



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.11

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А.А. Тырымов

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 27 апреля 2017 г.
Принята: 07 сентября 2017 г.
Опубликована: 30 сентября 2017 г.

Ключевые слова:

математическое моделирование, теория упругости, ориентированный граф, напряжения, деформация, матрица инцидентности, матрица контуров.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается численный метод расчета полей деформаций и напряжений трехмерных упругих тел, дискретной моделью которых служит ориентированный граф как идеализация гипотетических приборов, необходимых для измерения деформированного состояния тела. В соответствии с предлагаемым методом упругая среда разделяется на отдельные элементы плоскостями, параллельными координатным. Для каждого элемента, полученного при декомпозиции, строим элементарную ячейку (подграф), являющуюся его моделью. Она представляет собой комплект измерителей, установленных на элемент для определения его деформированного состояния. Уравнение элементарной ячейки получаем, пользуясь инвариантом, сохраняющимся при преобразовании элемента в ячейку. В качестве инварианта используем энергию деформации. Граф тела конструируем с помощью операции объединения элементарных ячеек. Он отражает характер декомпозиции и является дискретной моделью анализируемого сплошного тела. Структурные свойства графа задаются рядом специальных матриц, наиболее важными из которых являются матрицы инцидентности, контуров, хорд, путей.

Уравнения состояния исходного тела получаем с помощью преобразования обобщенных координат элементов тела, полученного в результате декомпозиции, к системе координат, описывающих тело в целом. Преобразования осуществляются несингулярными взаимно обратными матрицами. Специфическая особенность графов, используемых в качестве дискретных моделей сплошного тела, заключается в том, что они позволяют конструировать несингулярные матрицы и исключить их обращение. Квадратные взаимно обратные матрицы преобразования созданы путем сочленения прямоугольных матриц, представляющих собой разнообразные элементы графа.

Вывод определяющей системы уравнений основан на использовании вершинного и контурного законов Кирхгофа для графов, а также свойств построенных квадратных матриц преобразования. Возможности графового метода проиллюстрированы решением тестового примера.

© ПНИПУ

© Тырымов Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tyrymov2010@yandex.ru

Alexander A. Tyrymov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: tyrymov2010@yandex.ru



STATE EQUATIONS OF THE DRAPH MODEL OF THREE-DIMENSIONAL ELASTIC SOLIDS IN CARTESIAN COORDINATES

A.A. Tyrymov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 April 2017
Accepted: 07 September 2017
Published: 30 September 2017

Keywords:

mathematical simulation, elasticity theory, directed graph, stresses, strain, incidence matrix, cycle matrix.

ABSTRACT

The paper considers the numerical analysis method of mechanical fields in deformable bodies based on the graph model of an elastic medium in the form of the directed graph. According to the applied method the elastic medium along the coordinate planes is divided into separate elements. In line with this notion we have established an elementary cell configuration, a subgraph of the element by installing hypothetical meters on the solid's element. The derivation of the cell equations which is based on the element conversion into the cell relies on an invariant. The deformation energy is the invariant. The whole body's graph is built following the same rule as in the elementary cell.

Apart from the opportunity to present the system configuration and mutual connections of its variables, the graphs allow to conduct complex mathematical transformations deliberately in the frameworks of the definite algorithm. The matrices which present several structural elements of the graph and the equations which describe the elementary cells both contribute to deriving the constitutive equations of the intact body. There are matrices that set such structural elements of the graph as cycles, paths and chords.

The graph of a whole body is built by following the same rule as in the elementary cell. The method is based on transforming the generalized coordinates of a solid body separated into pieces to a system of generalized coordinates of the initial solid body. The nonsingular and mutually inverse matrices do this transform. The specific nature of the graph model lies in the possibility to construct these matrices with no need for their numerical inversion.

The derivation of the defining system of equations is based on the use of vertex and contour of Kirchhoff's laws for graphs, and the properties of the constructed square transformation matrices. The potentials of the graph method are illustrated by solving a test example.

© PNRPU

Введение

Графы широко используются как структурные модели физических и технических систем, допускающих идеализированное представление в виде схем с сосредоточенными параметрами [1–6]. Сюда относятся электрические цепи, механизмы, стержневые конструкции, теплообменники, акустические системы, разнообразные комбинированные системы, такие как электромеханические, гидромеханические, механоакустические и др. Объясняется это рядом достоинств графовых моделей. Одно из обстоятельств, способствующих применению графов для описания различных технических систем, заключается в их связи с операциями измерения основных переменных, однозначно определяющих состояние этих систем. Физическая природа переменных изменяется от одного класса систем к другому, в то время как техническая суть операции по их измерению остается неизменной. Подобный подход позволяет представить систему ее переменными, изображенными в виде графа, а граф использовать при анализе этой системы.

Однако помимо преимуществ, связанных с наглядностью представления структуры и связи основных переменных, графы позволяют целенаправленно в рамках определенного алгоритма провести сложные математические преобразования. Анализ физических и технических систем сводится к получению уравнений состояния системы на основании уравнений состояния ее частей. Теория графов позволяет разработать систематическую методику вывода этих уравнений. Объединение описаний частей в описание связной системы осуществляется с помощью матриц, характеризующих структуру графа.

Анализ системы с сосредоточенными параметрами с использованием матричных методов возможен на основе сетевой модели Г. Крона. Подход Крона [7, 8] основан на объединении структурных свойств электрической цепи, представляемых схемой соединения ее компонентов, с функциональными свойствами, представленными уравнениями состояния компонентов. Применяя аналоговое моделирование, Крон предложил использовать электрические цепи для представления самых разнообразных физических, технических и экономических систем. Были разработаны эквивалентные электрические сети, предназначенные для моделирования задач гидродинамики, электрического поля, квантовой механики, линейного программирования [7–10].

При построении электрической сети, эквивалентной упругому телу, Крон принял, что механические напряжения моделируются электрическими токами, а деформации – разностями потенциалов. Однако необходимость учета характеристик реально существующих электрических компонентов и процессов привело к тому, что элементарные ячейки Крона отличаются сложностью конфигурации. Так, в элементарную ячейку для непосредственного физического моделирования плоского напряженного состояния упругого тела входит 12 компонентов со сложным их соединением [11]. Обращая основное внимание в своих работах на универсальность возможностей использования в качестве моделей эквивалентных электрических сетей в различных областях науки и техники, Крон не приводит методик по их конструированию и разработке алгоритмов при определении параметров элементарных ячеек.

Подход Крона не получил распространения применительно к задачам механики сплошной среды. Опираясь на идеи Крона, Е.Г. Кузовков [12–14] предложил использовать электрические ячейки только для отображения связей и характеристик моделируемой упругой среды. Это позволило в компонентах ячеек не учитывать такие свойства реально существующих электрических элементов, как потери, утечки, взаимные наводки. Подобный подход дал возможность при описании упругого элемента применить ячейку, состоящую всего из четырех компонентов. Параметры ячейки определялись сравнением выражений, полученных на основе законов Ома и Гука. В работе [15] Е.Г. Кузовков обратил внимание на то, что при моделировании напряженно-деформированного состояния упругих тел можно обойтись без электромеханической аналогии, если эквивалентную электрическую сеть трактовать как ориентированный граф.

Способ конструирования графовой модели, ее конфигурация, применение специальным образом сконструированных матриц для вывода определяющей системы уравнений применительно к плоской и осесимметричной задачам теории упругости предложены Е.Г.Кузовковым и подробно изложены в [15–20]. В работе [21] на основе графовой модели построен двумерный сингулярный элемент для расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек разреза. Использованию графowego метода для анизотропных и неоднородных сред посвящены работы [22, 23]. Графовая модель упругой среды в полярной системе координат рассматривалась в [24].

В работе [25] в качестве дискретной модели трехмерного упругого тела в декартовой системе координат используется ориентированный граф как идеализация гипотетических приборов, необходимых для измерения деформированного состояния тела. В этой работе приведено описание элементарной ячейки – подграфа, соответствующего одному элементу, полученному при разбиении исходной области на мелкие части.

При определении конфигурации элементарной ячейки, так же как предложено в [25], «область, занятую телом, покрываем сетью координатных плоскостей $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, между узлами которых устанавливаем гипотетические измерители, определяю-

щие абсолютные нормальные деформации δ_{xx} , δ_{yy} , δ_{zz} и деформации δ_{yx} , δ_{xy} , δ_{zx} , δ_{xz} , δ_{zy} , δ_{yz} , обусловленные сдвигом. Полученную сеть измерителей преобразовываем в граф, представляя каждый из приборов дугой, а узлы, между которыми осуществлялось измерение, – вершинами графа. При этом вместо собственно измерителя будем ставить символ, отражающий природу измеряемой величины. В результате получаем элементарную ячейку прямоугольного шестигранного элемента, имеющую 36 дуг и 24 вершины и состоящую из трех компонент (рис. 1):

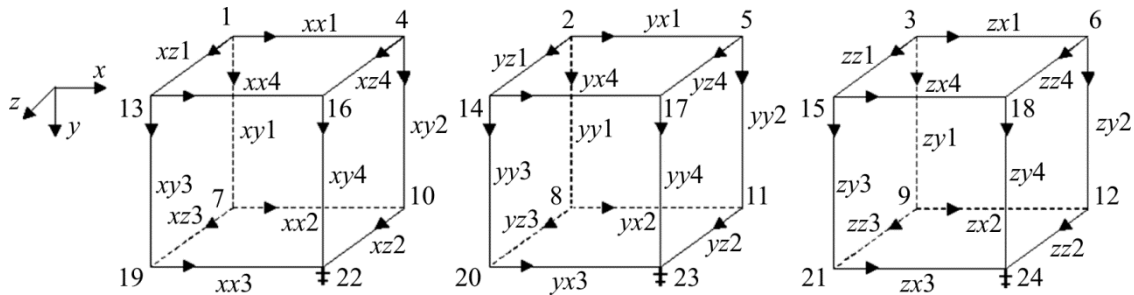


Рис. 1. Элементарная ячейка, состоящая из трех компонент

Fig. 1 An elementary cell consisting of three components

Вершины с номерами 22, 23, 24 – корни подграфов соответствующих компонент элементарной ячейки. Каждая из дуг графа отображает одну из следующих пар параллельных и последовательных переменных:

$$(\delta_{xx}, f_{xx}), (\delta_{yy}, f_{yy}), (\delta_{zz}, f_{zz}), (\delta_{yx}, f_{yx}), (\delta_{xy}, f_{xy}),$$

$$(\delta_{zx}, f_{zx}), (\delta_{xz}, f_{xz}), (\delta_{zy}, f_{zy}), (\delta_{yz}, f_{yz}),$$

где f_{xx} , f_{yy} , f_{zz} и f_{yx} , f_{xy} , f_{zx} , f_{xz} , f_{zy} , f_{yz} – нормальные и тангенциальные внутренние силы (обобщенные напряжения). Таким образом, дугам элементарной ячейки соответствует следующая пара векторов:

$$\{\mathbf{f}\}_c^t = \{f^{xx1}, \dots, f^{xx4}, f^{yy1}, \dots, f^{yy4}, \dots, f^{yz1}, \dots, f^{yz4}\},$$

$$\{\mathbf{\delta}\}_c^t = \{\delta_{xx1}, \dots, \delta_{xx4}, \delta_{yy1}, \dots, \delta_{yy4}, \dots, \delta_{yz1}, \dots, \delta_{yz4}\}.$$
(1)

где символ t обозначает операцию транспонирования, а индекс c указывает на принадлежность переменных отдельной элементарной ячейке.

Использование в качестве инварианта перехода к модели энергию деформации элемента среды позволило в [25] получить матрицу жесткости для восьмиузлового шестигранного прямоугольного упругого элемента с 24 степенями свободы при линейной аппроксимации деформаций.

В данной работе рассматривается метод построения определяющей системы, описывающей связанное пространственное тело. Он основан на объединении описаний отдельных элементов, полученных в [25], в описание связанного тела, которое осуществляется с помощью матриц, характеризующих структуру графа. Решение полученной системы позволяет определить напряженно-деформированное состояние упругого тела.

1. Матричное представление структурных элементов графа

В анализе напряженно-деформированного состояния упругого тела на основе графовой модели используются разнообразные структурные элементы. Поскольку терминология теории графов до конца не стандартизирована, дадим определения основных используемых ниже понятий [5, 26–28].

Маршрут – конечная последовательность необязательно различных дуг, у которых одна из вершин первой дуги является вершиной второй, оставшаяся вершина второй – вершиной третьей и т.д. Путь – незамкнутый ориентированный маршрут, не содержащий повторяющихся дуг. Граф называется связным, если в нем существует путь между каждой парой вершин. Контур графа – замкнутый ориентированный маршрут, не содержащий повторяющихся дуг. Дерево – связанный подграф, не содержащий контуров. Остовное дерево – дерево, содержащее все вершины исходного графа. Дуги дерева называются ветвями. Хорды – дуги графа, не принадлежащие дереву. Компонента графа – максимально связный подграф этого графа. Если исходный граф состоит из нескольких компонент, то деревья компонент образуют лес. Вершина является корнем дерева, если из нее существует ориентированный путь по всем остальным вершинам этого дерева. Базисный контур – контур, образованный хордой и теми ветвями дерева, которые составляют единственный путь между ее концевыми вершинами.

Число линейно независимых базисных контуров равно числу хорд графа и определяется формулой $\mu(G) = m - n + k$, где $\mu(G)$ – цикломатическое число; m – число дуг; n – число вершин; k – число компонент графа.

При изучении структурных связей, порождаемых графом, удобно использовать матричный аппарат.

Рассмотрим матрицы, задающие отношения инцидентности между дугами, с одной стороны, и вершинами, путями, хордами и контурами – с другой [5,6]. Расположение строк и столбцов в этих матрицах определяется номером вершин и обозначением дуг графа.

Матрица инцидентности. Матрица инцидентности $[A]$ ориентированного графа, имеющего n вершин и m дуг, является матрицей размером $n \times m$ с элементами a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), определяемыми следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга инцидентна } i \text{ вершине и выходит из нее,} \\ 0, & \text{если } j\text{-я дуга не инцидентна } i \text{ вершине,} \\ -1, & \text{если } j\text{-я дуга инцидентна } i \text{ вершине и входит в нее.} \end{cases}$$

Ранг матрицы $[A]$ равен $n-k$, где k – число компонент графа и совпадает с рангом графа rk . Строки матрицы инцидентности соответствуют вершинам, которые остаются изолированными при удалении дуг, перечисленных в соответствующих строках. Если оставить невырезанными корневые вершины, то получим усеченную матрицу инцидентности. Строки в этой матрице перечислены в порядке возрастания номеров вершин от 1 до 21, столбцы соответствуют дугам графа в порядке $xx1, yy1, zz1, xx2, yy2, zz2, xx3, yy3, zz3, xx4, yy4, zz4, xy1, yx1, xz1, zx1, yz1, zy1, xy2, yx2, xz2, zx2, yz2, zy2, xy3, yx3, xz3, zx3, yz3, zy3, xy4, yx4, xz4, zx4, yz4, zy4$.

Матрица корневых путей. Матрицей корневых путей остовного дерева $[P]$ ориентированного графа называется матрица, элементы которой p_{ij} определяются по следующему правилу:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я ветвь входит в } i \text{ путь и ее направление не совпадает} \\ & \text{с положительным направлением пути,} \\ 0, & \text{если } j\text{-я ветвь входит в } i \text{ путь,} \\ -1, & \text{если } j\text{-я ветвь входит в } i \text{ путь и ее направление} \\ & \text{противоположно направлению пути.} \end{cases}$$

Матрица путей строится в соответствии с рис. 2, где изображены деревья элементарной ячейки.

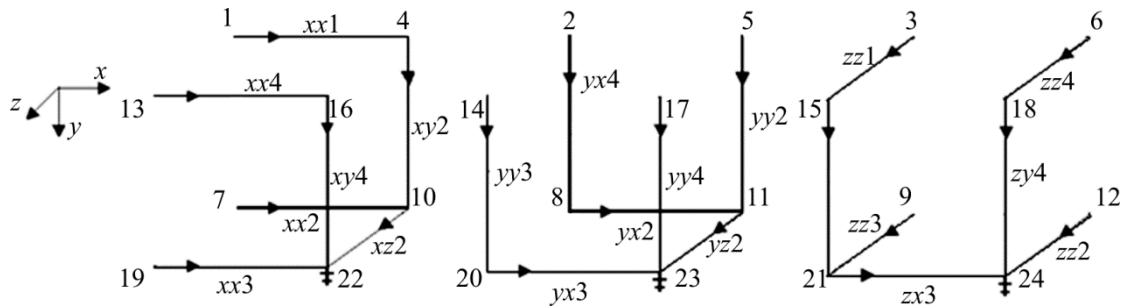


Рис. 2. Деревья элементарной ячейки
Fig. 2. The trees of the elementary cell from

Матрица путей имеет размер $rk \times m$. Строки матрицы путей соответствуют вершинам, из которых начинается путь к корню, столбцы – дугам, образующим путь. За положительное направление пути принимаем направление от вершины к корню. Каждый путь обозначаем индексом вершины, которую данный путь связывает с корнем. Нумерация строк и столбцов точно такая, как и в матрице инцидентности.

Матрица хорд. Матрицей хорд $[B]$ называется матрица с элементами b_{ij} , где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга является хордой, входящей} \\ & \text{в } i \text{ базисный контур,} \\ 0, & \text{если } j\text{-я дуга является ветвью или хордой,} \\ & \text{не входящей в } i \text{ базисный контур.} \end{cases}$$

Матрица хорд имеет ранг, равный цикломатическому числу $\mu(G) = m - n + k$, ее размер – $\mu(G) \times m$. В матрице хорд индексация строк и столбцов такая же, как у матрицы базисных контуров. Элементы матрицы $[B]$, стоящей на пересечении строк и столбцов с нумерацией $xu1, yx1, xz1, zx1, yz1, zy1, zx2, zy2, xu3, xz3, yz3, yx4, xz4, zx4, yz4$, равны единице, а остальные равны нулю.

Матрица базисных контуров. Матрицей базисных контуров $[C]$ ориентированного графа называется матрица, элементы c_{ij} которой определяются так:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга входит в } i \text{ базисный контур} \\ & \text{и совпадает с его направлением,} \\ 0, & \text{если } j\text{-я дуга не входит в } i \text{ базисный контур,} \\ -1, & \text{если } j\text{-я дуга входит в } i \text{ базисный контур} \\ & \text{и противоположна по направлению.} \end{cases}$$

Каждый базисный контур содержит только одну хорду и те ветви дерева, которые кратчайшим путем связывают ее вершины. Направление базисного контура задается направлением определяющей хорды. Ранг матрицы базисных контуров определяется линейно независимыми контурами, их число $\mu(G) = m - n + k$, т.е. совпадает с цикломатическим числом графа. Размер матрицы контуров [C] равен $\mu(G) \times m$. Контур матрицы [C] упорядочены согласно выбору задающих их хорд. Порядок расположения строк соответствует хордам $xy1, yx1, xz1, zx1, yz1, zy1, zx2, zy2, xy3, xz3, yz3, yx4, xz4, zx4, yz4$, столбцы – дугам графа с прежней индексацией.

В трехмерной декартовой системе координат транспонированная матрица [C]^t выглядит так:

$$[C]^t = \begin{bmatrix} & xy1 & yx1 & xz1 & zx1 & yz1 & zy1 & zx2 & zy2 & xy3 & xz3 & yz3 & yx4 & xz4 & zx4 & yz4 \\ xx1 & -1 & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ yy1 & & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ zz1 & & & & -1 & & -1 & & & & & & & & & & \\ xx2 & 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ yy2 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ zz2 & & & & & & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ xx3 & & & & & & & & & 1 & 1 & & & & & & \\ yy3 & & & & & 1 & & & & & & & & -1 & & & \\ zz3 & & & & & & 1 & -1 & & & & & & & & & \\ xx4 & & & 1 & & & & & & -1 & & & & & & & \\ yy4 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & 1 \\ zz4 & & & & 1 & & & & -1 & & & & & & & & \\ xy1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ yx1 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ xz1 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ zx1 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ yz1 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ zy1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ xy2 & -1 & & -1 & & & & & & & & & & -1 & & & \\ yx2 & & -1 & & & -1 & & & & & & & -1 & & & & \\ xz2 & & & -1 & & & & & & & & -1 & & & -1 & & \\ zx2 & & & & & & & 1 & & & & & & -1 & & & \\ yz2 & & & & & -1 & & & & & & & -1 & & & & -1 \\ zy2 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ xy3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ yx3 & & & & 1 & & & & & & & & 1 & -1 & & & \\ xz3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ zx3 & & & & -1 & & -1 & & & & & & & & & & -1 \\ yz3 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ zy3 & & & & & -1 & & -1 & & & & & & & & & -1 \\ xy4 & & & 1 & & & & & & -1 & & & & 1 & & & \\ yx4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ xz4 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ zx4 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ yz4 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ zy4 & & & & 1 & & & & -1 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

В матрице базисных контуров и ниже – в матрице линейных комбинаций базисных контуров – записаны только ненулевые элементы.

Заметим, что в третьем, четвертом и пятом столбцах матрицы [C]^t число отличных от нуля элементов больше четырех. С увеличением числа элементов, на которые рассечено тело, растет количество дуг графа, и появляются столбцы, содержащие большее число единиц (с тем или иным знаком). Это усложняет процесс программирования и, кроме того, ухудшает

точность вычислений. В то же время число отличных от нуля элементов в столбцах матрицы $[C]^t$ можно сделать равным четырем при любой степени декомпозиции. Базисные контуры, которые содержат только одну хорду и три ветви, остаются без изменения. В остальных случаях следует перейти от базисных контуров к их линейным комбинациям.

Например, из рис. 2, видно, что в базисный контур C_{xz1} входят дуги $xz1, xx4, xy4, -xz2, -xy2, -xx1$, а в контур C_{xz4} – дуги $xz4, xy4, -xz2, -xy2$.

Разность этих базисных контуров даст контур \bar{C}_{xz1} , который включает в себя дуги $xz1, xx4, -xz4, -xx1$. Таким образом, контуры, полученные линейной комбинацией базисных, содержат две хорды и две ветви. Одна хорда имеет положительное направление и принимается в качестве определяющей данный контур, вторая хорда входит в контур с отрицательным знаком. В результате получим транспонированную матрицу $[\bar{C}]^t$ линейных комбинаций базисных контуров:

$$[\bar{C}]^t = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & xy1 & yx1 & xz1 & zx1 & yz1 & zy1 & xz2 & zx2 & yz2 & xy3 & yx3 & xz3 & zx3 & yz3 & zy3 & xz4 & zx4 & yz4 & zy4 \\ \hline xx1 & -1 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ yy1 & & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ zz1 & & & -1 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ xx2 & 1 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\ yy2 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ zz2 & & & & & & & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ xx3 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ yy3 & & & & & 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ zz3 & & & & & & 1 & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ xx4 & & & 1 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ yy4 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & 1 & \\ zz4 & & & & 1 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ xy1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ yx1 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ xz1 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ zx1 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ yz1 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ zy1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ xy2 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & & & & -1 \\ yx2 & & -1 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ xz2 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & & & -1 & & \\ zx2 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ yz2 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ zy2 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ xy3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & -1 & & & \\ yx3 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ xz3 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ zx3 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & & & & & -1 \\ yz3 & & & & & -1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ zy3 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ xy4 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & & 1 & & & \\ yx4 & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ xz4 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ zx4 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ yz4 & 1 \\ zy4 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

Структурные матрицы для элементарной ячейки в двумерном случае представлены в [20, 23].

2. Свойства топологических матриц. Построение несингулярных матриц преобразования

Между топологическими матрицами существуют взаимные связи, выражающие свойства ортогональности или позволяющие по одной из них определить другую [6].

Известно, что матрицы инцидентности и контуров обладают свойством ортогональности:

$$[A][C]^t = 0, [C][A]^t = 0. \quad (2)$$

Кроме того, из определения матрицы корневых путей остовного дерева и матрицы хорд следует

$$[B][P]^t = 0, [P][B]^t = 0. \quad (3)$$

Действительно, в столбцах матрицы $[P]$, соответствующих хордам, стоят нули, а единицы расположены в столбцах, соответствующих ветвям, в то время как в матрице $[B]^t$ в строках, соответствующих хордам, стоят единицы, а ветвям – нули.

С другой стороны, произведение матриц инцидентности и путей основного дерева, а также хорд и контуров дает единичную матрицу:

$$[A][P]^t = [I], [P][A]^t = [I]. \quad (4)$$

$$[B][C]^t = [I], [C][B]^t = [I]. \quad (5)$$

Ранг каждой из матриц $[A]$ и $[P]$ равен рангу графа rk , а ранг матриц $[B]$ и $[C]$ равен цикломатическому числу μ . Это позволяет сконструировать квадратные матрицы размером $m \times m$, так как $rk + \mu = m$, а число столбцов у матриц $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[P]$ равно m . Для этого следует применить операцию сочленения двух матриц по вертикали [28], которая заключается в простом приписывании второй матрицы к первой снизу. Таким образом, сначала располагаются все строки первой матрицы, а затем второй – без нарушения их порядка в исходных матрицах. В результате можно построить две квадратные матрицы

$$[A_B] = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, [P_C] = \begin{bmatrix} P \\ C \end{bmatrix}.$$

Матрицу $[A_B]$ можно назвать матрицей дополнений, так как она построена с помощью матрицы инцидентности $[A]$, содержащей разрезы, дуги которых дополняют множество изолированных вершин до исходного графа, а матрица $[B]$ включает в себя хорды, дополняющие ветви остовного дерева до исходного графа.

Матрицу $[P_C]$ назовем матрицей маршрутов, поскольку она составлена из матрицы корневых путей $[P]$ и матрицы контуров $[C]$, т.е. с использованием матриц открытых и замкнутых маршрутов.

Из правил оперирования с блочными матрицами вытекают соотношения

$$[A_B]^t = [A^t, B^t], [P_C]^t = [P^t, C^t].$$

Учитывая свойства (2)–(5), получаем

$$[A_B][P_C]^t = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [P^t, C^t] = \begin{bmatrix} AP^t & AC^t \\ BP^t & BC^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = [I].$$

Отсюда следует, что матрицы $[\mathbf{A}_B]$ и $[\mathbf{P}_C]^t$ взаимно обратные, т.е.

$$[\mathbf{P}_C]^t = [\mathbf{A}_B]^{-1}, [\mathbf{A}_B]^t = [\mathbf{P}_C]^{-1}. \quad (6)$$

Заметим, что строки и столбцы матриц $[\mathbf{A}_B]$ и $[\mathbf{P}_C]$ имеют одинаковые обозначения. Поскольку связь (6) между этими матрицами получена не с помощью математического обращения, а путем искусственного построения, то при выполнении операции сочленения необходимо специально следить за соответствием распределения строк и столбцов в каждой из матриц, обеспечивая одинаковый порядок.

3. Уравнения графовой модели тела

Тело, представленное в виде отдельных элементов, и соответствующая ему совокупность элементарных ячеек описывается уравнением

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{K}]\{\delta\}. \quad (7)$$

Здесь $\{\mathbf{f}\}$ и $\{\delta\}$ – векторы внутренних сил и деформаций.

$$\{\mathbf{f}\}^t = \{\mathbf{f}_{1c}^t, \mathbf{f}_{2c}^t, \dots, \mathbf{f}_{nc}^t\}, \quad \{\delta\}^t = \{\delta_{1c}^t, \delta_{2c}^t, \dots, \delta_{nc}^t\},$$

причем $\{\mathbf{f}\}_{ic}^t$, $\{\delta\}_{ic}^t$ определяются (1), $[\mathbf{K}]$ – глобальная несвязная матрица жесткости тела, представленного в дискретном виде:

$$[\mathbf{K}] = \text{diag}[\mathbf{K}_{1c}, \mathbf{K}_{2c}, \dots, \mathbf{K}_{nc}],$$

где n – число ячеек, образующих граф, а $[\mathbf{K}]_{ic}$ определяется формулой (29) из работы [25].

Уравнение (7) связывает внутренние силы с деформациями элементов и не позволяет в общем случае определить напряженно-деформированное состояние тела, поскольку, как правило, заданными бывают внешние силы и перемещения.

Для получения уравнений связного тела, следуя [18], используем преобразования обобщенных координат, описывающих разрезанное на элементы и связное тело. Вводим преобразования переменных с помощью квадратных матриц $[\mathbf{A}_B]$ и $[\mathbf{P}_C]$:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{A}_B]\{\mathbf{f}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \{\mathbf{f}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{f} \\ \mathbf{B}\mathbf{f} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

$$\{\Delta\} = [\mathbf{P}_C]\{\delta\} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \{\delta\} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\delta \\ \mathbf{C}\delta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Поскольку матрицы дополнений и маршрутов несингулярны, то с учетом (6) возможны обратные преобразования, которые не требуют процедур численного обращения:

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{A}_B]^{-1}\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{P}_C]^t\{\mathbf{F}\},$$

$$\{\delta\} = [\mathbf{P}_C]^{-1}\{\Delta\} = [\mathbf{A}_B]^t\{\Delta\}. \quad (10)$$

Подставив в правую часть (7) значения $\{\delta\}$ из (10), а также умножив это уравнение слева на $[\mathbf{A}_B]$, получаем уравнение, описывающее связное тело:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{A}_B][\mathbf{K}][\mathbf{A}_B]^t\{\Delta\}, \quad (11)$$

где

$$[\mathbf{A}_B][\mathbf{K}][\mathbf{A}_B]^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AKA}' & \mathbf{AKB}' \\ \mathbf{BKA}' & \mathbf{BKB}' \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что уравнение (11), описывающее напряженно-деформированное состояние дискретной модели, несет информацию о структуре графа и физическом законе Гука. Дифференциальные уравнения равновесия и совместности деформаций при выводе (11) не использовались. В то же время для построенной графовой модели, как показано в [25], уравнения равновесия и совместности деформаций обеспечиваются автоматически как следствие вершинного и контурного законов Кирхгофа [6, 27], которые имеют фундаментальный характер.

Рассмотрим общесистемный вектор сил (8). Его член $[\mathbf{A}]\{\mathbf{f}\}$ на основании вершинного закона [5,15] представляет собой вектор вершинных переменных $\{\mathbf{F}\}_e$, которые интерпретируются как заданные внешние силы. Член $[\mathbf{B}]\{\mathbf{f}\}$ выделяет часть дуг графа $\{\mathbf{f}\}_b$, являющихся хордами, которые интерпретируются как неизвестные внутренние силы.

Вектор общесистемных перемещений (9) включает в себя член $[\mathbf{P}]\{\delta\}$, который представляет собой перемещения узловых точек в глобальной системе координат $\{\mathbf{U}\}$. На основании контурного закона [6,18] член $[\mathbf{C}]\{\delta\}$ равен нулю.

В результате уравнение (11) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{f}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AKA}' & \mathbf{AKB}' \\ \mathbf{BKA}' & \mathbf{BKB}' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует

$$\{\mathbf{F}\}_e = [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^t \{\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}_s] \{\mathbf{U}\}.$$

Решение последнего уравнения получаем в виде

$$\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}_s]^{-1} \{\mathbf{F}\}_e.$$

По известным перемещениям определяем деформации, а затем с помощью закона Гука находим напряжения, действующие в каждом элементе.

4. Численные результаты

В качестве примера, иллюстрирующего предлагаемый метод, приведем задачу из [29]. В ней рассматривается расчет напряженного состояния для пространственной структуры, изображенной на рис. 3. Как указано в [29], эта расчетная схема может быть использована для моделирования шахтной выработки для поддержания кровли при проведении горных работ.

На рис. 3 показана расчетная схема и дискретизация структуры на шестигранные прямоугольные элементы. Изображена восьмая часть расчетной области. Плоскости xu , yz и zx являются плоскостями симметрии. Нормальные перемещения узлов, лежащих в плоскостях симметрии, задавались равными нулю. К нижней поверхности приложена равномерно распределенная нагрузка $p = 0,1$ МПа, на верхней поверхности исключены вертикальные перемещения. Другие грани конструкции свободны от нагрузки. Размеры, как и в [29], верхнего

параллелепипеда $20 \times 20 \times 40$ (см), нижнего – $60 \times 60 \times 80$ (см). В [29] приведены решения рассматриваемой задачи методом граничных элементов (МГЭ), методом конечных элементов с использованием модифицированных гексаэдров Айронса-Зенкевича, а в работе [30] с помощью шестигранного прямоугольного конечного элемента с применением линейных базисных функций для аппроксимации напряжений. Анализируется концентрация напряжений σ_y/p , вдоль диагонали плоскости соединения кровли и крепи. В расчетах число граничных сегментов в зависимости от версии программ МГЭ составляло 16 либо 44, в МКЭ сетка разбиения на элементы редкая с использованием 274 степеней свободы для ее узлов [29]. Авторы отмечают, что дискретизация слишком грубая и требует более детального описания. Анализ напряжений методом КЭ в [30] проведен при разбиении нижней части конструкции на 196 элементов, верхней – на 64 элемента. В графовом подходе верхний параллелепипед разбивается на 150 элементов, нижний – 550 элементов. На рис. 4 показаны графики напряжений σ_y/p , полученные МКЭ, МГЭ и графовым методом. Заметим, что, как и в [29, 30], отсчет расстояния ведется от вершины угла, лежащего на ребре крепи.

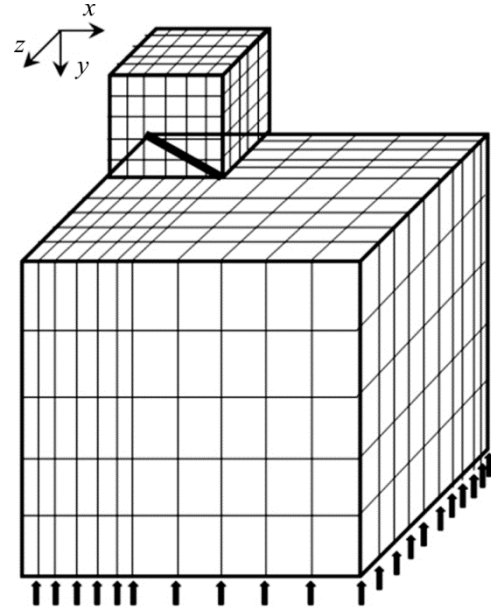


Рис. 3 Геометрия задачи
Fig. 3. Geometry of the problem

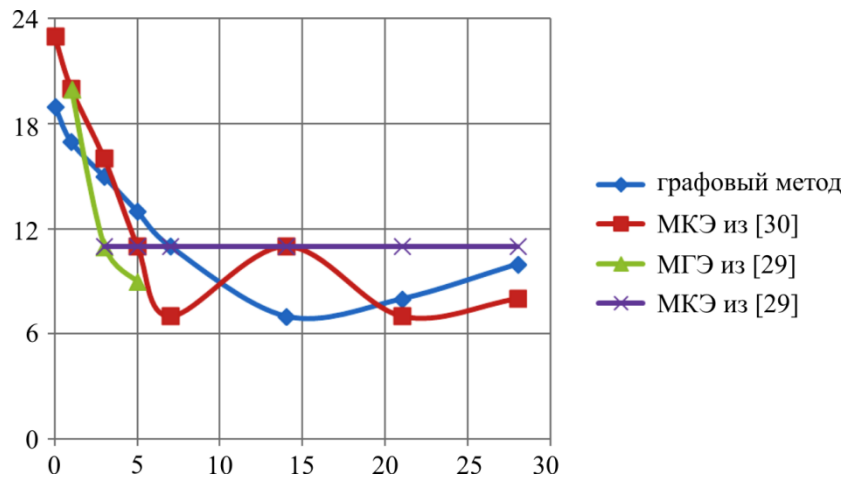


Рис. 4. Распределение напряжений σ_y/p , по диагонали сечения крепи
Fig. 4. The σ_y/p stresses distribution along the diagonal cross section of the lining

Как видно из графиков, результаты расчетов графовым методом согласуются с общей тенденцией распределения напряжений из [29, 30], позволяя при этом получить более точное решение.

Библиографический список

1. Применение теории графов связей в технике / под ред. Кэрнопа Д., Розенберга Р. – М.: Мир, 1974. – 96 с.
2. Ильинский Н.Ф., Цаценкин В.К. Приложение теории графов к задачам электромеханики. – М.: Энергия, 1968. – 200 с.
3. Кениг Г., Блекуэлл В. Теория электромеханических систем. – М.: Энергия, 1965. – 424 с.
4. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и применение. – Киев: Наукова думка, 1984. – 384 с.
5. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974. – 368 с.
6. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – 454 с.
7. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
8. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Советское радио, 1978. – 720 с.
9. Kron G. Equivalent circuits of the elastic field // J. Appl. Mech. – 1944. – Sept. – Vol. 11. – P. A149-A161.
10. Kron G. Tensorial analysis and equivalent circuitry of elastic structures // J. Franklin Inst. – 1944. – Vol. 238. – No. 6. – P. 399–442.
11. Hetenyi M. Handbook of Experimental Stress Analysis. – Wiley, New York, 1950. – P. 789–807.
12. Кузовков Е.Г. Применение метода элементарных ячеек для численного решения задач теории упругости. Сообщ. 1. Общие положения метода элементарных ячеек // Пробл. прочн. – 1982. – № 12. – С. 104–107. DOI:10.1007/BF00768663
13. Кузовков Е.Г. Применение метода элементарных ячеек для численного решения задач теории упругости. Сообщ. 2. Сетевая модель упругого тела // Пробл. прочн. – 1983. – № 2. – С. 37–43. DOI:10.1007/BF01523469
14. Кузовков Е.Г. Сетевая модель упругого тела с источниками граничных нагрузок. Сообщ. 3 // Пробл. прочн. – 1983. – № 10. – С. 63–68. DOI:10.1007/BF01523322
15. Кузовков Е.Г. Конфигурация и параметры графовой модели упругого тела // Пробл. прочн. – 1986. – № 4. – С. 98–103. DOI:10.1007/BF01524081
16. Кузовков Е.Г. Уравнения состояния графовой модели упругого тела // Пробл. прочн. – 1986. – № 5. – С. 112–117. DOI:10.1007/BF01522789
17. Kuzovkov E.G. Axisymmetric Graph Model of an Elastic Solid // Пробл. прочн. – 1996. – № 6. – С. 83–103. DOI:10.1007/BF02209319
18. Кузовков Е.Г. Графовая модель упругой среды в декартовой системе координат // Пробл. прочн. – 1993. – № 12. – С. 60–70. DOI:10.1007/BF00774638
19. Кузовков Е.Г. Графовая модель упругого тела в смешанных переменных // Пробл. прочн. – 1986. – № 6. – С. 88–92. DOI:10.1007/BF001523964
20. Кузовков Е.Г., Тырымов А.А. Графовые модели в плоской и осесимметричной задачах теории упругости. – Волгоград: Изд-во ВолгГТУ, 2010. – 128 с.
21. Тырымов А.А. Сингулярный элемент графовой модели упругой среды в декартовой системе координат // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 125–136. DOI:org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47
22. Тырымов А.А. Осесимметричная графовая модель упругого тела с переменным модулем упругости // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 103–114. DOI:10.14498/vsgtu914
23. Тырымов А.А. Численное моделирование и анализ напряжённо-деформированного состояния анизотропного массива горных пород на основе графового метода // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2012. – № 5. – С. 52–66. DOI:10.1134/s1062739148050061
24. Тырымов А.А. Графовая модель упругой среды в полярной системе координат // Изв. вузов. Машиностроение. – 1999. – № 1. – С. 3–15.

25. Тырымов А.А. Графовая модель трехмерных упругих тел в декартовой системе координат // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 282–303. DOI:10.15593/perm.mech/2016.3.19
26. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. – Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1999. – 291 с.
27. Татт У. Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
28. Зыков А.А. Основы теории графов.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 384 с.
29. Бенерджи П., Батерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М: Мир, 1984. – 494 с.
30. Тюкалов Ю.Я. Решение объемных задач теории упругости методом конечных элементов в напряжениях // Изв. вузов. Строительство. – 2006. – № 2. – С. 19–26.

References

1. Primenenie teorii grafov sviazei v tekhnike (pod red. Kernopa D., Rozenberga R.) [The application of graph theory in engineering]. Moscow, *Mir*, 1974, 96 p.
2. Il'inskii N.F., Tsatsenkin V.K. Prilozhenie teorii grafov k zadacham elektromekhaniki [The application of graph theory to problems in electrical engineering]. Moscow, *Energiia*, 1968, 200 p.
3. Kenig G., Blekuell V. Teoriia elektromekhanicheskikh system [The theory of electromechanical systems]. Moscow, *Energiia*, 1965, 424 p.
4. Tsvetkovich D., Dub M., Zakhs Kh. Spektry grafov. Teoriia i primeneniye [Spectra of Graphs. Theory and Application]. *Kiev, Naukova dumka*, 1984, 384 p.
5. Basaker R., Saati T. Konechnye grafy i seti [Finite diagrams and networks]. Moscow, *Nauka*, 1974, 368 p.
6. Svami M., Thulasiraman K. Graphs, Networks and Algorithms. New York: *John Wiley*, 1981, 592 p.
7. Kron G. Diakoptics – Piecewise Solutions of Large Scale Systems. London, *MacDonald*, 1963.
8. Kron G. Tensor Analysis of Networks. London, *MacDonald*, 1965.
9. Kron G. Equivalent circuits of the elastic field. *J. Appl. Mech.*, 1944, Sept., vol. 11, pp. A149-A161.
10. Kron G. Tensorial analysis and equivalent circuitry of elastic structures. *J. Franklin Inst.*, 1944. vol. 238, no. 6, pp. 399-442.
11. Hetenyi M. Handbook of Experimental Stress Analysis, Wiley, New York, 1950, pp. 789-807.
12. Kuzovkov E.G. Use of the method of elementary cells for numerical solutions to problems of elasticity theory. Report 1. General assumptions of cells. *Strength of Materials*, 1982, vol. 14, is. 12, pp. 1709-1712. DOI: 10.1007/BF 00767663.
13. Kuzovkov E.G. Use of the method of elemental cells for numerical solution of problems of the theory of elasticity. Report 2. Network model of an elastic body. *Strength of Materials*, 1983, vol.15, is. 2, pp. 195-202. DOI: 10.1007/BF01523469.
14. Kuzovkov E.G. Network model of an elastic body with sources of boundary loads. Report 3. Network model of an elastic body. *Strength of Materials*, 1983, vol. 15, is. 10, pp. 1427-1435. DOI: 10.1007/BF01523322.
15. Kuzovkov E.G. Configuration and parameters of the graph models of an elastic body. *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, no. 4, pp. 528-534. DOI: 10.1007/BF01524081.
16. Kuzovkov E.G. Equations of state the graph model of an elastic body. *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, no. 5, pp. 698-704. DOI: 10.1007/BF01522789.
17. Kuzovkov E.G. Axisymmetric graph model of an elastic solid. *Strength of Materials*, 1996, vol. 28, no. 6, pp. 470-485. DOI: 10.1007/BF02209319.
18. Kuzovkov E.G. Graph model of elastic medium in the Cartesian system of coordinates. *Strength of Materials*, 1993, vol. 25, no. 12, pp. 904-914. DOI: 10.1007/BF00774638.
19. Kuzovkov E.G. Graph model of an elastic body in mixed variables. *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, no. 6, pp. 807-813. DOI:10.1007/BF001523964
20. Kuzovkov E.G., Tyrymov A.A. Grafovye modeli v ploskoj i osesimmetrichnoj zadachah teorii uprugosti [Graph model in plane and axisymmetric problems of the theory of elasticity]. Volgograd: *IUNL VolgGTU*, 2010, 128 p.
21. Tyrymov A.A. Singuljarnyj jelement grafovoj modeli uprugoj sredy v dekartovoj sisteme koordinat [A singular element of graph model of an elastic medium in a cartesian coordinate system]. *Vychislitel'naja*

mehnika sploshnyh sred – Computational Continuum Mechanics, 2011, vol. 4, no. 4, pp.125-136. DOI: org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47.

22. Tyrymov A.A. Osesimmetrichnaja grafovaja model' uprugogo tela s peremennym modulem uprugosti [Axisymmetric graph model of an elastic solid with varying modulus of elasticity]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Serija: Fiziko-matematičeskie nauki*, 2012, no. 2 (27), pp. 103-114. DOI: 10.14498/vsgtu914.

23. Tyrymov A.A. Numerical modeling and analysis of the stress-strain state in an anisotropic rock mass by the method of graphs. *Journal of Mining Science*, 2012, vol. 48, is. 5, pp. 812-824. DOI: 10.1134/s1062739148050061.

24. Tyrymov A.A. Grafovaja model' uprugoj sredy v poljarnoj sisteme koordinat [The graph models of an elastic medium in polar coordinates]. *Izvestija vuzov. Mashinostroenie*, 1999, no. 1, pp. 3-15.

25. Tyrymov A.A. Evalua Graph model of three –dimensional elastic solids in Cartesian coordinates. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016, no. 3. pp. 282-303. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.19

26. Evstigneev V.A., Kas'ianov V.N. Tolkovy slovar' po teorii grafov v informatike i programmirovanii [Explanatory dictionary of graph theory in computer science and programming]. *Novosibirsk, Nauka. Sib. predpriiatie RAN*, 1999, 291 p.

27. Zykov A.A. Osnovy teorii grafov [Fundamentals of the Graph Theory]. *Moscow, Nauka. Fizmatlit*, 1987, 384 p.

28. Tatt U. Teoriia grafov [Graph theory]. *Moscow, Mir*, 1988, 424 p.

29. Benerdzhii P., Baterfild R. Metod granichnykh elementov v prikladnykh naukakh [Boundary Element Methods in Engineering Science]. *Moscow, Mir*, 1984, 494 p.

30. Tiukalov Iu.Ia. Reshenie ob"emnykh zadach teorii uprugosti metodom konechnykh elementov v napriazheniiakh [Solution of volumetric theory of elasticity problems by way of finite elements in stresses]. *Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo*, no. 2, 2006, pp. 19-26