

Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах когезионного разрушения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03

Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modelling the generation of new material surfaces in a composite with an adhesion layer under cohesive destruction. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no.2, pp. 45-59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.2.03

УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ НОВЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЦЕССАХ КОГЕЗИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТА С АДГЕЗИОННЫМ СЛОЕМ

В.В. Глаголев, А.А. Маркин, А.А. Фурсаев

Тульский государственный университет, Тула, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 16 ноября 2016 г.
Принята: 05 июня 2017 г.
Опубликована: 30 июня 2017 г.

Ключевые слова:

композит, подход Нейбера – Новожилова, характерный размер, процесс разрушения, простой процесс, упругопластическое деформирование, вариационное уравнение, метод конечных элементов.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается докритическое упругопластическое деформирование трехслойного композита и процесс разделения слоев, сопровождающийся разрушением адгезионного слоя. Путем осреднения компонент напряжений в адгезионном слое по его толщине задача сводится к системе двух вариационных условий равновесности относительно полей скоростей склеиваемых слоев. При решении упругопластической задачи докритического деформирования выделяется δ -область, в которой достигнут критерий разрушения. С помощью повторного решения задачи докритического деформирования с известным законом движения границы δ -области находится распределение нагрузки (узловых сил), действующей со стороны δ -области на тело. На следующем шаге рассматривается изменение напряженно-деформированного состояния (НДС) тела в процессе разрушения δ -области. Решается упругопластическая задача при простой разгрузке δ -поверхности тела и сохранении внешней нагрузки, соответствующей началу процесса разрушения. В процессе δ -разгрузки возможно образование новых пластических областей, частичная разгрузка и достижение критерия разрушения. В результате НДС тела в момент начала локальной разгрузки отличается от его состояния при окончании δ -разгрузки. Это является принципиальным отличием от известной процедуры «убийства элементов», когда жесткость элемента после достижения критерия разрушения полагается близкой к нулевой. При этом состояние тела вне удаленного элемента считается неизменным, и возможность появления зон разгрузок и догрузок после исключения элемента не учитывается. В случае линейной упругости решение задачи с удаленной областью при фиксированной внешней нагрузке совпадает с решением, получаемым в результате δ -разгрузки в силу единственности решения и принципа суперпозиции. Однако решение упругопластической задачи при простом нагружении тела с удаленной областью не будет совпадать с решением методом δ -разгрузки. В статье приведены решения задач расслоения композита, иллюстрирующие метод простой δ -разгрузки как в линейно-упругой, так и в упругопластической постановках.

© ПНИПУ

© **Глаголев Вадим Вадимович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: vadim@tsu.tula.ru
Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: markin-nikram@yandex.ru
Фурсаев Артем Александрович – аспирант, e-mail: artemkajs@mail.ru

Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vadim@tsu.tula.ru
Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: markin-nikram@yandex.ru
Artem A. Fursaev – PhD Student, e-mail: artemkajs@mail.ru



MODELLING THE GENERATION OF NEW MATERIAL SURFACES IN A COMPOSITE WITH AN ADHESION LAYER UNDER COHESIVE DESTRUCTION

V.V. Glagolev, A.A. Markin, A.A. Fursaev

Tula State University, Tula, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 16 November 2016
Accepted: 05 June 2017
Published: 30 June 2017

Keywords:

composite, Neuber – Novozhilov approach, characteristic size, fracture, simple process, elastoplastic deformation, variational equation, finite element method.

ABSTRACT

The paper is concerned with the subcritical elastoplastic deformation of the trilaminar composite and the delamination accompanied by the fracture of the adhesive layer. The problem is reduced to the system of two variational equilibrium conditions with respect to the velocity fields of the bonded layers by means of averaging the stress components in the adhesive layer thought its thickness. When we solve the elastoplastic problem in terms of subcritical deformation, the δ -area is distinguished where the fracture criterion is reached. The distribution of load (node forces) which affects the body from the δ -area is determined by resolving the pre-critical deformation problem with the known motion law of the δ -area boundary. As the next step, we consider the changes in the body's stress-strain state during the fracture of the δ -area. We solve the elastoplastic problem under simple unloading of the body's δ -surface and remaining the external load which correspond to the beginning of the destruction process. During the δ -unloading, the formation of new plastic areas, partial unloading and reaching the destruction criterion are possible. As a result, the body's stress-strain state in the moment when the local unloading begins differs from its state when the δ -unloading ends. This constitutes the principal distinction from the common procedure of "killing the element" when the element rigidity (after reaching the fracture criterion) is supposed to be close to null. Herewith the body state outside the deleted element is considered to be unchangeable; and the generation of the unloading zones and additional loading zones (after the element is excluded) is not considered. In case of linear plasticity, the solution of the problem with the ruptured area under the fixed external load coincides with the δ -unloading solution by virtue of the solution uniqueness and the principle of superposition. However, the solution of the elastoplastic problem for the body with the ruptured area under simple loading will not coincide with the δ -unloading solution. The paper presents the solutions of the composite delamination problems which illustrate the simple δ -unloading method both in the linear elastic as well as in the elastoplastic formulations.

© PNRPU

Введение

Моделирование образования новых материальных поверхностей предполагает описание двух стадий процесса нагружения тела: докритической и посткритической. Докритическая стадия может быть описана в рамках известных уравнений механики деформируемого твердого тела как без учета нелинейных эффектов, так и в нелинейной (упруго-пластической) постановке. При этом основная проблема состоит в формулировке критериев перехода к посткритической стадии. Общая постановка задачи посткритического поведения при упругопластическом деформировании далека от завершения. Это связано, во-первых, с выбором условий прекращения взаимодействия между поверхностями, во-вторых, с необходимостью формулировки граничных условий на вновь образующихся поверхностях. Если разрушение локализуется на материальной поверхности меры ноль, то имеет место классическая модель математического разреза [1–3]. Если взаимодействие прекращается в результате разрушения слоя конечной толщины между поверхностями, то применяется концепция физического разреза [4, 5]. Наиболее изученными и обоснованными в настоящее время являются модели докритического деформирования. Так как в этом случае не происходит образования новых материальных поверхностей, то любой подход, согласующийся с экспериментом по определению предельной нагрузки, может быть рассмотрен в качестве модели предразрушения. Соответствующие модели

применяются как для оценки трещиностойкости конструкций из однородных тел, биметаллов [6], так и из композиционных материалов, где адгезионные слои рассматриваются как область предполагаемого разрушения [7, 8]. Выделим модели, в которых явно присутствует параметр структуры среды [5, 8–12]. При выполнении того или иного критерия разрушения наступает фаза образования новых материальных поверхностей. Принципиальным моментом данного этапа является дискретность приращения поверхностей разрыва [13–15] и локализация процесса разрушения. При моделировании разрушения в пределах материальной поверхности меры ноль используются когезионные элементы [16–19] конечно-элементного пакета [20] или контактные элементы системы [21]. В работах [22–24] рассмотрен широко используемый билинейный закон распределения взаимодействия в когезионной зоне от раскрытия трещины с ниспадающим участком. Основным недостатком данного подхода является то, что когезионные элементы должны располагаться на траектории разрушения, которая зависит от новых материальных поверхностей. Кроме того, различные законы когезионного взаимодействия и материальные характеристики когезионных элементов существенно влияют на распределение напряженно-деформированного состояния [25] и требуют экспериментального подтверждения.

Сложность описания разрушения материального объема при использовании падающего участка диаграммы растяжения [26, 28] связана с построением определяющих соотношений неустойчивого по Друкеру деформирования и их подтверждением в экспериментах. Основным подходом при конечно-элементном моделировании процесса разрушения является процедура *kill element*, подробно описанная в [21]. В этом случае по достижении в конечном элементе критериальной характеристики разрушения выделяемый материальный объем исключается из рассмотрения путем умножения локальной матрицы жесткости элемента на число, близкое к нулю. Отметим, что данная процедура является корректной при упругом деформировании, когда нагрузка и разгрузка определяются одинаковыми модулями в определяющих соотношениях. В случае упругопластического деформирования тела с удаляемым таким образом элементом необходимо учитывать возможную разгрузку.

В данной работе предлагается рассматривать процесс разрушения δ -элемента как локальную разгрузку от напряжений, действующих на тело со стороны δ -элемента, при неизменной внешней нагрузке. Дискретизация задачи методом конечных элементов предполагает описание взаимодействия между частицами тела посредством узловых сил [29, 30]. Считаем, что при разрушении материального объема, взаимодействующего с несколькими конечными элементами, узловые силы взаимодействия будут разгружаться до нуля в рамках простого процесса при неизменной внешней нагрузке, достигнутой к моменту разрушения. Таким образом, неустойчивое по Друкеру деформирование исключается из рассмотрения. Отметим, что определение узловых сил взаимодействия с удаляемым материальным объемом во внутренних точках деформируемого тела является отдельной задачей. В статье предложена процедура повторного нагружения тела без разрушаемого объема, но с найденным по его границе полем перемещений для нахождения соответствующих узловых сил.

1. Постановка задачи

На рис. 1 представлено тело, состоящее из трех частей с различными материальными свойствами, где область 3 ассоциируется с клеевой подложкой толщиной δ_0 , размер которой мал по сравнению с толщинами тел 1 и 2. Процесс нагружения предполагаем

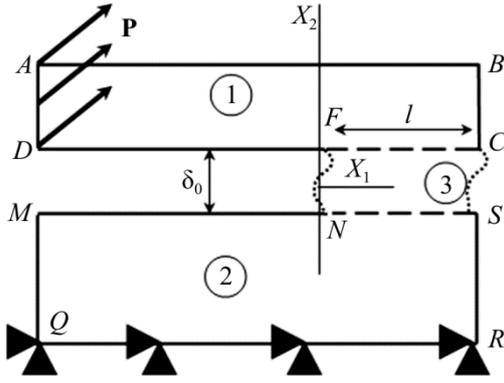


Рис. 1. Нагружение составного тела
Fig. 1. The loading of the compound body

квазистатическим и изотермическим. Условие равновесного протекания процесса [31] при малых деформациях и поворотах материальных волокон принимаем в виде

$$\iint_S \dot{\sigma} \cdot \delta \mathbf{w} ds = \int_L \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl, \quad (1)$$

где \mathbf{v} – поле скоростей; $\mathbf{w} = 0,5(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$ – тензор деформации скорости; $\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$;

$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ – скорость внешней нагрузки на

контуре L ; $\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ – скорость тензора напряжений; t – параметр подобный времени;

$S = S_1 + S_2 + S_3$ – внутренняя область составного тела.

В области 3 средние по толщине δ_0 скорости напряжений определяем в виде

$$\dot{\bar{\sigma}}_{21}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \dot{\sigma}_{21}(x_1, x_2) dx_2, \quad \dot{\bar{\sigma}}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \dot{\sigma}_{12}(x_1, x_2) dx_2, \quad \dot{\bar{\sigma}}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \dot{\sigma}_{22}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\dot{\bar{\sigma}}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \dot{\sigma}_{11}(x_1, x_2) dx_2, \text{ а средние скорости и скорости деформаций – через их гра-}$$

ничные значения:

$$w_{22}(x_1) = \left(\frac{v_2^+(x_1) - v_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad w_{11}(x_1) = 0,5 \left(\frac{\partial v_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_1(x_1)}{\partial x_2} = \frac{v_1^+(x_1) - v_1^-(x_1)}{\delta_0}, \quad \frac{\partial \bar{v}_2(x_1)}{\partial x_1} = 0,5 \left(\frac{\partial v_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad (3)$$

$$\bar{v}_1(x_1) = 0,5(v_1^+(x_1) + v_1^-(x_1)), \quad \bar{v}_2(x_1) = 0,5(v_2^+(x_1) + v_2^-(x_1)), \quad (4)$$

где \mathbf{v}^+ , \mathbf{v}^- – векторы скоростей верхней и нижней границы области 3.

Из выражений (3) приходим к представлению средней скорости сдвиговой деформации вдоль рассматриваемой области:

$$w_{21}(x_1) = 0,5 \left(\frac{\partial \bar{v}_2(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_1(x_1)}{\partial x_2} \right) = 0,5 \left(\frac{v_1^+(x_1) - v_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left(\frac{\partial v_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right). \quad (5)$$

Принимаем, что векторы скоростей напряжений на сопряженных границах слоя 3 равны и противоположны векторам скоростей напряжений сопряженных границ тела. Кроме того, постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2:

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}(x_1, \delta_0/2); \quad \mathbf{v}^- = \mathbf{v}(x_1, -\delta_0/2); \quad x_1 \in [F, C]. \quad (6)$$

Рассматривая скорости граничных векторов напряжений слоя 3 в качестве граничных условий для смежных с ним областей [5, 8], приходим к совместному решению вариационных уравнений равновесия для тела 1:

$$\int_{S_1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds + \int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{22} \delta v_2 dx_1 + \int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{21} \delta v_1 dx_1 + 0,5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{21} \frac{\partial \delta v_2}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L^1} \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl \quad (7)$$

и тела 2:

$$\int_{S_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{w} ds - \int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{22} \delta v_2 dx_1 - \int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{21} \delta v_1 dx_1 + 0,5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \dot{\bar{\sigma}}_{21} \frac{\partial \delta v_2}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L^2} \dot{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{v} dl. \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) необходимо замкнуть конкретными определяющими соотношениями, связывающими скорости напряжений со скоростями деформаций. Поведение материала тел 1 и 2 при активном нагружении ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0$) определяем следующими физическими соотношениями:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G^{(i)} \tilde{\mathbf{w}}, \quad (9)$$

$$\dot{p} = 3K^{(i)} \dot{\theta}, \quad (10)$$

где $i = 1, 2$; $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – скорость девиатора тензора напряжений; $\tilde{\mathbf{w}}$ – девиаторная составляющая тензора деформаций скоростей; $\dot{p} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{E}$; $K^{(i)}$ – модуль объемного сжатия; $G^{(i)}$ – модуль сдвига $G^{(i)} = G_e^{(i)}$ при $T \leq T_p^{(i)}$, $G^{(i)} = G_p^{(i)}$ при $T > T_p^{(i)}$; $T_p^{(i)}$ – предел текучести соответствующего материала; T – интенсивность касательных напряжений.

В состоянии разгрузки ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \leq 0$) определяющие соотношения запишем в виде

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G_e^{(i)} \tilde{\mathbf{w}}, \quad (11)$$

$$\dot{p} = 3K^{(i)} \dot{\theta}. \quad (12)$$

В материале слоя определяющие соотношения считаем справедливыми для средних по толщине слоя скоростных характеристик НДС:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G^{(3)} \tilde{\mathbf{w}}, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0, \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G_e^{(3)} \tilde{\mathbf{w}}, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \leq 0, \quad (14)$$

$$\dot{p} = 3K^{(3)} \dot{\theta}, \quad (15)$$

где $K^{(3)}$ – модуль объемного сжатия материала слоя; $G^{(3)}$ – модуль сдвига материала слоя $G^{(3)} = G_e^{(3)}$ при $T \leq T_p^{(3)}$, $G^{(3)} = G_p^{(3)}$ при $T > T_p^{(3)}$; $T_p^{(3)}$ – предел текучести материала слоя.

В результате подстановки в определяющие соотношения (13)–(15) выражений компонент средних деформаций скорости (2), (5) средние скорости напряжений определяются через граничные скорости и их производные. Таким образом, решение системы (7)–(12) сводится к определению поля скоростей $\mathbf{v}(x_1, x_2)$ в телах 1 и 2 (см. рис. 1). В этом случае в уравнении (7) будут присутствовать скорости границы NS тела 2 (см. рис. 1), а в уравнении (8) – скорости границы FC тела 1 (см. рис. 1).

После определения поля скоростей для нахождения поля перемещений и деформаций используем эволюционные соотношения

$$\mathbf{u}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} dt, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w} dt, \quad (17)$$

где $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ – поле перемещений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформации.

С учетом определяющих соотношений (9)–(12) находим поле напряжений в телах 1 и 2:

$$\boldsymbol{\sigma}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt, \quad (18)$$

а из (13)–(15), используя значения граничных скоростей слоя и связи (2), (5), определяем поле средних напряжений слоя:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} dt. \quad (19)$$

Условия разрушения адгезионного слоя (АС) формулируем для δ -элементов слоя размером $\delta_0 \times \delta_0$. Это является следствием основного физического допущения – разрушение охватывает частицу материала с характерным размером δ_0 [8, 11–15]. В качестве критерия когезионного разрушения АС будем использовать критерий Кулона, согласно которому разрушение δ -элемента происходит при достижении максимальным главным растягивающим усредненным напряжением критического значения: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\max} = \boldsymbol{\sigma}_k$, где

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\delta_0} \int_{x_j^F}^{x_j^F + \delta_0} \bar{\sigma}_{ij} dx_1, \quad (20)$$

а $\bar{\sigma}_{ij}$ получены в результате решения (7)–(12), (19).

2. Когезионное дискретное разрушение

Решение задачи докритического деформирования (7)–(15) строим на основе метода конечного элемента с квадратичным распределением поля скоростей на элементе. В этом случае поля скоростей напряжений и деформаций распределены по линейному закону в пределах каждого конечного элемента. Отметим, что размер грани конечного элемента может быть существенно меньше линейного размера δ_0 и определяется вычислительной сходимостью дискретного решения задачи [8]. Интегрируя по площади конечного элемента компоненты соответствующих тензоров, определяем средние по элементу значения

$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S} \int_S \dot{\sigma}_{ij} ds$, $\hat{w}_{ij} = \frac{1}{S} \int_S w_{ij} ds$, по которым, используя эволюционные соотношения (17),

(18), находим напряжения и деформации $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{\varepsilon}_{ij}$. Переход в состояние пластичности соотносим со средними характеристиками НДС. Решение упругопластической задачи строим

на основе метода «упругих решений» [32]. Секущий модуль сдвига каждого конечного элемента будем определять исходя из средних компонент $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}$, считая секущий модуль в пределах конечного элемента постоянным.

Узел элемента характеризуется узловой скоростью \mathbf{v}^i и скоростью узловой силы $\dot{\mathbf{F}}^i$. Используя эволюционные соотношения

$$\mathbf{u}^i(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}^i dt, \quad (21)$$

$$\mathbf{F}^i(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{F}}^i dt, \quad (22)$$

в узлах можно определить узловые перемещения и узловые силы.

При когезионном разрушении постулируем, что элемент слоя полностью разрушается в течение интервала времени Δt . В этом случае на момент разрушения t_1 мысленно удалим из слоя элемент размером $\delta_0 \times \delta_0$, где напряженное состояние, определяемое согласно (20), соответствует критериальной величине $\hat{\sigma}^{\max} = \sigma_k$, а его влияние на тело компенсируем внешней узловой нагрузкой $\mathbf{F}^{+(i)}, \mathbf{F}^{-(j)}$ со стороны элемента (рис. 2).

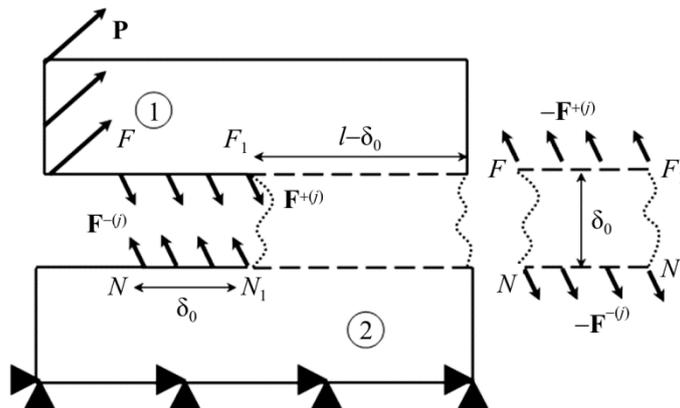


Рис. 2. Эквивалентные нагрузки элемента слоя в момент предразрушения
Fig. 2. The equivalent loadings of the element layer during the pre-fracture

Полагаем, что в течение интервала Δt δ -элемент будет полностью разрушен, если нагрузка, действующая со стороны элемента слоя на тело, станет равна нулю. В этом случае в течение интервала времени Δt при неизменной внешней нагрузке \mathbf{P} необходимо разгрузить новые материальные поверхности. Будем считать процесс разгрузки простым, зависящим от одного параметра Δt . Это соответствует заданию скоростей узловых внешних нагрузок:

$$\dot{\mathbf{F}}^{FF_1} = -\mathbf{F}^{+(i)} / \Delta t, \quad \dot{\mathbf{F}}^{NN_1} = -\mathbf{F}^{-(j)} / \Delta t. \quad (23)$$

Таким образом, рассматривая (23) в качестве внешней нагрузки, показанной на рис. 3, для конечно-элементной постановки задачи (7)–(15) можно смоделировать процесс формирования новых поверхностей на характерном размере. Процесс простой разгрузки на ин-

тервале Δt может быть разбит на несколько интервалов, однако в рамках данной статьи ограничимся одним шагом.

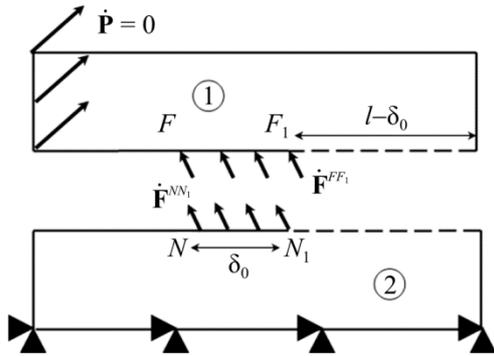


Рис. 3. Нагрузка в процессе разрушения элемента слоя

Fig. 3. The loading during the fracture of the layer element

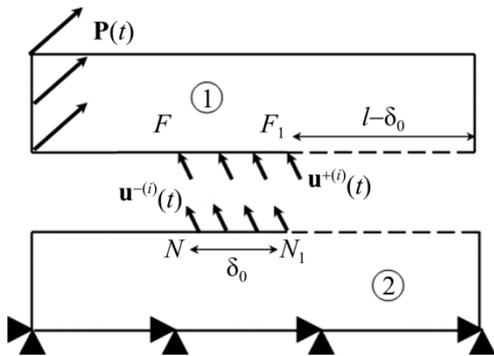


Рис. 4. Схема повторного нагружения

Fig. 4. The scheme of re-loading

В зависимости от распределения основной внешней нагрузки в результате разрушения δ -элемента процесс разделения может продолжаться при неизменном значении основной внешней нагрузки (неустойчивое разрушение) либо прекратиться. При этом следует учитывать, что в результате δ -разгрузки, связанной с разрушением AC , в окружающих слоях может происходить догрузка с выходом в пластическую область. Данное обстоятельство не позволяет непосредственно использовать теорему о разгрузке А.А. Ильюшина [32].

3. Результаты решения

В качестве примера расчета рассмотрим композиционный материал в состоянии плоской деформации, состоящий из двух элементов с материальными характеристиками, близкими к сплаву Д16: $G = 2,8 \cdot 10^{10}$ Па; $G_p = 5,2 \cdot 10^8$ Па; $K = 6 \cdot 10^{10}$ Па; $T_p = 3 \cdot 10^8$ Па – предел упругости; $\sigma_k = 4,2 \cdot 10^8$ Па – предел прочности, связанных эпоксидной смолой со следующими свойствами: $G = 1,3 \cdot 10^9$ Па; $K = 1,7 \cdot 10^9$ Па; $\sigma_k = 9 \cdot 10^7$ Па. Геометрические характеристики композита выбирались следующими: $AD = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $\delta_0 = FN = 10^{-3}$ м;

Основная проблема заключается в нахождении узловых сил $\mathbf{F}^{+(i)}$, $\mathbf{F}^{-(j)}$ в момент предразрушения и, следовательно, в формировании граничных условий (23). Дискретное решение (7)–(15) для докритического деформирования по границам сопряжения слоя в качестве неизвестных содержит вектор узловых скоростей $\mathbf{v}^{+(i)}$, $\mathbf{v}^{-(j)}$, по которому из (16) может быть сформирован вектор перемещений $\mathbf{u}^{+(i)}$, $\mathbf{u}^{-(j)}$.

Для определения узловых сил $\mathbf{F}^{+(i)}$, $\mathbf{F}^{-(j)}$ предлагается использовать процедуру повторного нагружения, состоящую в замене действия разрушаемого элемента заданием процесса изменения со «временем» узловых перемещений элемента, при повторении закона внешнего воздействия на тело (рис. 4).

Конечно-элементное решение повторного нагружения в узлах с заданным полем узловых скоростей $\mathbf{v}^{+(i)}$, $\mathbf{v}^{-(j)}$ в качестве неизвестных будет содержать вектор скоростей узловых сил $\dot{\mathbf{F}}^{+(i)}$, $\dot{\mathbf{F}}^{-(j)}$ по границам разрушаемого элемента.

$MQ = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $AB = 10^{-1}$ м; $DF = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Скорость внешней нагрузки $\dot{P} = 1$ Па/с направлена по углом $\pi/4$ к оси OX_1 .

В качестве тестовой рассмотрим задачу разрушения элемента слоя в упругой постановке. Пусть критическое состояние в δ -элементе определяет внешняя нагрузка $P = 1$ Па. Вычислительная сходимость решения предполагает разбиение участка границы, сопряженного с δ -элементом, на четыре конечных элемента [8]. С учетом квадратичного закона распределения поля скоростей на конечном элементе девять узловых сил по верхней и нижней границе разрушаемого δ -элемента будут определять равновесие композита в момент предразрушения (см. рис. 2). Соответствующие значения узловых сил, определяемые методом повторного нагружения, представлены в таблице. Силы в таблице отнесены к минимальному значению модуля их проекций. Нумерация узлов выбрана слева направо.

Значения проекций безразмерных узловых сил
The values of the projections of the dimensionless nodal forces

F_1^+	8,9	3,2	1,3	2,3	1,1	2,1	1,0	2,0	1,0
F_2^+	-10,5	-9,8	-4,3	-8,3	3,9	-7,4	-3,5	-6,6	-3,3
F_1^-	7,5	-2,2	-1,5	-3,0	-1,5	-2,9	-1,4	-2,8	-1,4
F_2^-	-5,5	9,4	4,7	8,9	4,2	8,0	3,8	7,2	3,6

Без ограничения общности минимальный модуль проекций найденных узловых сил может быть рассмотрен в качестве параметра локальной разгрузки Δt для определения граничных условий (23).

График 2 на рис. 5, а показывает распределение безразмерных вертикальных перемещений u_2^b по границе тела 1 и слоя 3 к концу докритического деформирования, график 3 – перемещений за счет процесса разрушения структурного элемента слоя, график 1 – суперпозицию полей перемещений. Перемещения отнесены к значению перемещения $u_2^+(0, \delta_0/2)$ на начало процесса разрушения. Безразмерная координата в направлении оси абсцисс определяется как $x_1^b = x_1/\delta_0$.

График 1 на рис. 5, б определяет соответствующие вертикальные перемещения при решении задачи без первого структурного элемента слоя к концу интервала Δt_1 . Данное решение моделирует подход kill element, используемый в процедурах конечно-элементного моделирования [15].

График 2 на рис. 5, б повторяет кривую 1 на рис. 5, а. Как видно из рис. 5, б, совпадение графиков 1 и 2 показывает адекватность предлагаемой процедуры разгрузки новых поверхностей в процессе разрушения и подхода kill element в рамках упругого деформирования. Отметим, что по горизонтальным перемещениям тенденция аналогична.

Максимальное главное растягивающее напряжение $\hat{\sigma}^{\max}$ во втором элементе слоя при этом возрастает, что предполагает катастрофический характер разрушения в данной схеме.

Проводя сравнение решения упругой задачи для заданной внешней нагрузки с первым структурным элементом слоя и без него, отметим, что для большинства конечных элементов интенсивность напряжений ($I = \sigma \cdot \sigma$) уменьшается. На рис. 6 показана конечно-элементная область тел 1 и 2 (см. рис. 1), где интенсивность напряжений уменьшилась (элементы выделены заливкой) при решении задачи без первого структурного элемента

слоя по сравнению с решением со структурным элементом. Данное обстоятельство дает право предположить, что при упругопластическом характере деформирования возможно образование зоны разгрузки пластических областей.

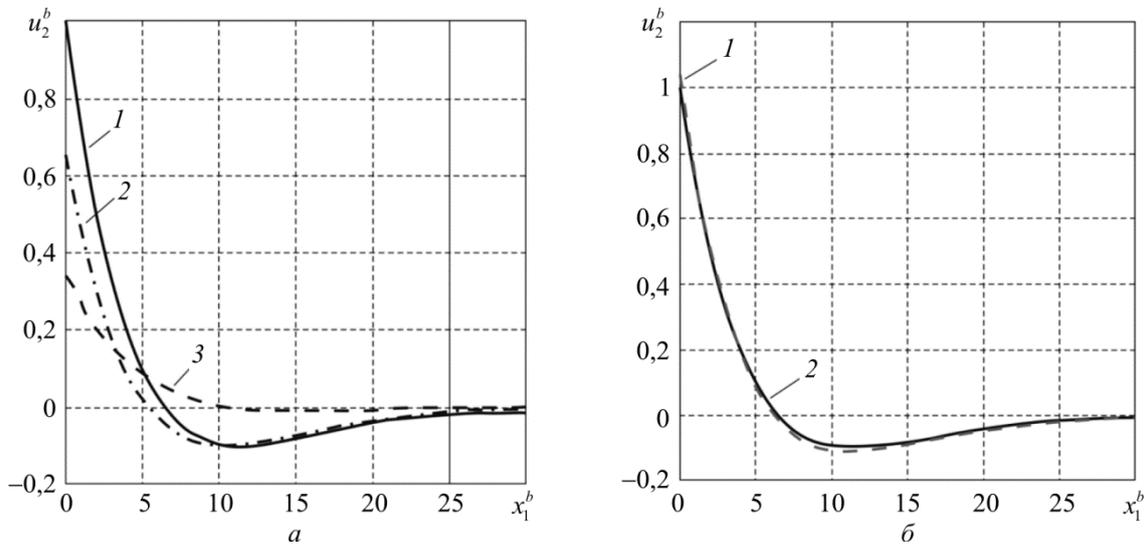


Рис. 5. Распределения вертикальных перемещений: a – штрихпунктирная линия – докритическое деформирование, пунктирная линия – процесс разрушения структурного элемента, сплошная линия – суперпозиция решений; b – сплошная линия повторяет соответствующую линию (a), пунктирная линия описывает докритическое деформирование без первого структурного элемента
 Fig. 5. The distribution of vertical displacements: a – the broken line shows the subcritical deformation; the dashed line shows the fracture of the structural element; the solid line shows the superposition of the solutions; b – the solid line repeats the corresponding line (a); the dashed line shows the subcritical deformation without the first structural element

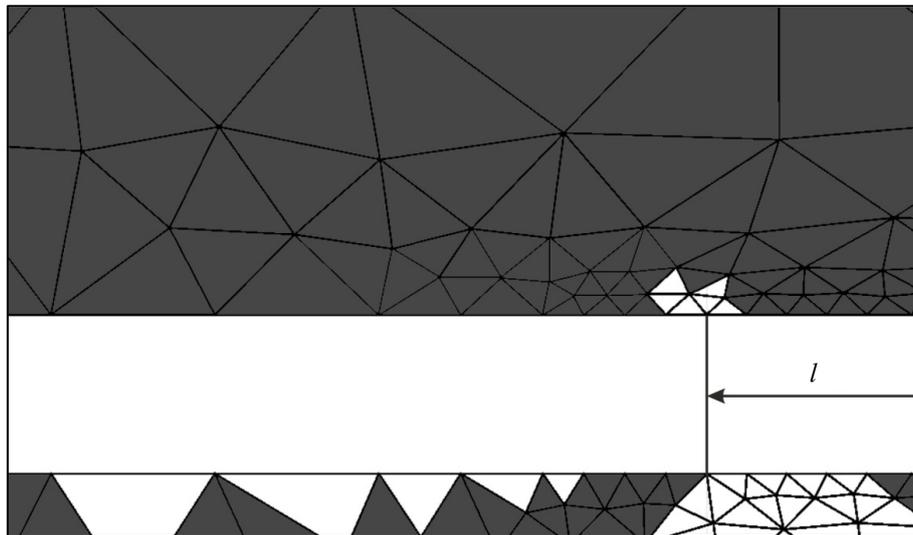


Рис. 6. Конфигурация конечно-элементной области, где уменьшается интенсивность напряжений при упругом решении задачи, построенная на основе подхода kill element. Элементы выделены цветом

Fig. 6. The configuration of the finite element area where the stresses intensity decreases in the elastic solution of the problem based on the kill element approach. The elements are highlighted.

Однако подход на основе процедуры kill element не позволяет корректно описать данный процесс. Рассмотрим решение данной задачи на основе предлагаемой процедуры.

На рис. 7 выделена область пластических деформаций в состоянии предразрушения. Значение внешней нагрузки при этом обозначим через P_k . Максимальное главное напряжение в адгезионном слое на характерном элементе равняется пределу прочности, а вне слоя предел прочности не достигается. Следовательно, разрушение в слое наступит быстрее, чем в сопряженных с ним материалах. Предполагаем, что адгезионная связь смола–сплав достаточно прочна и разрушение будет проходить по массиву адгезионного компонента.

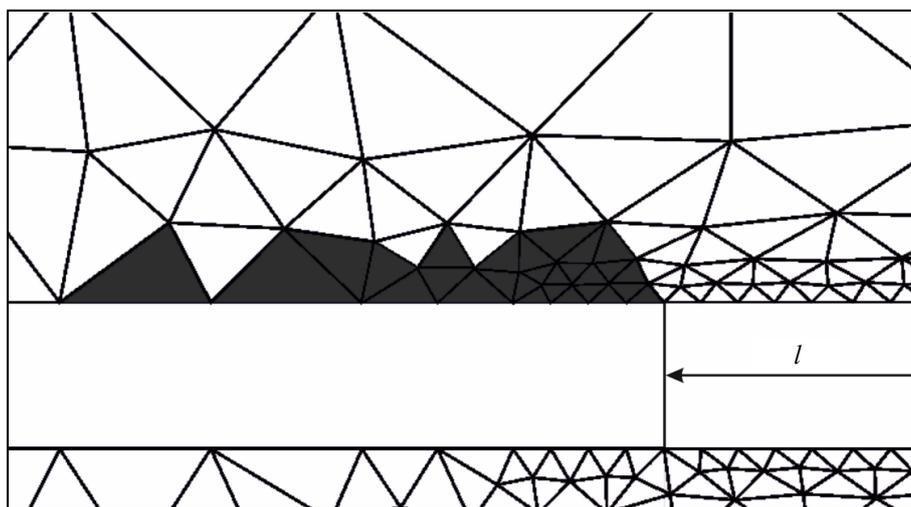


Рис. 7. Зона пластичности в состоянии предразрушения. Область выделена цветом
 Fig. 7. The plasticity zone in the pre-fracture state. The area is highlighted

Разрушение первого элемента приводит к перераспределению зоны пластичности и разгрузке ряда элементов композита. В этом случае рассмотрение разрушения как термомеханического процесса дает отличный от процедуры kill element результат. На рис. 8 темным показана зона пластической догрузки, а более светлым – элементы, где произошла упругая разгрузка из пластической области по завершении процесса разрушения первого δ -элемента.

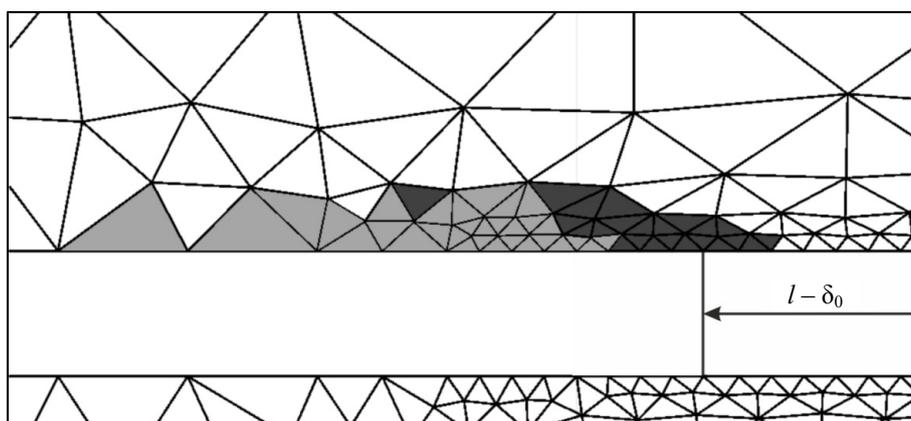


Рис. 8. Эволюция зоны пластичности и разгрузки в процессе разрушения первого элемента.
 Область разгрузки выделена серым цветом, а упругопластическая – черным
 Fig. 8. The evolution of the plasticity and unloading zones during the fracture of the first element.
 The unloading area is highlighted in gray; the elastoplastic area is in black

Решая задачу нагружения композита критической нагрузкой P_k без первого структурного элемента слоя, приходим к перераспределению пластической области (рис. 9). Сопоставляя рис.8 и рис. 9, видим, что разгрузка из пластической области не учитывается в подходе kill element, при этом область пластичности немного больше объединения областей разгрузки из пластической области и пластической догрузки, отображенных на рис. 8.

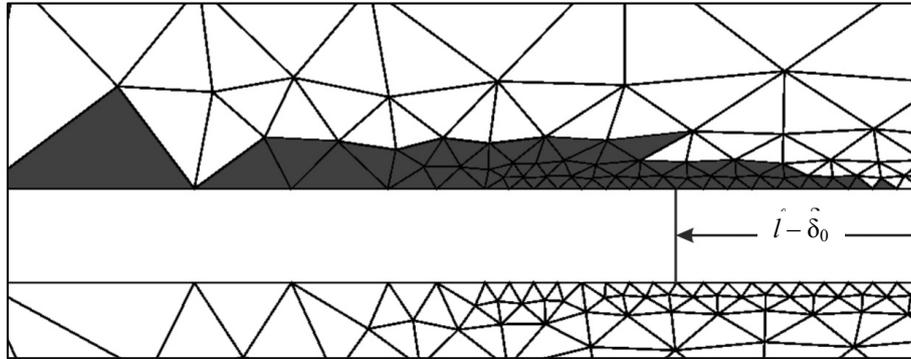


Рис. 9. Зона пластичности в композите без первого структурного элемента адгезионного слоя. Область выделена цветом
 Fig. 9. Plasticity zone in the composite without the first structural element of the adhesive layer. The area is highlighted

Разрушение первого элемента приводит к превышению предела прочности на втором элементе слоя, что означает его разрушение при фиксированной внешней нагрузке. Таким образом, при данном виде нагружения имеет место катастрофическое разрушение.

Заключение

В работе предложен вариант описания дискретного разрушения материального объема на основе гипотезы простой разгрузки. Для определения внутренних узловых сил, действующих на разрушаемый объём, использована процедура повторного нагружения с заданным полем узловых перемещений, найденным из решения задачи докритического деформирования. Результаты расчёта по предложенной модели в рамках упругого поведения материала не противоречат известной методике расчета kill element. В случае упругопластического материала напряженное состояние, получаемое при моделировании процесса разрушения методом локальной разгрузки, может существенно отличаться от состояния, определенного методом kill element. Предлагаемый подход позволяет учесть перераспределение пластических зон и возможность образования новых зон разрушения в результате локальной разгрузки. Предложенная методика может быть использована для моделирования процесса разрушения элементов в произвольном конечно-элементном континууме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-01875).

Библиографический список

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
2. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 502 с.
3. Barenblatt G.I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture // Advances in Applied Mechanics. – 1962. – Vol. 7. – P. 55–129. – URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)

4. Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. – М.: Мир, 1975. – Т. 3. – С. 67–262.
5. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Stress-Strain State of Elastoplastic Bodies with Crack // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2015. – Vol. 28. – No. 4. – P. 375–383. DOI: 10.1016/S0894-9166(15)30023-9
6. Астапов Н.С., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной // *Физическая мезомеханика*. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 49–57.
7. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints // *Int. J. Adhes. Adhes.* – 2011. – Vol. 31. – No. 4. – P. 248–264. DOI:10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
8. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2016. – № 2. – С. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.03
9. Васильев В.В., Лурье С.А. Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // *Изв. РАН. МТТ*. – 2016. – Т. 51, № 5. – С. 61–67.
10. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Разрушение и формирование структуры // *ДАН СССР* – Т. 240, № 4. – 1978. – С. 111–126.
11. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – М.; Л.: ОГИЗ: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
12. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *ПММ*. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 212–222.
13. Назаров С.А., Паукшто М.В. Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. – 93 с.
14. Петров Ю.В. Квантовая аналогия в механике разрушения // *Физика твердого тела*. – 1996. – Т. 38, № 11. – С. 3385–3393.
15. Petrov Y.V., Morozov N.F., Smirnov V.I. Structural Macromechanics Approach in Dynamics of Fracture // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* – 2003. – Vol. 26. – No. 4. – P. 363–372. DOI: 10.1046/j.1460-2695.2003.00602.x
16. Xiangting Su, Zhenjun Yang, Guohua Liu. Finite element modelling of complex 3D static and dynamic crack propagation by embedding cohesive elements in Abaqus // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2010. – Vol. 23. – No. 3. – P. 271–282. DOI: 10.1016/S0894-9166(10)60030-4
17. Sua X.T., Yang Z.J., Liu G.H. Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials: A 3D study // *International Journal of Solids and Structures*. – 2010. – Vol. 47. – No. 17. – P. 2336–2345. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.031
18. Zhenjun Yang, X. Frank Xu. A heterogeneous cohesive model for quasi-brittle materials considering spatially varying random fracture properties // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2008. – Vol. 197. – No. 45–48. – P. 4027–4039.
19. Panettieri E, Fanteria D, Firrincieli A. Damage initialization techniques for nonsequential FE propagation analysis of delaminations in composite aerospace structures // *Meccanica*. – 2015. – Vol. 50. – No. 10. – P. 2569–2585. DOI: 10.1007/s11012-015-0214-0
20. Dassault Systemes Simulia Corp., Abaqus 6.11, User's Manual, 2011.
21. ANSYS. User's Guide, Release 11.0. – Pennsylvania, USA: ANSYS Inc., 2006.
22. Dávila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements // *Journal of Aircraft*. – 2008. – Vol. 42. – No. 2. – P. 663–672. DOI: 10.2514/1.32832
23. De Moura MFSF., Gonçalves JPM. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – No. 5. – P. 1123–1131. – URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.0>
24. Finite element simulation of single carbon nanotube pull-outs from a cementitious nanocomposite material using an elastic-plastic-damage and cohesive surface models / Rashid K. Abu Al-Rub, Sun-Myung Kim, Khaldoun A. Bani-Hani, Nasser Al-Nuaimi, Ahmed Senouci // *Int. J. Theoretical and Applied Multiscale Mechanics*. – 2014. – Vol. 3. – No. 1. – P. 31–57. DOI: 10.1504/IJTAMM.2014.069448

25. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 137. – P. 140–147. – URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.018>

26. Рыжак Е.И. К вопросу об осуществимости однодольного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1991. – № 1. – С. 111–127.

27. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г. Феноменологические основы оценки трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграмм деформаций // *Проблемы прочности*. – 1983. – №2. – С. 6–10.

28. Стружанов В.В. Об одном подходе к изучению механизма зарождения трещин // *ПМТФ*. – 1986. – № 6. – С. 118–123.

29. Kattan P.I., Voyiadjis G.Z. *Damage Mechanics with Finite Elements: Practical Applications with Computer Tools*. – Springer, 2012. – 113 p.

30. Efendiev Y., Hou T.Y. *Multiscale Finite Element Methods. Theory and Applications*. – Springer, 2009. – 242 p.

31. Маркин А.А., Соколова М.Ю. *Термомеханика упругопластического деформирования*. – М.: Физматлит, 2013. – 320 с.

32. Ильюшин А.А. *Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации*. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 376 с.

References

1. Cherepanov G.P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniia* [Mechanics of brittle fracture]. Moscow, Nauka, 1974, 640 p.

2. Parton V.Z., Morozov E.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniia* [Mechanics of elastoplastic fracture]. Moscow, Nauka, 1985, 502 p.

3. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*. 1962, vol. 7, pp. 55-129. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2

4. McClintock F. *Plasticheskie aspekty razrusheniia* [Plastic aspects of destruction]. Moscow, Mir Razrushenie, 1975, vol. 3, pp. 67-262.

5. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Stress-strain state of elastoplastic bodies with crack. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2015, vol. 28, no. 4, pp. 375-383. DOI: 10.1016/S0894-9166(15)30023-9

6. Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. Model' rassloeniia raznomodul'nogo bimateriala s treshchinoi [Separation model multimodulus bimaterial with crack]. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 49-57.

7. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2011, vol. 31, no. 4, pp. 248-264. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006

8. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Separation process modeling of composite with adhesive layer. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016, no.2, pp. 34-44. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.03

9. Vasil'ev V.V., Lurie S.A. Novoe reshenie ploskoi zadachi o ravnovesnoi treshchine [The new solution of the plane problem of the equilibrium crack]. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 61-67.

10. Goldshtein R.V., Osipenko N.M. Razrushenie i formirovanie struktury [The destruction and the formation of structure]. *Doklady akademii nauk SSSR*. 1978, vol. 240, no. 4, pp. 111-126.

11. Neuber H. *Kerbspannunglehre: grunglagen fur genaue spannungsrechnung*. Springer-Verlag, 1937, 154 p.

12. Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1969, vol. 33, no. 2, pp. 201-210. DOI: 10.1016/0021-8928(69)90025-2

13. Nazarov S.A., Paukshto M.V. Diskretnye modeli i osrednerie v zadachyah teorii uprugosti [Discrete models and averaging in problems of the elasticity theory]. Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, 1984, 93 p.

14. Petrov Y.V. Kvantovaia analogiia v mekhanike razrusheniia [Quantum analogy in the mechanics of fracture]. *Physics of the solid state*, 1996, vol.38, no.11, pp. 1846-1850.

15. Petrov Y.V., Morozov N.F., Smirnov V.I. Structural macromechanics approach in dynamics of fracture. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2003, vol. 26, no 4, pp. 363-372. DOI: 10.1046/j.1460-2695.2003.00602.x

16. Xiangting Su, Zhenjun Yang, Guohua Liu. Finite element modelling of complex 3D static and dynamic crack propagation by embedding cohesive elements in Abaqus. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2010, vol. 23, no. 3, pp. 271-282. DOI:10.1016/S0894-9166(10)60030-4
17. Sua X.T., Yang Z.J., Liu G.H. Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials: A 3D study. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 47, no. 17, pp. 2336-2345 DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.031
18. Zhenjun Yang, X. Frank Xu. A heterogeneous cohesive model for quasi-brittle materials considering spatially varying random fracture properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, vol. 197, no. 45-48, pp. 4027-4039.
19. Panettieri E, Fanteria D, Firrincieli A. Damage initialization techniques for nonsequential FE propagation analysis of delaminations in composite aerospace structures. *Meccanica*, 2015, vol. 50, no. 10, pp. 2569-2585. DOI:10.1007/s11012-015-0214-0
20. Dassault Systemes Simulia Corp., Abaqus 6.11, User's Manual; 2011.
21. ANSYS. User's Guide, Release 11.0. Pennsylvania, USA: ANSYS Inc. 2006.
22. Dávila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements. *Journal of Aircraft*, 2008, vol. 42, no. 2, pp. 663-672. DOI: 10.2514/1.32832
23. De Moura MFSF., Gonçalves JPM. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, no 5, pp. 1123-1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.0
24. Rashid K. Abu Al-Rub, Sun-Myung Kim, Khaldoon A. Bani-Hani, Nasser Al-Nuaimi, Ahmed Senouci. Finite element simulation of single carbon nanotube pull-outs from a cementitious nanocomposite material using an elastic-plastic-damage and cohesive surface models. *Int. J. Theoretical and Applied Multiscale Mechanics*, 2014, vol. 3, no.1, pp. 31-57. DOI: 10.1504/IJTAMM.2014.069448
25. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results. *Composite Structures*. 2016, vol. 137, pp. 140-147. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018.
26. Ryzhak E.I. K voprosu ob osushchestvimmosti odnorodnogo zakriticheskogo deformirovaniia pri ispytaniiax v zhestkoi trekhosnoi mashine [On the realizability of homogeneous supercritical deformation in tests in a rigid three-axle machine]. *Izvestiia akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1991, no. 1, pp. 111-127.
27. Lebedev, A.A., Chausov, N.G. Phenomenological fundamentals of the evaluation of crack resistance of materials on the basis of parameters of falling portions of strain diagrams. *Strength of Materials*, 1983, vol. 15, no. 2, pp. 155-160. DOI: 10.1007/BF01523460
28. Struzhanov V.V. Crack generation and propagation mechanism. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1986, vol. 27, no. 6, pp. 894–899. DOI: 10.1007/BF00918835
29. Kattan P.I., Voyiadjis G.Z. Damage mechanics with finite elements: practical applications with computer tools. Springer, 2012, 113 p.
30. Efendiev Y., Hou T.Y. Multiscale finite element methods. theory and applications. Springer, 2009, 242 p.
31. Markin A.A., Sokolova M.Y. Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniia [Thermomechanics of Elastoplastic Deformation]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2013, 320 p.
32. Ilyushin A.A. Plastichnost'. Chast' pervaya. Uprugo-plasticheskie deformatsii [Plasticity. Part one. Elastoplastic deformation]. *Moscow, Moscow State University*, 2004, 376 p.