenie zashchemlennoi po vnutrennemu konturu zhestkoplachesticheskoi plastinki [The dynamic behavior of rigid-plastic plates clamped on the inner side]. *Novosibirsk, Izd-vo SORAN, in-t Gidrodinamiki Dinamika sploshnoi sredy*. 1982 (55), pp. 133-142.
23. Nemirovsky Ju.V., Romanova T.P. Modelirovanie dinamicheskogo povedeniia dvusviaznoi zhestkoplachesticheskoi krivolineinoi plastiny, zakreplenoj po vnutrennemu konturu [Modeling the dynamic behavior of double-connected rigid-plastic curvilinear plate supported in the internal contour]. *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Tr. piatoi Vseros. konf. s mezhdunarodnym uchastiem. Chast' 1: Matematicheskie modeli mekhaniki, prochnosti i nadezhnosti elementov konstruksii* [Mathematical modeling and boundary problems: Proceedings of 5th All-Russian sci. conf. with international participation. Part 1: Mathematical models in mechanics, strength and reliability of structural elements]. (29-30 maia 2008, Samara). Samara, SamGTU, 2008, pp. 197-207.
24. Nemirovsky Ju.V., Romanova T.P. Dinamika zhestkoplachesticheskoi proizvol'noi plastiny s kruglym vnutrennim zakreplennym otverstiem [Dynamics of an arbitrary rigid-plastic plate with circular inner supported hole]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoi mekhaniki. Trudy 6-i Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii* [Fundamental and applied problems of modern mechanics. Proceedings of the 6th all-Russian sci. conf.] (30 sent. – 2 okt. 2008, Tomsk). *Tomsk, NII PMM TGU*, 2008, pp. 263-265.
25. Nemirovsky Ju.V., Yankovskii A.P. O nekotorykh osobennostiakh uravnenii obolochek, armirovannykh voloknami postoiannogo poperechnogo secheniia [Some features of equations of shells reinforced with fibers of constant cross section]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 1997, vol. 3, no 2, pp. 20-40.
26. Erkhov M. I. Teoriia ideal'no plasticheskikh tel i konstruksii [Theory of perfectly plastic bodies and structures]. *Moscow, Nauka*, 1978, 352 p.
27. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Funktsional'nyi analiz [Functional analysis]. *Moscow, Nauka*, 1984, 752 p.
28. Vokhmianin I.T., Nemirovsky Yu.V. Osobennosti prodol'no-poperechnogo izgiba trekhslonnykh kol'tsevykh plastinok s nesimmetrichnymi strukturami armirovaniia. [Features of longitudinal-transverse bending of three-layered annular plates with asymmetrical reinforcement structures] *Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie: sb. st. 8-i Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii*. (1-3 dekabria 2006, Novokuznetsk) [Boundary problems and mathematical modeling: Proceedings of 8th All-Russian sci. conf. (1-3 dekabria 2006, Novokuznetsk)]. *Novokuznetsk, NFI GOU VPO «KemGU»* 2006, vol. 1. pp. 25-31.
29. Hopkins H. G. Some remarks concerning of the solution of plastic plate problems upon the yield criterion. *Proc. 9<sup>th</sup> Inter. Cong. Appl. Mech.*, 1957, 6, pp. 448-457.
30. Romanova T.P. Nesushchaia sposobnost' i optimizatsiia trekhslonnykh zhelezobetonnykh kol'tsevykh plastin, opertykh po vnutrennemu konturu [Carrying capacity and optimization of three-layer reinforced concrete annular plate, supported on the internal contour]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 3, pp. 114-132. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.09
31. Shamiev F.G. Ob odnoi zadache optimizatsii plastinok iz kompozitnogo materiala [On one problem of optimization of plates from composite material]. *Mechanics of Composite Materials*, 1981, no. 2, pp. 244-248.