



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.12

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО МНОГОЗВЕННЫМ КУСОЧНО-ЛОМАНЫМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гультияев

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 28 августа 2017 г.
Принята: 25 сентября 2017 г.
Опубликована: 30 сентября 2017 г.

Ключевые слова:

пластичность, упругость, функционалы пластичности, испытательный комплекс СН-ЭВМ, моделирование процессов деформирования, векторные и скалярные свойства материалов.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается математическое моделирование процессов упругопластического деформирования материала сталь 45 в векторном пространстве А.А. Ильюшина по многозвенным неаналитическим траекториям вида плоских многозвенных ломаных траекторий, состоящем из четырех прямолинейных кусочно-ломаных участков при его одновременном растяжении либо сжатии с кручением. При моделировании использовалась математическая модель теории процессов для плоских траекторий с уточненными аппроксимациями функционалов процесса, содержащая все необходимые параметры сложного нагружения для плоских траекторий. Основные уравнения математической модели приведены к задаче Коши, для численного решения которых и получения расчетных результатов использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Приведена методика определения материальных параметров аппроксимаций в выражениях функционалов на основе обработки экспериментальных данных по базовым траекториям типа «смещенного веера» двузвенных траекторий. Экспериментальные исследования проведены на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний Тверского государственного технического университета. В качестве образцов для экспериментальных исследований были использованы тонкостенные цилиндрические оболочки из стали 45 в состоянии поставки.

Численные теоретические расчеты сравниваются с экспериментальными данными для оценки достоверности математической модели теории процессов при сложном нагружении для данного класса траекторий деформирования. Предлагаемая математическая модель теории процессов дала результаты, хорошо соответствующие данным эксперимента, как по скалярным, так и векторным свойствам материала. Это подтверждает достаточную для практических задач достоверность расчетных данных и точность построенных аппроксимаций функционалов процессов используемой математической модели теории процессов.

© ПНИПУ

© Зубчанинов Владимир Георгиевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: vgz@rambler.ru
Алексеев Андрей Алексеевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: alexeew@bk.ru
Гультияев Вадим Иванович – доктор технических наук, доцент, e-mail: vig0@mail.ru

Vladimir G. Zubchaninov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: vgz@rambler.ru
Andrey A. Alekseev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: alexeew@bk.ru
Vadim I. Gultyaev – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: vig0@mail.ru



MODELING OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF WORK MATERIAL ALONG MULTIELEMENT PIECEWISE ZIG-ZAG LINEAR TRAJECTORIES

V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev

Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 28 August 2017
Accepted: 25 September 2017
Published: 30 September 2017

Keywords:

plasticity, elasticity, functionalities of plasticity, SN-EVM testing complex, modeling of deformation processes, vector and scalar properties of materials.

ABSTRACT

Mathematical simulation of 45 steel elastic-plastic deformation processes which takes place in Ilyushin's vector space and goes along a flat multielement trajectory. Each trajectory consists of four rectilinear piecewise broken segments with its simultaneous stretching or compression with torsion. In the simulation, a mathematical model of the theory of processes for plane trajectories with refined approximations of the process functionalities was used which contains all the necessary parameters for the complex loading for plane trajectories. The basic equations of the mathematical model are reduced to the Cauchy problem, the Runge-Kutta method of the accuracy fourth order was used for the numerical solution and the calculation results.

A technique is given for determining the material parameters of approximations in the expressions for the functionalities by processing the experimental data on basic trajectories of the "displaced fan" type of two-link trajectories. The experimental test on the SN-EVM testing complex has been carried out in mechanical laboratories in Tver State Technical University. Cylinder thin-walled shells from steel 45 in the condition of delivery were used as physical models for researching on the SN-EVM testing complex.

The results of the theoretical numerical calculations are compared with the experimental data to assess the validity of the mathematical models of the processes under complex loading for these types of trajectories of deformation. The offered mathematical model of the theory of processes yields adequate results which are correspond well to the experimental data on material scalar and vector properties. It confirms the reliability of the settlement data which is sufficient for practical issues and accuracy of the constructed approximations of processes' functionalities related to the used mathematical model of the theory of processes.

© PNRPU

1. Основные положения

Тензоры напряжений и деформаций, характеризующие напряженно-деформированное состояние (НДС) точки тела, можно разложить на шаровые тензоры и девиаторы [1–3]:

$$\mathbf{T}_\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad \mathbf{T}_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \varepsilon(\mathcal{E}_{ij}^*), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{ij}}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

– модули шаровых тензоров и девиаторов соответственно;

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad \mathcal{E}_{ij}^* = \frac{\mathcal{E}_{ij}}{\varepsilon}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

– компоненты девиаторов и направляющих тензоров напряжений и деформаций соответственно.

При простом пропорциональном нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций $(S_{ij}^*) = (\mathcal{E}_{ij}^*)$ и определяющие соотношения теории малых упругопластических деформаций, предложенной в [1], с учетом упругости объемной деформации имеют вид

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, S_{ij} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \varepsilon_{ij} = 2G_p \varepsilon_{ij}, (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где K – модуль объемной упругости; G_p – пластический модуль сдвига; $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ – универсальная единой диаграммы упрочнения материалов Роша и Эйхингера при простом нагружении, определяющая только скалярные свойства материалов для произвольного НДС. При сложном нагружении направляющие тензоры $(S_{ij}^*) \neq (\varepsilon_{ij}^*)$ и учет в определяющих соотношениях только скалярных свойств материалов недостаточен.

В работах А.А. Ильюшина [2–4] и В.Г. Зубчанинова [11] в линейном совмещенном евклидовом пространстве E_6 с ортонормированным неподвижным базисом $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}$ было использовано представление тензоров \mathbf{T}_σ и \mathbf{T}_ε в виде векторов:

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^0 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = S_k \hat{\mathbf{i}}_k, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \bar{\boldsymbol{\Theta}}, \quad \bar{\boldsymbol{\Theta}} = \Theta_k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (k=1, 2, \dots, 5), \quad (5)$$

где $\bar{\mathbf{S}}^0 = S_0 \hat{\mathbf{i}}_0$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{i}}_0$ – векторы напряжений и деформаций в одномерном подпространстве объемного растяжения и сжатия с гидростатической осью, характеризуемой единичным вектором $\hat{\mathbf{i}}_0$; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ – векторы напряжений и деформаций формоизменения в пятимерном девиаторном подпространстве E_5 . Координаты векторов связаны с компонентами тензоров и девиаторов взаимно однозначными преобразованиями [2–6]

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, & S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \varepsilon_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, & \varepsilon_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, & \varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}. \end{cases} \quad (6)$$

Модули векторов в пятимерном подпространстве E_5 равны модулям девиаторов напряжений и деформаций соответственно:

$$\sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_k \varepsilon_k} = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}, \quad (k=1, 2, \dots, 5), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

В работе [3] А.А. Ильюшин представил основное соотношение постулата изотропии, которое в дальнейшем в работах [2, 7–9] было дополнено соотношением для отображения влияния векторных свойств материалов. Общие определяющие соотношения теории процессов получены в работах [5, 6]. Они отражают связь между векторами напряжений $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ и деформаций $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ формоизменения с учетом скалярных и векторных свойств материалов. Для случая плоских траекторий без учета ε_2 -эффекта определяющие соотношения в скалярной форме имеют вид [5, 6]

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{ds} = M_1 \frac{d\varepsilon_k}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{S_k}{\sigma}, & (k=1, 3), \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (8)$$

где $M_1, \frac{d\sigma}{ds}$ – функционалы процесса деформирования, зависящие от параметров сложного нагружения; s – длины дуги траектории деформирования, ее кривизны κ_1 и углов излома ϑ_1^0 . Угол сближения ϑ_1 характеризует направление $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ по отношению к касатель-

ной к траектории деформирования в каждой ее точке. Этот угол отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования.

2. Математическая модель теории процессов в плоских задачах

В математической модели в дополнение к определяющим соотношениям (8) используются универсальные аппроксимации функционалов [5]

$$\sigma(s) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - \Delta\sigma_k, \quad (9)$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q, \quad (10)$$

где $\Phi(s)$ – универсальная функция нагружения Одквиста–Ильюшина для процессов, близких к простым, без учета их истории; $\Delta s = s - s_k^T$ – приращение длины дуги траектории после ее излома в некоторой точке K ; $\Delta\sigma_k = \Phi(s_k^T) - \sigma_k^T$ – разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквиста–Ильюшина и расчетным значением модуля вектора напряжений σ_k^T ; $2G_p = \Phi(s) / s$; индекс «нолик» у пластического модуля сдвига соответствует значению G_p в точке излома траектории;

$$\Omega(\Delta s) = -\left[\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} + b(1 - e^{-\gamma\Delta s}) \right]; \quad \Omega' = -\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} [1 + b - \gamma\Delta s] \quad (11)$$

– функция, описывающая после излома траектории скалярный нырок напряжений при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании, и ее производная;

$$f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}; \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (12)$$

– функция, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования, и ее значение в точке излома при значении угла сближения ϑ_1^0 каждого из участков неаналитической траектории; A, b, γ, p, q – материальные параметры материала, для определения которых ниже предложена методика на основе обработки экспериментальных данных для каждого материала.

Для аппроксимации универсальной функции упрочнения Одквиста–Ильюшина $\Phi(s)$ при простом нагружении использовались выражения [5]

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}), & \text{при } 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_* (1 - e^{-\beta(s - s^T)}), & \text{при } s > s^T. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$; σ_T – предел текучести при растяжении; s^T – граница участков диаграммы деформирования, разделяющая упругую часть диаграммы и площадку текучести ($0 \leq s \leq s^T$) от участка самоупрочнения материала ($s > s^T$); G – упругий модуль сдвига; $\sigma_*, G_*, \alpha, \beta$ – экспериментально определяемые параметры материала из опытов на простое нагружение по типу «центрального веера» прямолинейных траекторий [5].

При заданных начальных условиях для координат \mathcal{E}_k ($k = 1, 3$) вектора деформаций и начальных значениях угла ϑ_1^0 основные уравнения (8) с конкретизированными функцио-

налами (9), (10) приводятся к задаче Коши, для численного решения которой и определения координат S_k ($k = 1, 3$) вектора напряжений и угла сближения ϑ_1 использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности в программном приложении MathWorks MatLab.

Ранее данная математическая модель была использована [10] для описания процессов деформирования только по двузвенным ломаным прямолинейным траекториям. Другие заслуживающие внимания идеи построения определяющих соотношений и проведения базовых экспериментальных исследований представлены в работах [12–30].

3. Методика определения материальных параметров аппроксимаций

Для определения материальных параметров использован базовый опыт траекторий «смещенного веера» для кусочно-ломаной прямолинейной траектории с углом излома на 135 градусов. Общая диаграмма прослеживания процесса деформирования $\sigma(s)$ такой траектории в сравнении с универсальной функцией упрочнения Одквиста–Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$ представлена на рис. 1.

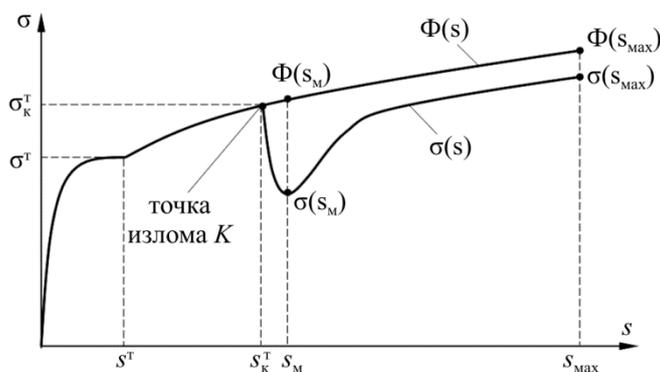


Рис. 1. К определению материальных параметров
Fig. 1. To the definition of material parameters

Разность между значениями $\Phi(s)$ и действительными значениями модуля напряжений на диаграмме при $\Delta\sigma_K = 0$ определяется так:

$$\Phi(s) - \sigma(s) = -Af_0^p \Omega(\Delta s). \quad (14)$$

В точке минимума нырка напряжений на диаграмме $\sigma(s)$ имеем $\Omega'(\Delta s) = 0$, следовательно, $\gamma\Delta s_M = 1 + b$. Из (14) с учетом (11) имеем

$$\Phi(s_M) - \sigma(s_M) = Af_0^p (b + e^{-(1+b)}). \quad (15)$$

В точке при $s = s_{\max} \rightarrow \infty$ из (14) с учетом (11) получаем

$$\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max}) = Af_0^p b. \quad (16)$$

Возьмем отношение

$$\omega = \frac{\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})}{\Phi(s_M) - \sigma(s_M)} = \frac{b}{b + e^{-(1+b)}},$$

где после преобразований может быть получена функция

$$be^{1+b} - \frac{\omega}{1-\omega} = 0,$$

откуда находится параметр b , выражаемый через W -функцию Ламберта

$$b = LambertW\left(-\frac{\omega e^{-1}}{\omega-1}\right). \quad (17)$$

Для вычисления параметра A при вычисленном значении b по (17) предлагается использовать выражение (16), откуда

$$A = \frac{\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})}{b f_o^p}. \quad (18)$$

Для вычисления параметра γ используется значение производной в точке излома траектории при $\Delta s = 0$:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi_0}{ds} + A f_o^p \Omega'(0) = \frac{d\Phi_0}{ds} - A f_o^p \gamma(1+b), \quad (19)$$

где из (13)

$$\frac{d\Phi_0}{ds} = 2G_* + \beta \sigma_* e^{-\beta(s_*^k - s^*)}.$$

При $\vartheta_1^0 = 0$ в точке K с учетом (12) имеем $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi_0}{ds}$; при упругой разгрузке для $\vartheta_1^0 = \pi = 180^\circ$ получается $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi_0}{ds} - A\gamma(1+b) = -2G$, откуда

$$A\gamma(1+b) = \frac{d\Phi_0}{ds} + 2G.$$

Тогда с учетом (18)

$$\gamma = \frac{\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G}{A(1+b)} = \frac{b f_o^p \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G\right)}{[\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})](1+b)}. \quad (20)$$

При найденном значении b по (18) и (20) при различных показателях степени p может быть найден спектр значений параметров A , γ , выбор которых определяется наилучшим соответствием данным базового эксперимента.

4. Результаты экспериментального исследования и математического моделирования

Экспериментальное исследование было выполнено на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. В качестве образцов для эксперимен-

тальных исследований были использованы тонкостенные цилиндрические оболочки из стали 45 в состоянии поставки, имеющие в рабочей части: длину $l = 110$ мм, толщину $h = 1$ мм и диаметр срединной поверхности $d = 31$ мм. Начальная изотропия материала образцов с достаточной степенью точности была подтверждена в опытах на простое нагружение (растяжение, сжатие и кручение), где после обработки этих диаграмм были приняты следующие значения материальных параметров для стали 3 в аппроксимации (13): $\sigma^T = 285$ МПа, $s^T = 0,9 \cdot 10^{-2}$, $2G = 1,57 \cdot 10^5$ МПа, $\beta = 70$, $\alpha = 900$, $\sigma_* = 78,8$ МПа, $2G_* = 1618,9$ МПа.

Для оценки достоверности расчетных результатов по предлагаемой математической модели в пространстве деформаций $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ девиаторного подпространства E_5 реализована нетривиальная неаналитическая траектория по типу «песочные часы», состоящая из четырех прямолинейных кусочно-ломаных участков (рис. 2).

На первом прямолинейном участке реализовывалось пропорциональное кручение по координате \mathcal{E}_3 до значения $\mathcal{E}_3^* = 2,5\%$; на втором участке при изломе траектории на угол $\theta = 135^\circ$ реализовывалось комбинированное растяжение и кручение до значений $\mathcal{E}_3^* = 0$, $\mathcal{E}_1^* = 2,5\%$; на третьем участке при изломе траектории на угол $\theta = 135^\circ$ при $\mathcal{E}_1^* = 2,5\% = \text{const}$ осуществлялось кручение до $\mathcal{E}_3^* = 2,5\%$; на четвертом участке при изломе вновь на угол $\theta = 135^\circ$ реализовывалось комбинированное сжатие и кручение с приходом в начало координат.

На рис. 3 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в виде траектории нагружения в плоскости $S_1 - S_3$ совмещенного девиаторного подпространства E_5 . На рис. 4 приведены результаты расчета и экспериментальные данные для диаграмм прослеживания процессов сложного нагружения $\sigma - s$, характеризующих скалярные свойства материалов в зависимости от длины дуги s сложного деформирования, на рис. 5 – диаграммы для углов сближения $\mathcal{E}_1 - \Delta s$, характеризующие векторные свойства материалов. На рис. 6, 7 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам $S_1 - \mathcal{E}_1$ и чистого сдвига по компонентам $S_3 - \mathcal{E}_3$. На рис. 2–7 цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены точки начала соответствующих участков реализованной кусочно-ломаной траектории. Экспериментальные данные на рисунках отмечены точками; модельные расчетные данные отмечены синим цветом.

В расчете на всех участках траектории использовались значения материальных параметров, найденные по (17), (18), (20) при показателе степени $p = 4$, которые были равны соответственно: $b = 0,125$, $A = 595,34$ МПа, $\gamma = 240,56$. Показатель степени p на втором участке принимался равным 4. На последующих участках его значение подбиралось из условия соответствия глубины «нырка напряжений» данным эксперимента и принималось $p = 6,2$ – для третьего участка и $p = 1$ – для четвертого. Показатель степени q на всех участках принимался $q = 0,8$.

В расчетах также было учтено, что начальное отклонение \mathcal{E}_1^0 вектора напряжений не всегда соответствует углу излому траектории $\theta = 135^\circ$. На первом изломе в точке 2 после участка простого нагружения $\mathcal{E}_1^0 \approx \theta = 135^\circ$. Перед вторым и третьим изломом вектор на-

пряжений имел отклонение, что учитывалось при численном решении в виде начального условия для участка траектории $\vartheta_1^0 = 135^\circ \pm \vartheta_1^k$, где ϑ_1^k – расчетное значение угла сближения в конце предшествующего участка перед изломом траектории. Перед вторым изломом при переходе от второго к третьему участку траектории расчетное значение $\vartheta_1^k \approx 9,5^\circ$, при этом излом траектории в точке 3 производился в сторону отклонения вектора напряжений, поэтому в расчете принималось $\vartheta_1^0 = 135^\circ - 9,5^\circ = 125,5^\circ$. Перед третьим изломом (переход от третьего к четвертому участку траектории) расчетное значение $\vartheta_1^k \approx 17^\circ$, а излом траектории в точке 4 производился в сторону, противоположную отклонению вектора напряжений, поэтому здесь $\vartheta_1^0 = 135^\circ + 17^\circ = 152^\circ$.

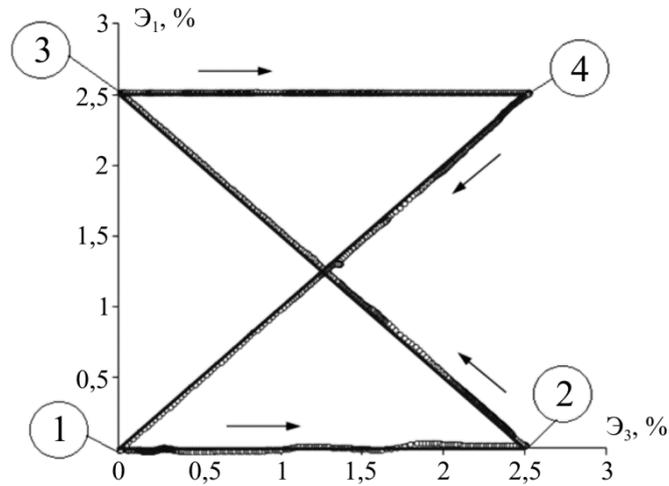


Рис. 2. Траектория деформирования на плоскости $\vartheta_1 - \vartheta_3$
 Fig. 2. Deformation trajectory on the plane $\vartheta_1 - \vartheta_3$

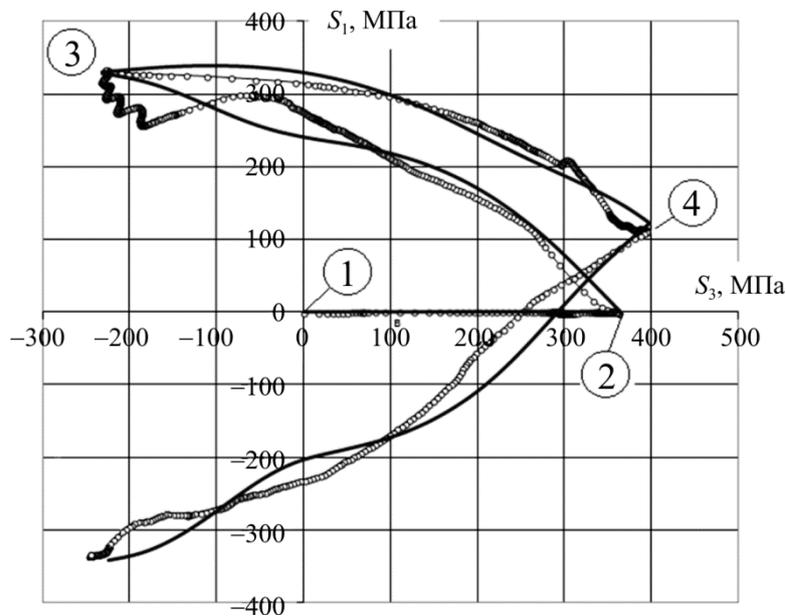


Рис. 3. Отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$
 Fig. 3. Response of tension on the plane $S_1 - S_3$

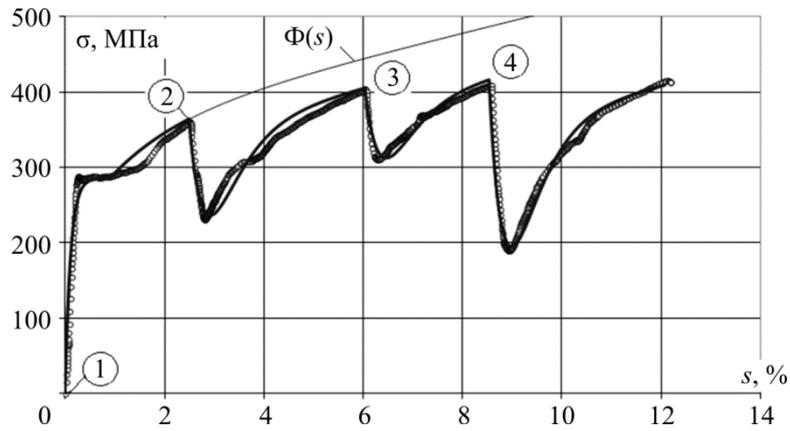


Рис. 4. Глобальная диаграмма деформирования $\sigma - s$
 Fig. 4. General chart of deformation $\sigma - s$

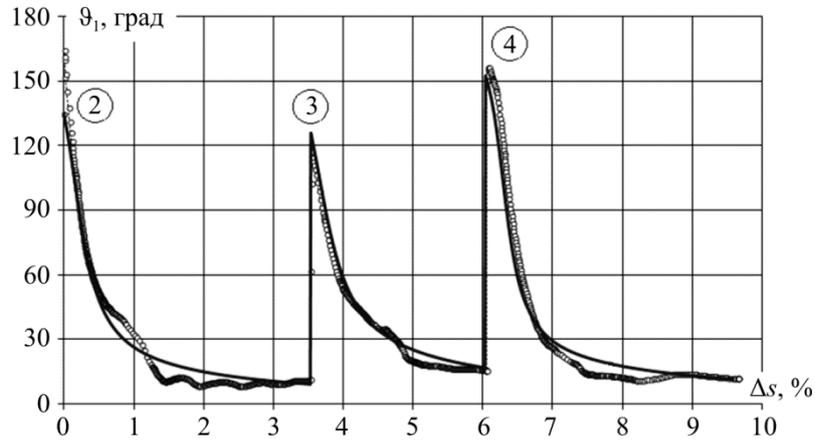


Рис. 5. Диаграмма характеристики векторных свойств материала $\vartheta_1 - \Delta s$
 Fig. 5. Chart that characterize the vector material properties $\vartheta_1 - \Delta s$

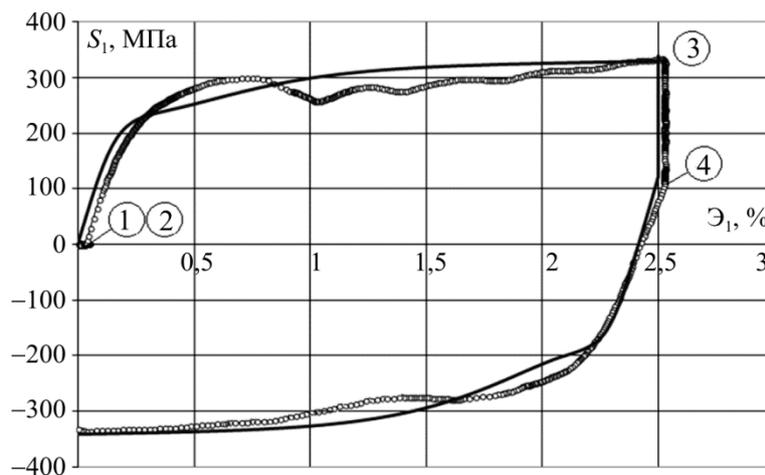


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \vartheta_1$
 Fig. 6. Local chart of deformation $S_1 - \vartheta_1$

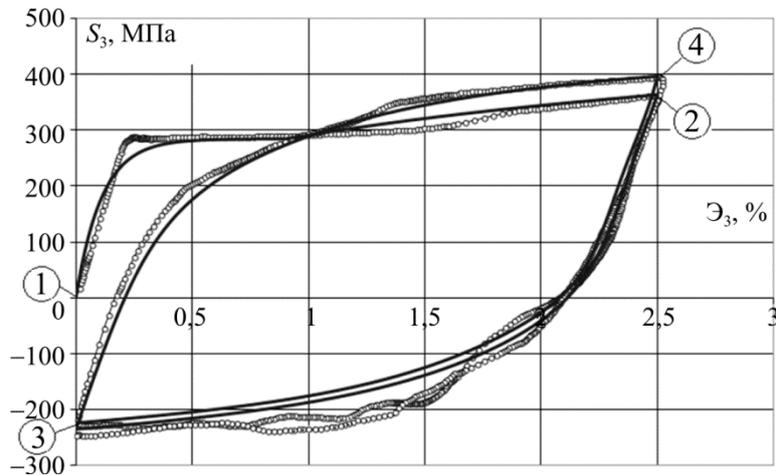


Рис. 7. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \varepsilon_3$
 Fig. 7. Local chart of deformation $S_3 - \varepsilon_3$

Как видно, принятые для модели данные достаточно хорошо соответствуют экспериментальным как по скалярным, так и по векторным свойствам.

Заключение

Сравнение результатов теоретических численных расчетов с результатами экспериментального исследования по заданной сложной многозвенной траектории показало достаточную для практических задач достоверность расчетных данных и точность построенных аппроксимаций функционалов процессов используемой математической модели теории процессов [3–5].

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Уругопластические деформации. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 310 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 273 с.
4. Ильюшин А.А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
5. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.
6. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.
7. Ленский В.С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Изв. АН СССР, ОТН. – 1962. – № 5. – С. 154–158.
8. Дао Зуй Бик. О гипотезе локальной определенности в теории пластичности // Вестн. МГУ. Сер. «Математика, механика». – 1965. – № 2. – С. 67–75.
9. Васин Р.А., Ильюшин А.А. Об одном представлении законов упругости и пластичности в плоских задачах // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – № 4. – С. 114–118.
10. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультияев В.И. Численное моделирование процессов сложного уругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2014. – Вып. 76. – Ч. 1. – С. 18–25.

11. Зубчанинов В.Г. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 27–37. DOI: 10.3103/S0025654411010043
12. Ленский В.С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упруго-пластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.
13. Васин Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – С. 59–126.
14. Некоторые экспериментальные данные об общем законе пластичности Ильюшина / И. Охаши, М. Токуда, И. Курита, Т. Сузуки // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – № 6. – С. 53–64.
15. Ленский В.С., Ленский Э.В. Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. – 1985. – № 4. – С. 111–115.
16. Ленский В.С., Машков И.Д. Проверка законов в трехмерном пространстве девиатора деформаций // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – № 2. – С. 158–166.
17. Васин Р.А. Идеи Ильюшина А.А., обогатившие теорию пластичности // Упругость и неупругость: материалы междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А.Ильюшина. – М.: Изд-во МГУ, 2016. – С. 66–69.
18. Васин Р.А. Теория упругопластических процессов и исследование структурно-механических свойств материалов // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 1. – С. 19–26.
19. Васин Р.А. О «памяти» материала в теории упругопластических процессов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естественные науки. – 2013. – № 2–2. – С. 59–70.
20. Муравлев А.В. Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических областях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. – 1996. – № 5. – С. 74–80.
21. Муравлев А.В. Обобщение постулата изотропии теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина на конечные деформации // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VIII Междунар. науч. симпозиума. – Тверь: Изд-во Твер. гос. техн. ун-та, 2015. – С. 25–29.
22. Муравлёв А.В., Девятков А.С. Развитие теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина и экспериментально-теоретических методов исследования вязкопластических свойств материалов при конечных деформациях // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 84–90.
23. Жуков А.М. Некоторые особенности поведения металлов при упругопластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30–57.
24. Жуков А.М. О свойствах запаздывания в общей теории пластичности // Изв. АН. МТТ. – 1992. – № 5. – С. 110–119.
25. Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю. Основные положения теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина: анализ с позиций многоуровневого моделирования для случая больших градиентов перемещений // Упругость и неупругость: материалы междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А.Ильюшина. – М.: Изд-во МГУ, 2016. – С. 119–126.
26. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть в машиностроительных конструкциях. – М.: Машиностроение, 1967. – 130 с.
27. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.
28. Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. Некоторые вопросы верификации теории упругопластических процессов при сложном нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 3. – С. 98–105.
29. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г.. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). – 2015. – Т. 24, № 2. – С. 107–118.

30. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г. Проверка постулата изотропии и численное моделирование процессов деформирования материалов на сложных гладких траекториях // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Т. 29, № 2. – С. 150–157.

References

1. Iliushin A.A. Plastichnost'. Uprugoplasticheskie deformatsii [Plasticity. Elastic-plastic deformation]. Moscow, Gostekhizdat, 1948, 376 p.
2. Iliushin A.A. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum Mechanics]. Moscow, Izdatelstvo MSU, 1990, 310 p.
3. Iliushin A.A. Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii [Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory]. Moscow, Izdatelstvo AS USSR, 1963, 273 p.
4. Iliushin A.A. Trudy (1946-1966). T.2. Plastichnost' [Works (1946-1966). Vol. 2. Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 480 p.
5. Zubchaninov V.G. Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of processes in plastic environments]. Moscow, Fizmatlit, 2010, 352 p.
6. Zubchaninov V.G. Ustoichivost' i plastichnost'. T.2. Plastichnost' [Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 336 p.
7. Lenskii V.S. Gipoteza lokal'noi opredelennosti v teorii plastichnosti. *Izv. Akad. Nauk USSR, OTN*. 1962, no. 5. pp. 154-158.
8. Dao Zui Bik. O gipoteze lokal'noi opredelennosti v teorii plastichnosti. *Vestnik MSU, Seriya «Matematika, mekhanika»*. 1965, no. 2. pp. 67-75.
9. Vasin R.A., Iliushin A.A. Ob odnom predstavlenii zakonov uprugosti i plastichnosti v ploskikh zadachakh. *Izv. Akad. Nauk USSR. MTT*. 1983, no. 4. pp. 114-118.
10. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gul'tiaev V.I. Chislennoe modelirovanie protsessov slozhnogo uprugoplasticheskogo deformatsionnogo stali po dvuzvennykh lomanykh traektoriiam [Numerical simulation a processes of complex elastoplastic deformation steel on two-link broken trajectories]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 2014. vol. 76. no. 1. pp. 18-25.
11. Zubchaninov V.G. Isotropy postulate and the law of complex unloading of continua. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 21-29. DOI: 10.3103/S0025654411010043
12. Lenskii V.S. Eksperimental'naya proverka osnovnykh postulatov obshchei teorii uprugoplasticheskikh deformatsii [Experimental verification of the fundamental postulates of the general theory of elastoplastic deformations]. Moscow, Izdatelstvo AS USSR, *Voprosy teorii plastichnosti. Questions theory plasticity*, 1961, pp. 58-82.
13. Vasin R.A. Nekotorye voprosy svyazi napriazhenii i deformatsii pri slozhnom nagruzhении [Some questions of the relationships between stresses and deformations under complex loading]. Moscow, Izdatelstvo MSU, *Uprugost' i neuprugost' – Elasticity and anelasticity.*, 1971, vol. 1. pp. 59-126.
14. Okhashi I., Tokuda M., Kurita I., Suzuki T. Nekotorye eksperimental'nye dannye ob obshchem zakone plastichnosti Il'iushina, *Izv. Akad. Nauk USSR, MTT*, 1981. No. 6. pp. 53-64.
15. Lenskii V.S., Lenskii E.V. Trekhchlennoe sootnoshenie obshchei teorii plastichnosti // *Izv. Akad. Nauk USSR, MTT*. 1985, no 4. pp. 111-115.
16. Lenskii V.S., Mashkov I.D. Proverka zakonov v trekhmernom prostranstve deviatora deformatsii. Moscow, MSU, *Uprugost' i neuprugost'*, 1971, no. 2, pp. 158-166.
17. Vasin R.A. Idei Il'iushina A.A., obogativshie teoriiu plastichnosti. Moscow, Izdatelstvo MSU, *Uprugost' i neuprugost' – Elasticity and anelasticity.*, 2016, pp. 66-69.
18. Vasin R.A. Theory of elastoplastic processes and study of structure-mechanical properties of materials, *Mechanics of Solids*. 2011. vol. 46, no. 1, pp. 15-20.
19. Vasin R.A. O "pamiati" materiala v teorii uprugoplasticheskikh protsessov [On the «memory» of the material in the theory of elastoplastic processes]. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki – News of the Tula state university. Natural sciences*. 2013, no. 2-2. pp. 59-70.
20. Muravlev A.V. Eksperimental'noe postroenie funktsionalov plastichnosti dlia traektorii deformatsii tipa dvukhzhvennykh lomanykh v opytakh na sploshnykh tsilindricheskikh oblastiakh. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya I: Matematika. Mekhanika*, 1996, no. 5. pp. 74-80.
21. Muravlev A.V. Obobshchenie postulata izotropii teorii uprugoplasticheskikh protsessov A.A. Il'iushina na konechnye deformatsii. *Tver', TvSTU, Problemy prochnosti, plastichnosti i ustoichivosti v mekhanike deformiruемого tverdogo tela.*, 2015. pp. 25-29.

22. Muravlev A.V., Deviatov A.S. Razvitie teorii uprugoplasticheskikh protsessov A.A. Il'ushina i eksperimental'no-teoreticheskikh metodov issledovaniia viazkoplasticheskikh svoystv materialov pri konechnykh deformatsiakh [Development of il'yushin elastoplastic processes theory and experimental-theoretical methods for studying viscoplastic material properties at finite deformations, *Problemy mashinostroeniia i avtomatizatsii – Engineering & Automation Problems*. 2016, no. 1. pp. 84-90.

23. Zhukov A.M. Nekotorye osobennosti povedeniia metallov pri uprugoplasticheskom deformirovani. Moscow: Izdatelstvo AS USSR, *Voprosy teorii plastichnosti – Questions theory plasticity.*, 1961. pp. 30-57.

24. Zhukov A.M. O svoistvakh zapazdyvaniia v obshchei teorii plastichnosti. *Izvestiia Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 1992. No. 5, pp. 110-119.

25. Trusov P.V., Shveikin A.I., Iants A.Iu. Osnovnye polozheniia teorii uprugoplasticheskikh protsessov A.A. Il'ushina: analiz s pozitsii mnogourovnevnogo modelirovaniia dlia sluchaia bol'shikh gradientov peremeshchenii. Moscow, *Izdatelstvo MSU, Uprugost' i neuprugost' – Elasticity and anelasticity.*, 2016, pp. 119-126.

26. Degtiarev V.P. Plastichnost' i polzuchest' v mashinostroitel'nykh konstruktsiakh. Moscow, *Mashinostroenie*, 1967, 130 p.

27. Shevchenko Iu.N., Babeshko M.E., Terekhov R.G. Termoviazkouprugoplasticheskie protsessy slozhnogo deformirovaniia elementov konstruksii. Kiev, *Naukova Dumka*, 1992, 328 p.

28. Molodtsov I.N., Babaeva D.O. Nekotorye voprosy verifikatsii teorii uprugoplasticheskikh protsessov pri slozhnom nagruzhении [Some problems of verification of plastic-elastic complex loading processes], *Problemy mashinostroeniia i avtomatizatsii – Engineering & Automation Problems*. 2016, no. 3, pp. 98-105.

29. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G. Matematicheskoe modelirovanie protsessov plasticheskogo deformirovaniia materialov po slozhnym ploskim traektoriiam [Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories]. *Materials Physics and Mechanics (MPM)*, 2015, vol. 24, no. 2, pp. 107-118.

30. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G. Proverka postulata izotropii i chislennoe modelirovanie protsessov deformirovaniia materialov na slozhnykh gladkikh traektoriiakh [Verification of the postulate of the isotropy and numerical simulation of the deformation of materials on a complex smooth trajectories]. *Materials Physics and Mechanics*, 2016, vol. 29, no. 2. pp. 150-157.