Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевая задача несимметричной деформации цилиндрического резервуара с жидкостью в температурном поле // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 60–77. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.04

Gur'jyanov N.G., Tyuleneva O.N. Boundary value problem of nonsymmetrical deformation of cyliundrical vessel with liquid in thermal field. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no.2, pp. 60-77. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.04

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2017
PNRPU MECHANICS BULLETIN
http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI 10.15593/perm.mech/2017.2.04
УДК 539.3

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 марта 2017 г.
Принята: 26 июня 2017 г.
Опубликована: 30 июня 2017 г.

Ключевые слова:

температура, теория упругости, несвязанная задача, перемещения.

АННОТАЦИЯ

Строится точное решение несимметричной краевой задачи теории упругости для цилиндрического резервуара с жидкостью, находящегося в температурном поле. Термоупругая задача несвязанная, то есть вначале решается уравнение теплопроводности, затем линейная задача теории упругости для кругового цилиндра в перемещениях.

Следует отметить, что до настоящего времени точных решений несимметричной задачи теории упругости в цилиндрической системе координат с учетом температурного поля не существовало. Это объясняется сложностью системы разрешающих уравнений – высокий порядок, переменные коэффициенты. Авторам статьи удалось построить интегрируемые комбинации решаемых уравнений вначале без учета, в настоящей работе – с учетом температурных членов. Для этого в систему разрешающих уравнений вместо соотношения, связывающего объемную деформацию с перемещениями точек цилиндра, было введено дополнительное уравнение относительно объемной деформации. С учетом уравнения теплопроводности удалось свести его к уравнению, полученному ранее без учета температурных членов. В результате задача свелась к последовательному решению каждого уравнения в отдельности. Поскольку дополнительное уравнение было получено дифференцированием остальных уравнений, порядок системы разрешающих уравнений увеличился, что привело к появлению в решении «лишних» постоянных интегрирования. Авторами доказано, что использование в качестве дополнительного условия замененного соотношения между объемной деформацией и перемещениями устраняет этот недостаток.

Построено точное решение краевой задачи для цилиндрического резервуара с жидкостью при условии линейной зависимости температуры и перемещений цилиндра вдоль его оси. Рассмотрен числовой пример, в котором температура внешней боковой поверхности цилиндра меняется только в окружном направлении.

© **Гурьянов Николай Георгиевич** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: gng.ggb@mail.ru
Тюленева Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: tdv.ton@mail.ru

Nikolay G. Gur'jyanov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: gng.ggb@mail.ru
Olga N. Tyuleneva – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: tdv.ton@mail.ru

BOUNDARY VALUE PROBLEM OF NONSYMMETRICAL DEFORMATION OF THE CYLINDRICAL VESSEL WITH LIQUID IN THE THERMAL FIELD

N.G. Gur'jyanov, O.N.Tyuleneva

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 March 2017
Accepted: 26 June 2017
Published: 30 June 2017

Keywords:
temperature, elasticity theory, unlinked problem, displacements.

ABSTRACT

We framed a precise solution of the nonsymmetrical boundary value problem of the elasticity theory for a cylindrical vessel with liquid placed in the thermal field. The thermoelastic problem is unlinked, i.e. at first we solve the thermal conductivity equation, and then the linear problem of the elasticity theory for a circular cylinder in displacements.

It should be noted that until the present time there were no precise solutions of nonsymmetrical problems of the elasticity theory in the cylindrical coordinate system with a consideration of the thermal field. It is explained by the complexity of the system of resolvent equations, such as high order, variable coefficients. The authors of the article managed to form integrable combinations of resolvent equations in this work, at first by taking no account and then considering the thermal fields. For this purpose an additional equation related to a volumetric deformation was introduced into the system of resolvent equations instead of the relator connecting the volumetric deformation with the movement of the cylinder points. When we took into account the heat conduction equation, we managed to gain the equation which had been obtained earlier without the consideration of the thermal elements. As a result, the problem was brought to a successive solution of each equation separately. Since the additional equation was obtained by the derivation of the rest of the equations, the order of the resolvent equations system became higher which resulted in «excess» constants of the integration. The authors proved that the use of the replaced correlation between the volumetric deformation and displacements as an additional condition eliminated this disadvantage.

We formed a precise solution of the boundary value problem for the cylindrical vessel with liquid upon the condition of the linear dependence of temperature and displacements of the cylinder along its axis. The numerical example was considered where the temperature of the external side area of the cylinder is changed in the circumferential direction.

Решением задач деформации цилиндрических конструкций в температурных и силовых полях ученые всего мира занимаются более 100 лет. Рассматривались в основном одномерные и двумерные задачи (стержни, балки, пластины, тонкие оболочки, осесимметричные задачи теории упругости, бесконечно длинные цилиндры).

К середине прошлого века были построены разрешающие уравнения, описывающие деформацию оболочек вращения, а также получены точные решения простейших задач упругости и термоупругости, являющиеся в настоящее время классическими [1–13]. Абсолютное большинство точных решений реализовано в декартовой системе координат, так как уравнения в этой системе наиболее просты. Построено несколько решений осесимметричных краевых задач теории упругости в цилиндрических и сферических координатах [21–32]. Точных решений трехмерных краевых задач теории упругости практически не было. Решены были только уравнения относительно объемной деформации цилиндра и шара [9]. Это было связано с непреодолимыми на тот момент трудностями построения интегрируемых комбинаций разрешающих уравнений как относительно перемещений, так и напряжений.

С последней четверти XX века появилось большое количество приближенных решений, в том числе и трехмерных задач, основанных на численных методах. Численные решения позволили существенно увеличить число рассматриваемых областей, в том числе сложных конфигураций. Поскольку при численном решении не важно, в какой системе координат решать краевую задачу, использовалась декартова система координат.

Интерес к аналитическим решениям задач появился, когда встал вопрос о достоверности численных решений. Проверка могла быть осуществлена либо экспериментом, что затруднительно по финансовым и иным соображениям, либо сравнением с точными решениями.

Для увеличения числа аналитических решений краевых задач появилась необходимость получать решения в иных системах координат. Однако преодолеть трудности решения уравнений и выполнения краевых условий, близких к реальным, удалось не сразу.

Привести систему разрешающих уравнений трехмерной теории упругости в цилиндрической и сферической системах координат к отдельным уравнениям относительно каждой искомой функции и проинтегрировать их удалось авторам данной статьи [14–20]. Опубликованных работ по этому направлению нет. Настоящая работа обобщает эти результаты на задачу теомоупругости.

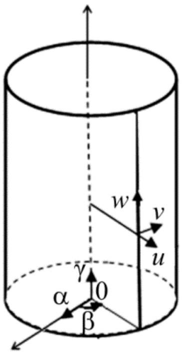

Рис.1. Цилиндрический резервуар
Fig.1. Cylindrical vessel

В цилиндрической системе координат α, β, γ рассматривается несвязанная задача термоупругости для цилиндрического резервуара с жидкостью, причем первая координата отнесена к внешнему радиусу резервуара R, третья – к его высоте H, вторая координата – есть угол поворота вдоль направляющей. Таким образом, исследуемая область $t \le \alpha \le 1, -\pi \le \beta \le \pi, 0 \le \gamma \le 1$, причем $t = \dfrac{r}{R}$, r – радиус внутренней боковой поверхности.

Система разрешающих уравнений задачи термоупругости может быть представлена следующим образом [8]:

$$\Delta T = 0,\ \Delta\theta = 0,$$

$$\Delta w + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma} - \frac{\eta}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\gamma}\right] = 0,$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)u + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \eta\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right] - \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \tag{1}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)v + \frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - \frac{\eta}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right] + \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0.$$

Здесь u, v, w – перемещения вдоль координаты α, окружном β и вдоль γ соответственно (рис. 1); θ – объемная деформация; T – температура тела; α_T – температурный коэффициент линейного расширения; E, υ – модуль упругости и коэффициент Пуассона; ρ – плотность жидкости.

$$\varepsilon = \frac{H}{R};\ \eta = 2(1+\upsilon)\alpha_T,\ f = \frac{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\rho H}{E},$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}. \tag{2}$$

Первое уравнение системы – есть уравнение теплопроводности для несвязанной задачи термоупругости, второе – уравнение относительно объемной деформации, включенное в систему разрешающих уравнений вместо соотношения

$$\theta = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(\alpha u)}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right], \tag{3}$$

используемого в дальнейшем в качестве дополнительного условия для определения значений «лишних» произвольных постоянных, появившихся в решении в результате повышения порядка системы после включения в нее уравнения $\Delta\theta = 0$ [14].

Точное решение системы (1) строится в предположении, что температура и перемещения линейны относительно координаты γ. Этот вариант встречается при исследовании деформации резервуаров, заполненных жидкостью.

Периодическое по β решение системы (1) ищется в виде

$$T(\alpha,\beta,\gamma) = T_0(\alpha,\gamma) + T_1(\alpha,\gamma)\cos\beta,\ \theta(\alpha,\beta,\gamma) = \theta_0(\alpha,\gamma) + \theta_1(\alpha,\gamma)\cos\beta,$$

$$w(\alpha,\beta,\gamma) = w_0(\alpha,\gamma) + w_1(\alpha,\gamma)\cos\beta, \tag{4}$$

$$u(\alpha,\beta,\gamma) = u_0(\alpha,\gamma) + u_1(\alpha,\gamma)\cos\beta, \quad v(\alpha,\beta,\gamma) = v_1(\alpha,\gamma)\sin\beta.$$

Замечание. Возможны другие варианты решения, когда меняются местами синусы и косинусы, а также комбинация этих решений.

После подстановки соотношений (4) в систему уравнений (1) приходим к двум системам уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)T_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\theta_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)w_0 = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\theta_0 - \eta T_0), \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right]u_0 = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\theta_0 - \eta T_0)$$

и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)T_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\theta_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)w_1 = -\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\theta_1 - \eta T_1), \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{4}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right](u_1 + v_1) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)(\theta_1 - \eta T_1),$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right](u_1 - v_1) = -\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)(\theta_1 - \eta T_1).$$

Следует отметить, что последние два уравнения системы (6) получены как сумма и разность четвертого и пятого уравнений из (1).

С учетом предположения о линейности перемещений в направлении γ считаем

$$T_m(\alpha,\gamma) = T_{m0}(\alpha) + T_{m1}(\alpha)\gamma,\ \theta_m(\alpha,\gamma) = \theta_{m0}(\alpha) + \theta_{m1}(\alpha)\gamma,$$

$$w_m(\alpha,\gamma) = w_{m0}(\alpha) + w_{m1}(\alpha)\gamma, \tag{7}$$

$$u_m(\alpha,\gamma) = u_{m0}(\alpha) + u_{m1}(\alpha)\gamma, \quad v_m(\alpha,\gamma) = v_{m0}(\alpha) + v_{m1}(\alpha)\gamma, \quad (m = 0; 1).$$

После подстановки соотношений (7) в уравнения (5) и (6) получаем серию обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате их интегрирования имеем

$$T_{00}(\alpha)=B_{00}^{1}+B_{00}^{2}\ln\alpha\,,\qquad T_{01}(\alpha)=B_{01}^{1}+B_{01}^{2}\ln\alpha\,,$$

$$\theta_{00}(\alpha)=A_{00}^{1}+A_{00}^{2}\ln\alpha\,,\quad \theta_{01}(\alpha)=A_{01}^{1}+A_{01}^{2}\ln\alpha\,,$$

$$w_{00}(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left[C_{00}^{1}+C_{00}^{2}\ln\alpha+\frac{1}{4}L_{01}^{1}\alpha^{2}+L_{01}^{2}\frac{\alpha^{2}}{4}(\ln\alpha-1)\right],$$

$$w_{01}(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{01}^{1}+C_{01}^{2}\ln\alpha\right),\tag{8}$$

$$u_{00}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{00}^{1}\alpha+D_{00}^{2}\frac{1}{\alpha}+L_{00}^{2}\alpha\ln\alpha\right],$$

$$u_{01}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{01}^{1}\alpha+D_{01}^{2}\frac{1}{\alpha}+L_{01}^{2}\alpha\ln\alpha\right].$$

Если после интегрирования определить значения u_{10}, v_{10} и u_{11}, v_{11}, то

$$T_{10}(\alpha)=B_{10}^{1}\alpha+B_{10}^{2}\frac{1}{\alpha},\quad T_{11}(\alpha)=B_{11}^{1}\alpha+B_{11}^{2}\frac{1}{\alpha},$$

$$\theta_{10}(\alpha)=A_{10}^{1}\alpha+A_{10}^{2}\frac{1}{\alpha},\quad \theta_{11}(\alpha)=A_{11}^{1}\alpha+A_{11}^{2}\frac{1}{\alpha},$$

$$w_{10}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left\{C_{10}^{1}\alpha+C_{10}^{2}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{8}L_{11}^{1}\alpha^{3}+\frac{1}{2}L_{11}^{2}\alpha\ln\alpha\right\},$$

$$w_{11}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{11}^{1}\alpha+C_{11}^{2}\frac{1}{\alpha}\right),\tag{9}$$

$$u_{10}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{10}^{1}+L_{10}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{10}^{2}\frac{1}{\alpha^{2}}+L_{10}^{2}+D_{10}^{3}+D_{10}^{4}\ln\alpha\right],$$

$$v_{10}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{10}^{1}-L_{10}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{10}^{2}\frac{1}{\alpha^{2}}+L_{10}^{2}-D_{10}^{3}-D_{10}^{4}\ln\alpha\right],$$

$$u_{11}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{11}^{1}+L_{11}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{11}^{2}\frac{1}{\alpha^{2}}+L_{11}^{2}+D_{11}^{3}+D_{11}^{4}\ln\alpha\right],$$

$$v_{11}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{11}^{1}-L_{11}^{1}\right)\alpha^{2}+D_{11}^{2}\frac{1}{\alpha^{2}}+L_{11}^{2}-D_{11}^{3}-D_{11}^{4}\ln\alpha\right].$$

Здесь A_{mn}^{k}, B_{mn}^{k}, C_{mn}^{k}, D_{mn}^{k} – постоянные интегрирования,

$$L_{mn}^{k}=A_{mn}^{k}-\eta\,B_{mn}^{k}.\tag{10}$$

С учетом соотношений (4), (7) дополнительное условие (3) приводит к тождествам

$$\theta_{00} \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\left(\alpha\, u_{00}\right)}{d\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\, w_{01}\right),\ \theta_{01} \equiv \frac{1}{R\,\alpha}\frac{d\left(\alpha\, u_{01}\right)}{d\alpha},$$

$$\theta_{10} \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\left(\alpha\, u_{10}\right)}{d\alpha} + \frac{1}{\alpha} v_{10} + \frac{1}{\varepsilon}\, w_{11}\right),\ \theta_{11} \equiv \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{d\left(\alpha\, u_{11}\right)}{d\alpha} + \frac{1}{\alpha} v_{11}\right]. \qquad (11)$$

Подставляя в первые два из них соотношения (8), получаем

$$2(1-2\upsilon)\left(A_{00}^1 + A_{00}^2 \ln\alpha\right) + 2D_{00}^1 + L_{00}^2\,(2\ln\alpha + 1) + \frac{2}{\varepsilon^2}\left(C_{01}^1 + C_{01}^2 \ln\alpha\right) \equiv 0,$$

$$2(1-2\upsilon)\left(A_{01}^1 + A_{01}^2 \ln\alpha\right) + 2D_{01}^1 + L_{01}^2\,(2\ln\alpha + 1) \equiv 0,$$

откуда следует

$$2(1-2\upsilon)\,A_{00}^1 + 2D_{00}^1 + L_{00}^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = 0, \quad (1-2\upsilon)\,A_{00}^2 + L_{00}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = 0,$$

$$2(1-2\upsilon)\,A_{01}^1 + 2D_{01}^1 + L_{01}^2 = 0, \quad (1-2\upsilon)\,A_{01}^2 + L_{01}^2 = 0.$$

А с учетом (10)

$$2(1-2\upsilon)\,A_{00}^1 + A_{00}^2 + 2D_{00}^1 - \eta\, B_{00}^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = 0, \quad 2(1-\upsilon)\,A_{00}^2 - \eta\, B_{00}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = 0,$$

$$\left[2(1-2\upsilon)\,A_{01}^1 + A_{01}^2\right] + 2D_{01}^1 - \eta\, B_{01}^2 = 0, \quad 2(1-\upsilon)\,A_{01}^2 - \eta\, B_{01}^2 = 0.$$

В результате

$$\frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = -\left[(1-2\upsilon)\,A_{00}^1 + \frac{1}{2}A_{00}^2\right] - D_{00}^1 + \frac{\eta}{2}\,B_{00}^2, \quad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = -2(1-\upsilon)\,A_{00}^2 + \eta\, B_{00}^2.$$

$$D_{01}^1 = -(1-2\upsilon)\,A_{01}^1 + \frac{(1-2\upsilon)\,\eta}{4(1-\upsilon)}B_{01}^2, \quad A_{01}^2 = \frac{\eta}{2(1-\upsilon)}\,B_{01}^2.$$

Из третьего условия (11) имеем

$$4(1-2\upsilon)\left(A_{10}^1\,\alpha + A_{10}^2\,\frac{1}{\alpha}\right) + 3\left(D_{10}^1 + L_{10}^1\right)\alpha - \overline{D_{10}^2\,\frac{1}{\alpha^3}} + \left(L_{10}^2 + \underline{D_{10}^3}\right)\frac{1}{\alpha} + D_{10}^4\,\frac{\left(\overline{\overline{\ln\alpha}} + 1\right)}{\alpha} +$$

$$+\left(D_{10}^1 - L_{10}^1\right)\alpha + \overline{D_{10}^2\,\frac{1}{\alpha^3}} + \left(L_{10}^2 - \underline{D_{10}^3}\right)\frac{1}{\alpha} - D_{10}^4\,\frac{\overline{\overline{\ln\alpha}}}{\alpha} + \frac{4}{\varepsilon^2}\left(C_{11}^1\,\alpha + C_{11}^2\,\frac{1}{\alpha}\right) \equiv 0.$$

Очевидно,

$$4(1-2\upsilon)\,A_{10}^1 + 4D_{10}^1 + 2L_{10}^1 + \frac{4}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = 0, \quad 4(1-2\upsilon)\,A_{10}^2 + 2L_{10}^2 + D_{10}^4 + \frac{4}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = 0,$$

$$(3-4\upsilon)\,A_{10}^1 + 2D_{10}^1 - \eta\, B_{10}^1 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = 0, \quad (3-4\upsilon)\,A_{10}^2 - \eta\, B_{10}^2 + \frac{1}{2}D_{10}^4 + \frac{2}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = 0,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = \frac{\eta}{2}\,B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1 - D_{10}^1, \quad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = \frac{\eta}{2}\,B_{10}^2 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^2 - \frac{1}{4}D_{10}^4.$$

Последнее условие из (11) приводит к

$$4\left(1-2\upsilon\right)\left(A_{11}^{1}\,\alpha+A_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right)+3\left(D_{11}^{1}+L_{11}^{1}\right)\alpha-\overline{D_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{3}}}+\left(L_{11}^{2}+\underline{D_{11}^{3}}\right)\frac{1}{\alpha}+D_{11}^{4}\,\frac{\left(\overline{\overline{\ln\alpha}}+1\right)}{\alpha}+$$

$$+\left(D_{11}^{1}-L_{11}^{1}\right)\alpha+\overline{D_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{3}}}+\left(L_{11}^{2}-\underline{D_{11}^{3}}\right)\frac{1}{\alpha}-D_{11}^{4}\,\frac{\overline{\overline{\ln\alpha}}}{\alpha}\equiv 0\,,$$

$$2\left(1-2\upsilon\right)A_{11}^{1}+2D_{11}^{1}+L_{11}^{1}=0\,,\quad \left(3-4\upsilon\right)A_{11}^{1}+2D_{11}^{1}-\eta\,B_{11}^{1}=0\,,$$

$$2\left(1-2\upsilon\right)A_{11}^{2}+L_{11}^{2}+\frac{1}{2}D_{11}^{4}=0\,,\quad \left(3-4\upsilon\right)A_{11}^{2}+\frac{1}{2}D_{11}^{4}-\eta\,B_{11}^{2}=0\,,$$

$$D_{11}^{1}=\frac{\eta}{2}B_{11}^{1}-\frac{\left(3-4\upsilon\right)}{2}A_{11}^{1}\,,\ \ D_{11}^{4}=2\eta\,B_{11}^{2}-2\left(3-4\upsilon\right)A_{11}^{2}\,.$$

Таким образом, получены соотношения, определяющие значения «лишних» постоянных интегрирования

$$\frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{01}^{1}=-\left[\left(1-2\upsilon\right)A_{00}^{1}+\frac{1}{2}A_{00}^{2}\right]-D_{00}^{1}+\frac{\eta}{2}B_{00}^{2}\,,\quad \frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{01}^{2}=-2\left(1-\upsilon\right)A_{00}^{2}+\eta\,B_{00}^{2}\,,$$

$$D_{01}^{1}=-\left(1-2\upsilon\right)A_{01}^{1}+\frac{\left(1-2\upsilon\right)\eta}{4\left(1-\upsilon\right)}B_{01}^{2}\,,\quad A_{01}^{2}=\frac{\eta}{2\left(1-\upsilon\right)}B_{01}^{2}\,,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{11}^{1}=\frac{\eta}{2}B_{10}^{1}-\frac{\left(3-4\upsilon\right)}{2}A_{10}^{1}-D_{10}^{1}\,,\quad \frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{11}^{2}=\frac{\eta}{2}B_{10}^{2}-\frac{\left(3-4\upsilon\right)}{2}A_{10}^{2}-\frac{1}{4}D_{10}^{4}\,, \tag{12}$$

$$D_{11}^{1}=\frac{\eta}{2}B_{11}^{1}-\frac{\left(3-4\upsilon\right)}{2}A_{11}^{1}\,,\ \ D_{11}^{4}=2\eta\,B_{11}^{2}-2\left(3-4\upsilon\right)A_{11}^{2}\,.$$

При исследовании деформации резервуара с жидкостью одним из обязательных граничных условий является условие, накладываемое на напряжение $\sigma_{\alpha\alpha}$. Это напряжение определяется из соотношений Дюгамеля–Неймана и в принятых обозначениях имеет вид

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{E}{2\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\left\{\frac{2\left(1-2\upsilon\right)}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+2\upsilon\theta-\eta\,T\right\}.$$

Соотношения (4), (7), позволяют считать

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(\alpha\,,\beta\,,\gamma\right)=\sigma_{\alpha\alpha00}\left(\alpha\right)+\sigma_{\alpha\alpha01}\left(\alpha\right)\gamma+\left[\sigma_{\alpha\alpha10}\left(\alpha\right)+\sigma_{\alpha\alpha11}\left(\alpha\right)\gamma\right]\cos\beta.$$

Тогда

$$\sigma_{\alpha\alpha mn}=-\frac{E}{2\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\left\{-\frac{2\left(1-2\upsilon\right)}{R}\frac{du_{mn}}{d\alpha}-2\upsilon\theta_{mn}+\eta\,T_{mn}\right\},\quad \left(m;n=0\,;1\right).$$

После подстановки входящих в эти уравнения соотношений с учетом (12) получаем

$$\sigma_{\alpha\alpha00}=-\frac{E}{2\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\left\{D_{00}^{1}-D_{00}^{2}\,\frac{1}{\alpha^{2}}-2\upsilon A_{00}^{1}+\right.$$

$$\left.+\left[1+\left(1-2\upsilon\right)\ln\alpha\right]A_{00}^{2}+\eta\left(B_{00}^{1}-B_{00}^{2}\right)\right\}.$$

$$\sigma_{\alpha\alpha 01} = -\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \left\{ D_{01}^1 - D_{01}^2 \frac{1}{\alpha^2} - 2\upsilon\, A_{01}^1 + \right.$$
$$\left. + \left[1 + (1-2\upsilon)\ln\alpha\right] A_{01}^2 + \eta\left(B_{01}^1 - B_{01}^2\right)\right\},$$
$$\sigma_{\alpha\alpha 10} = -\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \left\{ D_{10}^1\alpha - D_{10}^2 \frac{1}{\alpha^3} + D_{10}^4 \frac{1}{2\alpha} + \right.$$
$$\left. + (1-2\upsilon) A_{10}^1\alpha - 2\upsilon\, A_{10}^2 \frac{1}{\alpha} + \eta\, B_{10}^2 \frac{1}{\alpha}\right\}, \qquad (13)$$
$$\sigma_{\alpha\alpha 11} = -\frac{E}{2(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \left\{ D_{11}^1\alpha - D_{11}^2 \frac{1}{\alpha^3} + D_{11}^4 \frac{1}{2\alpha} + \right.$$
$$\left. + (1-2\upsilon) A_{11}^1\alpha - 2\upsilon A_{11}^2 \frac{1}{\alpha} + \eta\, B_{11}^2 \frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Решаем краевую задачу: цилиндрический резервуар с жидкостью находится в несимметричном температурном поле.

Для температурной задачи принимаем следующие краевые условия. Оба торца резервуара и его внутренняя боковая поверхность термоизолированы от внешней среды, то есть

$$\left.\frac{\partial T(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=t} = 0, \quad \left.\frac{\partial T(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=1} = 0.$$

Внешняя боковая поверхность имеет температуру

$$T(1,\beta,\gamma) = \Theta_{00} + \Theta_{10}\cos\beta,$$

параметры Θ_{00}, Θ_{10} постоянны. С учетом соотношений (4), (7), (8), (9) имеем

$$T(\alpha,\beta,\gamma) = T_{00}(\alpha) + T_{01}(\alpha)\,\gamma + \left[T_{10}(\alpha) + T_{11}(\alpha)\,\gamma\right]\cos\beta =$$
$$= B_{00}^1 + B_{00}^2\ln\alpha + \left(B_{01}^1 + B_{01}^2\ln\alpha\right)\gamma + \left[B_{10}^1\,\alpha + B_{10}^2\frac{1}{\alpha} + \left(B_{11}^1\,\alpha + B_{11}^2\frac{1}{\alpha}\right)\gamma\right]\cos\beta,$$
$$\frac{\partial T(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha} = B_{00}^2\frac{1}{\alpha} + B_{01}^2\frac{1}{\alpha}\gamma + \left[B_{10}^1 - B_{10}^2\frac{1}{\alpha^2} + \left(B_{11}^1 - B_{11}^2\frac{1}{\alpha^2}\right)\gamma\right]\cos\beta,$$
$$\frac{\partial T(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\gamma} = B_{01}^1 + B_{01}^2\ln\alpha + \left[B_{11}^1\,\alpha + B_{11}^2\frac{1}{\alpha}\right]\cos\beta.$$

Из первого граничного условия

$$B_{00}^1 + B_{01}^1\,\gamma + \left[B_{10}^1 + B_{10}^2 + \left(B_{11}^1 + B_{11}^2\right)\gamma\right]\cos\beta \equiv \Theta_{00} + \Theta_{10}\cos\beta,$$
$$B_{00}^1 = \Theta_{00}, \quad B_{01}^1 = 0, \quad B_{10}^1 + B_{10}^2 = \Theta_{10}, \quad B_{11}^1 + B_{11}^2 = 0.$$

Из второго

$$B_{00}^2\frac{1}{t} + B_{01}^2\frac{1}{t}\gamma + \left[B_{10}^1 - B_{10}^2\frac{1}{t^2} + \left(B_{11}^1 - B_{11}^2\frac{1}{t^2}\right)\gamma\right]\cos\beta \equiv 0,$$

откуда следует

$$B_{00}^2 = 0\,,\quad B_{01}^2 = 0\,,\quad B_{10}^1 - B_{10}^2\,\frac{1}{t^2} = 0\,,\quad B_{11}^1 - B_{11}^2\,\frac{1}{t^2} = 0\,.$$

Тогда

$$B_{10}^1 - B_{10}^2\,\frac{1}{t^2} = 0\,,\quad B_{10}^1 + B_{10}^2 = \Theta_{10}\,,\quad \Rightarrow B_{10}^2 = \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,\quad B_{10}^1 = \frac{1}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,$$

$$B_{11}^1 + B_{11}^2 = 0\,,\quad B_{11}^1 - B_{11}^2\,\frac{1}{t^2} = 0\,,\quad \Rightarrow B_{11}^1 = B_{11}^2 = 0\,.$$

В итоге

$B_{00}^1 = \Theta_{00}$, $B_{01}^1 = 0$, $B_{00}^2 = 0$, $B_{01}^2 = 0$, $B_{11}^1 = B_{11}^2 = 0$,

$$B_{10}^2 = \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,\quad B_{10}^1 = \frac{1}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,, \tag{14}$$

то есть в рассматриваемой краевой задаче B_{00}^1, B_{10}^1, B_{10}^2 не равны нулю, остальные – нули.

При полученных значениях постоянных интегрирования $\dfrac{\partial T(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\gamma} \equiv 0$, следовательно, все краевые условия температурной задачи выполняются.

Граничные условия упругой задачи принимаем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha}(t,\beta,\gamma) = \rho H(1-\gamma),\; w(1,\beta,0) = 0\,,\; w(1,\beta,1) = 0,\\ w(t,\beta,0) = 0\,,\; w(t,\beta,1) = 0\,,\; u(1,\beta,0) = 0\,,\; u(1,\beta,1) = 0\,,\\ v(1,\beta,0) = 0\,,\; v(1,\beta,1) = 0\,,\; v(t,\beta,1) = 0\;\; v(t,\beta,0) = 0\,.\end{gathered} \tag{15}$$

Кроме этих условий имеем соотношения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^1 = -\left[(1-2\upsilon)A_{00}^1 + \frac{1}{2}A_{00}^2\right] - D_{00}^1\,,\qquad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{01}^2 = -2(1-\upsilon)A_{00}^2\,,\\ D_{01}^1 = -(1-2\upsilon)A_{01}^1\,,\qquad A_{01}^2 = 0\,,\\ \frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^1 = \frac{\eta}{2}B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1 - D_{10}^1\,,\quad \frac{1}{\varepsilon^2}C_{11}^2 = \frac{\eta}{2}B_{10}^2 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^2 - \frac{1}{4}D_{10}^4\,,\\ D_{11}^1 = -\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^1\,,\qquad D_{11}^4 = -2(3-4\upsilon)A_{11}^2\,,\end{gathered} \tag{16}$$

которые с учетом (14) следуют из (12).

Из (4), (7) и (13) имеем

$$\begin{gathered}w(\alpha,\beta,\gamma) = w_{00}(\alpha) + w_{01}(\alpha)\gamma + \left[w_{10}(\alpha) + w_{11}(\alpha)\gamma\right]\cos\beta\,,\\ u_{00}(\alpha) + u_{01}(\alpha)\gamma + \left[u_{10}(\alpha) + u_{11}(\alpha)\gamma\right]\cos\beta\,,\\ v(\alpha,\beta,\gamma) = \left[v_{10}(\alpha) + v_{11}(\alpha)\gamma\right]\sin\beta\,,\end{gathered}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = \sigma_{\alpha\alpha 00}(\alpha) + \sigma_{\alpha\alpha 01}(\alpha)\gamma + \left[\sigma_{\alpha\alpha 10}(\alpha) + \sigma_{\alpha\alpha 11}(\alpha)\gamma\right]\cos\beta .$$

В результате из условий (15) получаем

$$w_{00}(1) + w_{10}(1)\cos\beta = 0 , \quad w_{00}(1) + w_{01}(1) + \left[w_{10}(1) + w_{11}(1)\right]\cos\beta = 0 ,$$

$$w_{00}(t) + w_{10}(t)\cos\beta = 0 , \quad w_{00}(t) + w_{01}(t) + \left[w_{10}(t) + w_{11}(t)\right]\cos\beta = 0 ,$$

$$u_{00}(1) + u_{10}(1)\cos\beta , \quad u_{00}(1) + u_{01}(1) + \left[u_{10}(1) + u_{11}(1)\right]\cos\beta = 0 ,$$

$$v_{10}(1) = 0 , \quad v_{10}(1) + v_{11}(1) = 0 , \quad v_{10}(t) = 0 , \quad v_{10}(t) + v_{11}(t) = 0 ,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(t, \beta, \gamma) = \sigma_{\alpha\alpha 00}(t) + \sigma_{\alpha\alpha 01}(t)\gamma + \left[\sigma_{\alpha\alpha 10}(t) + \sigma_{\alpha\alpha 11}(t)\gamma\right]\cos\beta = \rho H(1-\gamma),$$

откуда следует

$$\begin{gathered} w_{00}(1) = 0 , \quad w_{10}(1) = 0 , \quad w_{01}(1) = 0 , \quad w_{11}(1) = 0 , \\ w_{00}(t) = 0 , \quad w_{10}(t) = 0 , \quad w_{01}(t) = 0 , \quad w_{11}(t) = 0 , \\ u_{00}(1) = 0 , \; u_{10}(1) = 0 , \quad u_{01}(1) = 0 , \quad u_{11}(1) = 0 , \\ v_{10}(1) = 0 , \quad v_{11}(1) = 0 , \quad v_{10}(t) = 0 , \quad v_{11}(t) = 0 , \\ \sigma_{\alpha\alpha 00}(t) = \rho H , \quad \sigma_{\alpha\alpha 01}(t) = -\rho H , \quad \sigma_{\alpha\alpha 10}(t) = 0 , \quad \sigma_{\alpha\alpha 11}(t) = 0 . \end{gathered} \tag{17}$$

Из $w_{01}(1) = 0$ и $w_{01}(t) = 0$ с учетом соотношений (8) имеем систему $C_{01}^1 = 0, \quad C_{01}^1 + C_{01}^2 \ln t = 0$, откуда $C_{01}^1 = C_{01}^2 = 0$. Теперь из второго соотношения (16) получаем $A_{00}^2 = 0$, из первого $D_{00}^1 = -(1-2\upsilon)A_{00}^1$. Из третьего и четвертого имеем $D_{01}^1 = -(1-2\upsilon)A_{01}^1$, $\quad A_{01}^2 = 0$.

Из $w_{00}(1) = 0$ и $w_{00}(t) = 0$ с учетом (8) получаем $C_{00}^1 + \frac{1}{4}A_{01}^1 = 0$, $C_{00}^1 + C_{00}^2 \ln t + \frac{1}{4}A_{01}^1 t^2 = 0$, откуда следует

$$C_{00}^1 = -\frac{1}{4}A_{01}^1 , \; C_{00}^2 = -\frac{(t^2-1)}{4\ln t}A_{01}^1 .$$

Из $w_{11}(1) = 0$ и $w_{11}(t) = 0$ с учетом (9) имеем систему

$$C_{11}^1 + C_{11}^2 = 0 , \quad C_{11}^1 t + C_{11}^2 \frac{1}{t} = 0 ,$$

откуда следует

$$C_{11}^1 = C_{11}^2 = 0 .$$

После чего из оставшихся соотношений (16) имеем

$$D_{10}^1 = \frac{\eta}{2}B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^1 , \quad D_{10}^4 = 2\eta B_{10}^2 - 2(3-4\upsilon)A_{10}^2 ,$$

$$D_{11}^{1}=-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^{1},\qquad D_{11}^{4}=-2(3-4\upsilon)A_{11}^{2}.$$

Из $w_{10}(1)=0$ и $w_{10}(t)=0$ с учетом (9) приходим к системе уравнений

$$C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+\frac{1}{8}A_{11}^{1}=0,\quad C_{10}^{1}t^{2}+C_{10}^{2}+\frac{1}{8}A_{11}^{1}t^{4}+\frac{1}{2}A_{11}^{2}t^{2}\ln t=0,$$

откуда следует

$$C_{10}^{1}=-\frac{t^{2}\ln t}{2(t^{2}-1)}A_{11}^{2}-\frac{1}{8}A_{11}^{1}(t^{2}+1),\; C_{10}^{2}=\frac{t^{2}\ln t}{2(t^{2}-1)}A_{11}^{2}+\frac{t^{2}}{8}A_{11}^{1}.$$

Из $u_{00}(1)=0$ и $u_{01}(1)=0$ с учетом (16) приходим к системе

$$D_{00}^{1}+D_{00}^{2}=0,\quad D_{01}^{1}+D_{01}^{2}=0,$$

откуда следует

$$D_{00}^{2}=-D_{00}^{1},\quad D_{01}^{2}=-D_{01}^{1},$$

или

$$D_{00}^{2}=-D_{00}^{1}=(1-2\upsilon)A_{00}^{1},\quad D_{01}^{2}=-D_{01}^{1}=(1-2\upsilon)A_{01}^{1}.$$

Из $\sigma_{\alpha\alpha00}(t)=\rho H$ и $\sigma_{\alpha\alpha01}(t)=-\rho H$ имеем

$$D_{00}^{1}-D_{00}^{2}\frac{1}{t^{2}}-2\upsilon A_{00}^{1}+\eta B_{00}^{1}=-f,\quad D_{01}^{1}-D_{01}^{2}\frac{1}{t^{2}}-2\upsilon A_{01}^{1}=f,$$

$$D_{00}^{1}\frac{(t^{2}+1)}{t^{2}}-2\upsilon A_{00}^{1}+\eta B_{00}^{1}=-f,\quad D_{01}^{1}\frac{(t^{2}+1)}{t^{2}}-2\upsilon A_{01}^{1}=f,$$

$$-(1-2\upsilon)A_{00}^{1}\frac{(t^{2}+1)}{t^{2}}-2\upsilon A_{00}^{1}+\eta B_{00}^{1}=-f,\quad -(1-2\upsilon)A_{01}^{1}\frac{(t^{2}+1)}{t^{2}}-2\upsilon A_{01}^{1}=f,$$

$$A_{00}^{1}=\frac{t^{2}(f+\eta B_{00}^{1})}{(t^{2}+1-2\upsilon)},\quad A_{01}^{1}=-\frac{t^{2}f}{(t^{2}+1-2\upsilon)}.$$

Из $u_{10}(1)=0$, $v_{10}(1)=0$, $v_{10}(t)=0$ с учетом (9) следует

$$\begin{gathered}D_{10}^{1}+A_{10}^{1}-\eta B_{10}^{1}+D_{10}^{2}+A_{10}^{2}-\eta B_{10}^{2}+D_{10}^{3}=0,\\ D_{10}^{1}-A_{10}^{1}+\eta B_{10}^{1}+D_{10}^{2}+A_{10}^{2}-\eta B_{10}^{2}-D_{10}^{3}=0,\\ (D_{10}^{1}-A_{10}^{1}+\eta B_{10}^{1})t^{4}+D_{10}^{2}+(A_{10}^{2}-\eta B_{10}^{2}-D_{10}^{3})t^{2}-D_{10}^{4}t^{2}\ln t=0.\end{gathered}\tag{18}$$

Суммируем первые два уравнения и вычитаем из первого уравнения второе:

$$D_{10}^{1}+D_{10}^{2}+A_{10}^{2}-\eta B_{10}^{2}=0,\quad A_{10}^{1}-\eta B_{10}^{1}+D_{10}^{3}=0$$

$$D_{10}^{1}+D_{10}^{2}=-A_{10}^{2}+\eta B_{10}^{2},\qquad D_{10}^{3}=\eta B_{10}^{1}-A_{10}^{1}.$$

Ранее было установлено, что

$$D_{10}^{1}=\frac{\eta}{2}B_{10}^{1}-\frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{10}^{1},\qquad D_{10}^{4}=2\eta B_{10}^{2}+2(3-4\upsilon)A_{10}^{2},$$

следовательно,

$$D_{10}^1 + D_{10}^2 = -A_{10}^2 + \eta\, B_{10}^2\,, \quad D_{10}^2 = -\frac{\eta}{2}\, B_{10}^1 + \frac{(3-4\upsilon)}{2} A_{10}^1 - A_{10}^2 + \eta\, B_{10}^2\,,$$

$$D_{10}^2 = \frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^2 - B_{10}^1\right) + \frac{(3-4\upsilon)}{2} A_{10}^1 - A_{10}^2\,,\ D_{10}^3 = \eta\, B_{10}^1 - A_{10}^1.$$

Таким образом, $C_{00}^1 = -\frac{1}{4} A_{01}^1,\ C_{00}^2 = -\frac{\left(t^2-1\right)}{4\ln t} A_{01}^1,$

$$C_{10}^1 = -\frac{t^2 \ln t}{2\left(t^2-1\right)} A_{11}^2 - \frac{1}{8} A_{11}^1 \left(t^2+1\right),\ C_{10}^2 = \frac{t^2 \ln t}{2\left(t^2-1\right)} A_{11}^2 + \frac{t^2}{8} A_{11}^1,\ C_{11}^1 = C_{11}^2 = 0\,,$$

$$D_{10}^1 = \frac{\eta}{2} B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2} A_{10}^1,\ D_{10}^2 = \frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^2 - B_{10}^1\right) + \frac{(3-4\upsilon)}{2} A_{10}^1 - A_{10}^2\,,$$

$$D_{10}^3 = \eta\, B_{10}^1 - A_{10}^1,\quad D_{10}^4 = 2\eta\, B_{10}^2 - 2(3-4\upsilon) A_{10}^2\,, \tag{19}$$

$$D_{11}^1 = -\frac{(3-4\upsilon)}{2} A_{11}^1\,, \qquad D_{11}^4 = -2(3-4\upsilon) A_{11}^2\,.$$

Из третьего уравнения системы (18) с учетом (19) получаем

$$\left[\frac{\eta}{2} B_{10}^1 - \frac{(3-4\upsilon)}{2} A_{10}^1 - A_{10}^1 + \eta\, B_{10}^1\right] t^4 + \frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^2 - B_{10}^1\right) + \frac{(3-4\upsilon)}{2} A_{10}^1 - A_{10}^2 +$$
$$+\left(A_{10}^2 - \eta\, B_{10}^2 - \eta\, B_{10}^1 + A_{10}^1\right) t^2 - \left[2\eta\, B_{10}^2 - 2(3-4\upsilon) A_{10}^2\right] t^2 \ln t = 0\,,$$

или

$$\left[(3-4\upsilon)\left(t^2+1\right) + 2t^2\right]\left(t^2-1\right) A_{10}^1 - 2\left[t^2 - 1 + 2(3-4\upsilon) t^2 \ln t\right] A_{10}^2 -$$
$$-\eta\left[3\,t^4 - 2t^2 - 1\right] B_{10}^1 + 2\eta\left[2t^2 \ln t + t^2 - 1\right] B_{10}^2 = 0\,,$$

то есть одно из уравнений для определения оставшихся постоянных интегрирования A_{10}^1 , A_{10}^2.

Выполним условие $\sigma_{\alpha\alpha 10}(t) = 0$. Подставляя в

$$\sigma_{\alpha\alpha 10} = -\frac{E}{4(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{-\frac{4(1-2\upsilon)}{R}\frac{du_{10}}{d\alpha} - 4\upsilon\theta_{10} + 2\eta\, T_{10}\right\},$$

используя соотношения (9), получаем

$$\sigma_{\alpha\alpha 10}(t) = -\frac{E}{4(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{2\left(D_{10}^1 + A_{10}^1 - \eta\, B_{10}^1\right) t - D_{10}^2 \frac{2}{t^3} +\right.$$
$$\left. + D_{10}^4 \frac{1}{t} - 4\upsilon\left(A_{10}^1\, t + A_{10}^2 \frac{1}{t}\right) + 2\eta\left(B_{10}^1\, t + B_{10}^2 \frac{1}{t}\right)\right\} = 0\,,$$

$$2D_{10}^1 t^4 - 2D_{10}^2 + D_{10}^4 t^2 + 2(1-2\upsilon) A_{10}^1 t^4 - 4\upsilon\, A_{10}^2 t^2 + 2\eta\, B_{10}^2 t^2 = 0\,,$$

$$2D_{10}^1 t^4 - 2D_{10}^2 + D_{10}^4\, t^2 + 2(1-2\upsilon) A_{10}^1 t^4 - 4\upsilon\, A_{10}^2\, t^2 + 2\eta\, B_{10}^2\, t^2 = 0\,.$$

С учетом (19) приходим к уравнениям

$$2D_{10}^1 t^4 - 2D_{10}^2 + D_{10}^4\, t^2 + 2(1-2\upsilon)A_{10}^1 t^4 - 4\upsilon\, A_{10}^2\, t^2 + 2\eta\, B_{10}^2\, t^2 = 0\,,$$

$$\left[\eta\, B_{10}^1 - (3-4\upsilon)A_{10}^1\right]t^4 - \eta\left(2B_{10}^2 - B_{10}^1\right) - (3-4\upsilon)A_{10}^1 + 2A_{10}^2 +$$
$$+\left[2\eta\, B_{10}^2 - 2(3-4\upsilon)A_{10}^2\right]t^2 + 2(1-2\upsilon)A_{10}^1 t^4 - 4\upsilon\, A_{10}^2\, t^2 + 2\eta\, B_{10}^2\, t^2 = 0\,,$$

$$\left[-(3-4\upsilon-2+4\upsilon)\,t^4 - (3-4\upsilon)\right]A_{10}^1 + \left[2 + (-6+8\upsilon-4\upsilon)\,t^2\right]A_{10}^2 +$$
$$+\eta\left(t^4+1\right)B_{10}^1 + \eta\left(4t^2-2\right)B_{10}^2 = 0\,,$$

$$\left(t^4+3-4\upsilon\right)A_{10}^1 + 2\left[(3-2\upsilon)\,t^2-1\right]A_{10}^2 - \eta\left(t^4+1\right)B_{10}^1 - 2\eta\left(2t^2-1\right)B_{10}^2 = 0\,.$$

Итак, имеем пару уравнений относительно A_{10}^1, A_{10}^2:

$$A_{10}^1\left[(3-4\upsilon)\left(t^2+1\right)+2t^2\right]\left(t^2-1\right) + 2A_{10}^2\left[-t^2+1-2(3-4\upsilon)\,t^2\ln t\right] -$$
$$-\eta\, B_{10}^1\left(3t^2+1\right)\left(t^2-1\right) + 2\eta\, B_{10}^2\left(2t^2\ln t + t^2 - 1\right) = 0\,, \tag{20}$$
$$\left(t^4+3-4\upsilon\right)A_{10}^1 + 2\left[(3-2\upsilon)\,t^2-1\right]A_{10}^2 - \eta\left(t^4+1\right)B_{10}^1 - 2\eta\left(2t^2-1\right)B_{10}^2 = 0\,.$$

Выполним оставшиеся граничные условия из (15) $u_{11}(1)=0$, $v_{11}(1)=0$, $v_{11}(t)=0$, $\sigma_{\alpha\alpha 11}(t)=0$, добавив к ним соотношения $D_{11}^1 = -\dfrac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^1$, $D_{11}^4 = -2(3-4\upsilon)A_{11}^2$ из (16). Из (14) имеем $B_{11}^1 = B_{11}^2 = 0$, откуда следует $L_{11}^1 = A_{11}^1$, $L_{11}^2 = A_{11}^2$. Из указанных граничных условий имеем систему шести однородных уравнений

$$D_{11}^1 + A_{11}^1 + D_{11}^2 + A_{11}^2 + D_{11}^3 = 0\,, \qquad D_{11}^1 - A_{11}^1 + D_{11}^2 + A_{11}^2 - D_{11}^3 = 0\,,$$

$$\left(D_{11}^1 - A_{11}^1\right)t^2 + D_{11}^2\frac{1}{t^2} + A_{11}^2 - D_{11}^3 - D_{11}^4\ln t = 0\,,$$

$$D_{11}^1 t - D_{11}^2\frac{1}{t^3} + D_{11}^4\frac{1}{2t} + (1-2\upsilon)A_{11}^1 t - 2\upsilon A_{11}^2\frac{1}{t} = 0\,,$$

$$D_{11}^1 + \frac{(3-4\upsilon)}{2}A_{11}^1 = 0\,, \qquad D_{11}^4 + 2(3-4\upsilon)A_{11}^2 = 0\,,$$

решение которой единственное, следовательно, нулевое:

$$A_{11}^1 = A_{11}^2 = D_{11}^1 = D_{11}^2 = D_{11}^3 = D_{11}^4 = 0\,.$$

Таким образом, постоянные интегрирования A_{10}^1, A_{10}^2 определяются из системы (20), значения остальных постоянных интегрирования имеют вид

$$B_{00}^1 = \Theta_{00}\,,\ B_{00}^2 = 0\,,\ B_{01}^1 = B_{01}^2 = 0\,,\ B_{11}^1 = B_{11}^2 = 0\,,$$

$$B_{10}^2 = \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,\quad B_{10}^1 = \frac{1}{\left(t^2+1\right)}\Theta_{10}\,,$$

$$A_{00}^1 = \frac{t^2\left(f+\eta B_{00}^1\right)}{\left(t^2+1-2\upsilon\right)}\,,\ A_{00}^2 = 0\,,\ A_{01}^1 = -\frac{t^2 f}{\left(t^2+1-2\upsilon\right)}\,,\ A_{01}^2 = 0\,,\ A_{11}^1 = A_{11}^2 = 0\,,$$

$$C_{00}^{1} = -\frac{1}{4} A_{01}^{1},\ C_{00}^{2} = -\frac{\left(t^{2}-1\right)}{4\ln t} A_{01}^{1},\ C_{01}^{1} = C_{01}^{2} = 0,$$

$$C_{10}^{1} = C_{10}^{2} = 0,\ C_{11}^{1} = C_{11}^{2} = 0, \tag{21}$$

$$D_{00}^{1} = -\left(1-2\upsilon\right) A_{00}^{1}, \ldots D_{00}^{2} = \left(1-2\upsilon\right) A_{00}^{1}, \ldots D_{01}^{1} = -\left(1-2\upsilon\right) A_{01}^{1}, \ldots D_{01}^{2} = \left(1-2\upsilon\right) A_{01}^{1},$$

$$D_{10}^{1} = \frac{\eta}{2} B_{10}^{1} - \frac{\left(3-4\upsilon\right)}{2} A_{10}^{1},\ D_{10}^{2} = \frac{\eta}{2}\left(2B_{10}^{2} - B_{10}^{1}\right) + \frac{\left(3-4\upsilon\right)}{2} A_{10}^{1} - A_{10}^{2},$$

$$D_{10}^{3} = \eta\, B_{10}^{1} - A_{10}^{1},\quad D_{10}^{4} = 2\eta\, B_{10}^{2} - 2\left(3-4\upsilon\right) A_{10}^{2},\ D_{11}^{1} = D_{11}^{4} = 0.$$

Теперь

$$T\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = B_{00}^{1} + \left(B_{10}^{1}\, \alpha + B_{10}^{2}\, \frac{1}{\alpha}\right)\cos\beta,$$

$$\theta\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = A_{00}^{1} + A_{01}^{1}\, \gamma + \left(A_{10}^{1}\, \alpha + A_{10}^{2}\, \frac{1}{\alpha}\right)\cos\beta,$$

$$w\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = -\frac{R}{\left(1-2\upsilon\right)\varepsilon}\left[C_{00}^{1} + C_{00}^{2}\, \ln\alpha + \frac{1}{4} A_{01}^{1}\, \alpha^{2}\right],$$

$$u\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = -\frac{R}{2\left(1-2\upsilon\right)}\left\{D_{00}^{1}\, \alpha + D_{00}^{2}\, \frac{1}{\alpha} + \left(D_{01}^{1}\, \alpha + D_{01}^{2}\, \frac{1}{\alpha}\right)\gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(D_{10}^{1} + L_{10}^{1}\right)\alpha^{2} + D_{10}^{2}\, \frac{1}{\alpha^{2}} + L_{10}^{2} + D_{10}^{3} + D_{10}^{4}\, \ln\alpha\right]\cos\beta\right\},$$

$$v\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = -\frac{R}{4\left(1-2\upsilon\right)}\left[\left(D_{10}^{1} - L_{10}^{1}\right)\alpha^{2} + D_{10}^{2}\, \frac{1}{\alpha^{2}} + L_{10}^{2} - D_{10}^{3} - D_{10}^{4}\, \ln\alpha\right]\sin\beta,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[\upsilon\theta - (1+\upsilon)\alpha_{T} T\right].$$

Вычисления проводились для следующих параметров задачи:

$$R = 10\,\text{м},\quad r = 9{,}95\,\text{м},\quad H = 30\,\text{м},\ E = 7{,}0\cdot 10^{4}\ \text{МПа},\ \ \upsilon = 0{,}34,$$

$$\rho = 0{,}75\cdot 10^{3}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^{3}},\quad \alpha_{T} = 23\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\text{град}},\ \ \Theta_{00} = 60\,°\text{C},\ \ \Theta_{10} = 25\,°\text{C}.$$

Оказалось, что перемещения v, w пренебрежимо малы, как и смещение u точек наружной боковой поверхности. Перемещения u точек внутренней боковой поверхности практически не меняются по высоте и не превышают 0,004 толщины стенки резервуара.

Максимальным при указанных параметрах задачи является напряжение $\sigma_{\gamma\gamma}$, и меняется оно только по окружной координате, практически не завися от α и γ. На рис. 2 представлено распределение напряжения $\dfrac{\sigma_{\gamma\gamma}\left(\alpha, 0, 0{,}5\right)}{E}$ по α от внутренней до внешней боковых поверхностей резервуара.

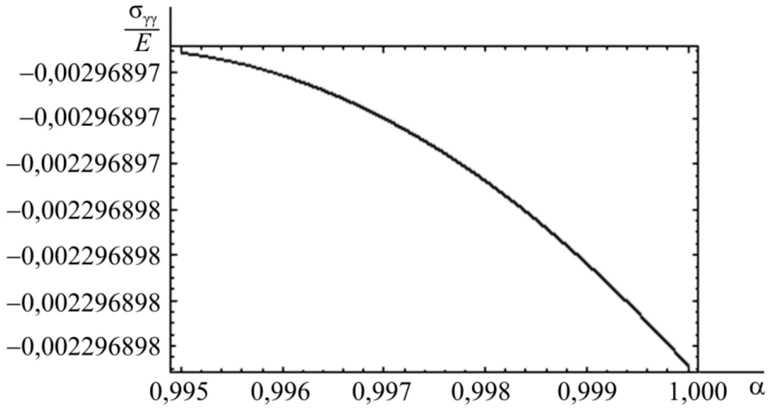

Рис. 2. Распределение напряжений по координате
Fig. 2. The stress distribution on coordinate

На рис. 3 показано распределение того же напряжения по окружной координате от $\beta = 0$ до $\beta = \pi$.

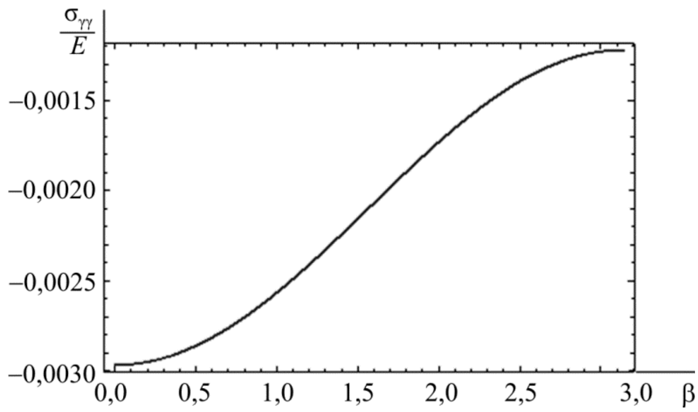

Рис. 3. Распределение напряжений по координате
Fig. 3. The stress distribution on coordinate

Остальные напряжения значительно меньше.

Без учета влияния температуры качественная картина та же, но максимальные напряжения на 1–2 порядка меньше.

Итак, точное решение поставленной краевой задачи построено.

Библиографический список

1. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
2. Ляв А.Э.Х. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 676 с.
3. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости – М.: Физматлит, 1978 – 462 с.
4. Коваленко А.Д. Избранные труды. – Киев: Наукова думка, 1976. – 762 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. Новацкий В. Вопросы термоупругости – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
7. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. – 695 с.
8. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

9. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высшая школа, 2010. – 227 с.

10. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. – М.: Физматлит, 1961. – 219 с.

11. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.

12. Хан Х. Теория упругости. – М.: Мир, 1988. – 343 с.

13. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лизбень. – Киев: Наукова думка, 1977. – 158 с.

14. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – 207 с.

15. Тюленева О.Н., Гурьянов Н.Г. Краевые задачи термоупругости для шара. – Saarbucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 160 с.

16. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Пространственная задача термоупругости для сферического купола // Теория и практика современной науки: сб. ст. XV Междунар. науч.-практ. конф. – М., 2014. – С. 10–17.

17. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Задача термоупругости для шара // Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики: сб. тез. докл. X Всерос. съезда. – Н. Новгород, 2011. – № 4 (4). – С. 1466–1467.

18. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Двоякопериодическое решение задачи термоупругости для полого шара // Современные проблемы механики: сб. ст. междунар. науч.-техн. конф. – Ташкент, 2009. – Т. 1. – С. 283–288.

19. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Точное решение несимметричной задачи теории упругости для цилиндра в температурном поле // Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики: тез. докл. XI Всерос. съезда. – Казань, 2015. – С. 1106–1108.

20. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Сферический купол в температурном поле // Известия вузов. Авиационная техника. – 2013. – Т. 1. – С. 8–12.

21. Попов Г.Я., Белкасем К. Точное решение смешанной неосесимметричной краевой задачи теории упругости для кругового цилиндра конечной длины // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 433, № 1. – С. 48–54.

22. Попов Г.Я. Осесимметричные краевые задачи теории упругости для цилиндров и конусов конечной длины // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 439, № 2. – С. 192–197.

23. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 656 с.

24. Фастовская Т.Б. Существование глобальных решений нелинейной задачи термоупругости // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – Харьков, 2014. – Т. 2, № 4. – С. 125–127.

25. Chanyu Shang Global attractor for the Ginzburg-Landay thermoviscoelastic system with hinger boundary conditions // Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 343. – P. 1–21.

26. Саталкина Л.В. Несвязанная задача нелинейной термоупругости для тела с сингулярной границей // Вестник ТулГУ. Актуальные вопросы механики. – Тула, 2009. – Вып 5. – С. 157–160.

27. Родионов А.Ю. Точные решения уравнений термоупругости // Институт прикладной механики Владикавказского научного центра РАН. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 54–62.

28. Шевченко А.В. Применение вариационного метода при расчете замкнутых цилиндрических оболочек с учетом температурных деформаций // Вестн. Белгород. гос. техн. ун-та им. В.Г.Шухова. – 2005. – № 10. – С. 492–494.

29. Байден О.В., Шаповалов С.М., Шевченко А.В. Учет температурных деформаций при расчете замкнутых цилиндрических оболочек вариационным методом // Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – № 5. – С. 6–9.

30. Волков А.Е., Кухарева А.С. Расчет напряженно-деформированного состояния в цилиндре из TiNi при охлаждении под нагрузкой и разгрузке // Изв. РАН. Серия физическая. – М.: Наука, 2008. – Т. 72, № 9. – С. 1337–1340.

31. Иванов А.С., Ковалев В.И., Цаповская О.А. Температурные напряжения в сплошном длинном цилиндрес переменным объемным тепловыделением // Проблемы машиностроения и автоматизации. – М., 2008. – № 1. – С. 111–114.

32. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10, № 3. – С. 301–310.

References

1. Lur'e A.I. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1970, 939 p.

2. Liav A.E.Kh. Matematicheskaia teoriia uprugosti [Mathematical theory of elasticity]. *Leningrad-Moscow, Ob"edinennyi nauchno-tekhnologicheskii institut*, 1935, 676 p.

3. Aleksandrov A.Ia., Solov'ev Iu.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti [Spatial problems of the theory of Uruguay]. *Moscow, Fizmatlit*, 1978, 462 p.

4. Kovalenko A.D. Izbrannye trudy [Selected works]. *Kiev, Naukova dumka*, 1976, 762 p.

5. Novatskii V. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Mir*, 1975, 872 p.

6. Novatskii V. Voprosy termouprugosti [Questions of thermoelasticity]. *Moscow, Izdatel'stvo akademii nauk SSSR*, 1962, 364 p.

7. Ogibalov P.M., Koltunov M.A. Obolochki i plastiny [Shells and plates]. *Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta*, 1969, 695 p.

8. Parton V.Z., Perlin P.I. Metody matematicheskoi teorii uprugosti [Methods of the mathematical theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1981, 688 p.

9. Rekach V.G. Rukovodstvo k resheniiu zadach po teorii uprugosti [Guide for solving problems in the theory of elasticity]. *Moscow, Vysshaia shkola*, 2010, 227 p.

10. Sneddon I.N., Berri D.S. Klassicheskaia teoriia uprugosti. [The classical theory of elasticity]. *Moscow, Fizmatlit*, 1961, 219 p.

11. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1975, 575 p.

12. Khan Kh. Teoriia uprugosti[Theory of elasticity]. *Moscow, Mir*, 1988, 343 p.

13. Podstrigach Ia.S., Koliano Iu.M.,Gromovyk V.I., Lizben' V.L. Termouprugost' tel pri peremennykh koeffitsientakh teplootdachi [Thermoelasticity of bodies with variable heat transfer coefficients]. *Kiev, Naukova dumka*, 1977, 158 p.

14. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Kraevye zadachi teorii uprugosti dlia shara i tsilindra [Boundary-value problems of the theory of elasticity for a sphere and a cylinder]. *Kazan*, *Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta*, 2008, 207 p.

15. Tyuleneva O.N., Gur'ianov N.G. Kraevye zadachi termouprugosti dlia shara [Boundary thermoelasticity problems for a sphere]. *Saarbucken, LAP LAMBERT Academic Publishing*, 2012, 160 p.

16. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Prostranstvennaia zadacha termouprugosti dlia sfericheskogo kupola [Prostranstvennaia zadacha termouprugosti dlia sfericheskogo kupola]. *Moscow, Teoriia i praktika sovremennoi nauki: sbornik statei XV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*, 2014, pp. 10-17.

17. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Zadacha termouprugosti dlia shara [The problem of thermoelasticity for a sphere]. *Nizhny Novgorod, Fundamental'nye problemy teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki: sbornik tezisov dokladov XVserossiiskogo s"ezda*, 2011, no. 4 (4), pp. 1466-1467.

18. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Dvoiakoperiodicheskoe reshenie zadachi termouprugosti dlia pologo shara [A two-periodic solution of the thermoelasticity problem for a hollow sphere]. *Tashkent, Sovremennye problemy mekhaniki: sbornik statei Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii*, 2009, vol. 1, pp. 283-288.

19. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. Tochnoe reshenie nesimmetrichnoi zadachi teorii uprugosti dlia tsilindra v temperaturnom pole [Exact solution of the asymmetric elasticity problem for a cylinder in a temperature field]. *Kazan, Fundamental'nye problemy teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki: sbornik tezisov dokladov XI Vserossiiskogo s"ezda*, 2015, pp.1106-1108.

20. Gur'ianov N.G., Tyuleneva O.N. A spherical dome in the temperature field. *Russian Aeronautics*, 2013, vol. 56, no. 1, pp. 7-14.

21. Popov G.Ia., Belkasem K. Tochnoe reshenie smeshannoi neosesimmetrichnoi kraevoi zadachi teorii uprugosti dlia krugovogo tsilindra konechnoi dliny [The exact solution of a nonsymmetric boundary value problem for the theory of rounding for a circular cylinder of finite length]. *Doklady Akademii nauk*, 2010, vol. 433, no 1, pp. 48-54.

22. Popov G.Ia. Osesimmetrichnye kraevye zadachi teorii uprugosti dlia tsilindrov i konusov konechnoi dliny [Axisymmetric boundary value problems of the theory of rounding for cyclinders and cones of finite length]. *Doklady Akademii nauk*, 2011, vol. 439, no. 2. pp. 192-197.

23. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analiticheskaia teoriia teploprovodnosti i prikladnoi termouprugosti [Analytical theory of heat conductivity and applied thermoelasticity]. *LIBROKOM*, 2012, 656 p.

24. Fastovskaia T.B. Sushchestvovanie global'nykh reshenii nelineinoi zadachi termouprugosti [The existence of global solutions of the nonlinear problem of thermoelasticity]. *Khar'kov, Aktual'nye napravleniia nauchnykh issledovanii XXI veka: teoriia i* praktika, 2014, vol. 2, no. 4, pp. 125-127.

25. Chanyu Shang Global attractor for the Ginzburg-Landay thermoviscoelastic system with hinger boundary conditions. *Math.Anal.Appl.*, 343 (2008), pp. 1-21.

26. Satalkina L.V. Nesviazannaia zadacha nelineinoi termouprugosti dlia telia s singuliarnoi granitsei [The unrelated problem of nonlinear thermoelasticity for bodies with a singular boundary]. *Tula, Vestnik TulGU «Aktual'nye voprosy mekhaniki»*, 2009, no. 5. pp. 157-160.

27. Rodionov A.Iu. Tochnye resheniia uravnenii termouprugosti [Exact solutions of the thermoelasticity equation]. *Institut prikladnoi mekhaniki Vladikavkazskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2009, vol. 11, no. 1, pp. 54-62.

28. Shevchenko A.V. Primenenie variatsionnogo metoda pri raschete zamknutykh tsilindricheskikh obolochek s uchetom temperaturnykh deformatsii [Application of the variational method for the calculation of closed cylindrical shells with allowance for temperature deformations]. *Vestnik BGTU im. V.G.Shukhova*, 2005, no. 10, pp. 492-494.

29. Baiden O.V., Shapovalov S.M., Shevchenko A.V. Uchet temperaturnykh deformatsii pri raschete zamknutykh tsilindricheskikh obolochek variatsionnym metodom [The account of temperature deformations at calculation of the closed cylindrical shells by a variational method]. Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii, 2009, no. 5, pp.6-9.

30. Volkov A.E., Kukhareva A.S. Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia v tsilindre iz TiNi pri okhlazhdenii pod nagruzkoi i razgruzke [Calculation of the stress-strain state in a cylinder from TiNi under cooling under load and unloading]. *Moscow, Izvestiia RAN, seriia fizicheskaia*, 2008, vol. 72, no. 9. pp. 1337-1340.

31. Ivanov A.S., Kovalev V.I., Tsapovskaia O.A. Temperaturnye napriazheniia v sploshnom dlinnom tsilindres peremennym ob"emnym teplovydeleniem [Temperature stresses in a continuous long cylinder with variable volumetric heat release]. *Moscow, Problemy Mashinostroeniia i avtomatizatsii*, 2008, no. 1, pp. 111-114.

32. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leont'ev K.A. O reshenii nekotorykh zadach o napriazhenno-deformirovannom sostoianii anizotropnykh tolstostennykh obolochek vrashcheniia v trekhmernoi postanovke [On the solution of some problems on the stress-strain state of anisotropic thick-walled shells of revolution in a three-dimensional formulation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2004, vol. 10, no. 3, pp. 301-310.