



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.2.05

УДК 539.3

## НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ДИСКРЕТНЫМ НАБОРОМ ШПАНГОУТОВ

**А.А. Дудченко, В.Н. Сергеев**

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 07 ноября 2016 г.  
Принята: 06 мая 2017 г.  
Опубликована: 30 июня 2017 г.

#### Ключевые слова:

коническая оболочка, дискретный набор шпангоутов, дельта-функция, неоднородно-ортотропный моментный материал, геометрическая и физическая сторона задачи, нелинейные уравнения равновесия.

### АННОТАЦИЯ

Одно из важных направлений в механике деформируемого тела представлено работами, которые посвящены исследованию напряженного состояния подкрепленных тонких оболочек.

Упрощенные методы расчета подкрепленных оболочек, базирующиеся на моделях, использующих концепцию «размазывания», далеко не всегда дают удовлетворительные результаты. Поэтому развитие и углубление методов расчета таких оболочек является актуальным и идет по пути учета дискретности расположения подкрепляющего набора с выявлением порождаемых им особенностей напряженно-деформированного состояния.

Учет дискретности расположения набора при полноценно работающей обшивке основывается на процедуре «склейки» решений для оболочки и набора по участкам, а также на основе вариационных и конечно-элементных методов.

В последние годы появился ряд работ, в которых дискретность подкрепляющего набора предлагается учитывать, записывая переменную жесткость системы с помощью дельта-функции Дирака. Задача сводится к уравнениям с сингулярными коэффициентами.

Коническая оболочка, подкрепленная дискретным набором, представляет собой дискретно-континуальную систему, сочетающую континуальный элемент – собственно оболочку и дискретные элементы – шпангоуты. Указанная система рассматривается с помощью аппарата обобщенных функций как «единая» оболочка из некоторого неоднородно-ортотропного моментного материала, т.е. как оболочка переменной жесткости.

В работе представлена математическая модель деформирования подкрепленной конической оболочки. Приведен вывод нелинейных уравнений равновесия оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов с помощью аппарата векторного анализа. Рассмотрена геометрическая сторона задачи. При рассмотрении физической стороны приведены соотношения упругости для оболочки и дан вывод соотношений упругости шпангоута.

© ПНИПУ

© Дудченко Александр Александрович – доктор технических наук, профессор, e-mail: a\_dudchenko@mail.ru

Сергеев Валерий Николаевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: k603sergeev@mail.ru

Aleksandr A. Dudchenko – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: a\_dudchenko@mail.ru

Valeriy N. Sergeev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: k603sergeev@mail.ru



## NONLINEAR EQUILIBRIUM EQUATIONS OF THE CONICAL SHELL STIFFENED BY A DISCRETE SET OF FRAMES

A.A. Dudchenko, V.N. Sergeev

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 07 November 2016

Accepted: 06 May 2017

Published: 30 June 2017

#### Keywords:

conical shell, discrete set of frames, delta function, non-homogeneous orthotropic generalized material, geometrical and physical aspects of the problem, nonlinear equilibrium equations.

### ABSTRACT

Studying the stress state of stiffened thin shells is one of important issues of solid mechanics.

The simplified methods of computing the stiffened shells based on the models that use the concept of "smoothing" do not always give satisfactory results. Therefore, it is relevant to develop and investigate the computational methods for such shells; and it is in line with considering the discreteness of the position of the stiffening set of frames and identifying the characteristics of stress-strain states that are generated by them. In order to take into account the discreteness of the location of the set of frames in case of a fully operating skin, we "joint" the solutions for the shell and the set of frames, as well as used the variational and finite element methods.

A number of works have recently appeared where authors suggest considering the discreteness of the stiffen set by recording the variable stiffness of the system using the Dirac delta function. The problem is reduced to equations with singular coefficients.

The conical shell which is stiffened with a discrete set of frames is a discrete-continuous system which combines the continual element, i.e. – the shell itself and discrete components, i.e. –frames. This system is considered by means of generalized functions as an "integrated" shell of a non-homogeneous orthotropic generalized material, i.e. as a shell with a variable stiffness.

The paper presents the mathematical model of the deformation of the stiffened conical shell. The derivation of the nonlinear equilibrium equations of the shell are supported by a discrete set of frames using vector analysis. Also the geometrical aspect of the problem is considered here. When considering the physical aspects, we provide the elasticity equations for the shell and obtain the equations of the frame elasticity.

© PNRPU

---

### Введение

В настоящей работе рассматривается коническая оболочка, подкрепленная дискретным набором шпангоутов.

Исследованию гладких оболочек посвящено большее количество работ [2, 6–10, 12, 20–22, 29, 37, 41]. Дискретно подкрепленные оболочки по сравнению с гладкими оболочками представляют собой не только значительно более содержательный, но и значительно более сложный объект исследования. Современный этап развития теории ребристых оболочек начинается с работ [3, 19–22], в которых сформулированы общие принципы теории оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. При этом ребристая оболочка рассматривается как конструкция, состоящая из собственно оболочки и подкрепляющих ее одномерных упругих элементов.

Упрощенные методы расчета подкрепленных оболочек, широко применяющиеся в практических разработках, базируются на концепции «размазывания», т.е. замене подкрепленной оболочки некоторой гладкой конструктивно-ортотропной моделью [3, 16–18, 24, 40–41]. Такой подход далеко не всегда дает удовлетворительные результаты [6]. Поэтому развитие и углубление методов расчета таких оболочек идет по пути учета дискретности расположения подкрепляющего набора с выявлением порождаемых им особенностей напряженно-деформированного состояния.

Развитие и углубление методов расчета таких оболочек идет по пути учета дискретности расположения подкрепляющего набора с выявлением порождаемых им особенностей напряженно-деформированного состояния.

Вместе с вышеизложенными традиционными постановками известны работы, использующие другие расчетные модели ребристых оболочек. Прежде всего следует сказать о возможности решения задачи путем «склейки» решений для оболочки и набора по участкам. Здесь необходимо отметить, что подобные решения возможны лишь в случаях, когда для каждого из стыкуемых участков можно предварительно получить решение при произвольных граничных условиях по месту соединения гладких оболочек вращения с дискретными шпангоутами. Здесь по окружной координате решение должно удовлетворять лишь условиям периодичности. Указанный подход применим при любых граничных условиях на торцах оболочки, в то время как для оболочки с продольным дискретным набором решение «склежкой» возможно только при классических граничных условиях на торцах. На указанном подходе базируются исследования подкрепленных пластин и оболочек в работах [7, 30, 34–36, 38].

В ряде работ расчет подкрепленных систем с учетом дискретности производится на основе вариационных методов, что позволяет избежать процедуры «склейки». Задача решается в перемещениях. Единая для оболочки и набора деформированная поверхность аппроксимируется двойными или одинарными рядами. В результате задача сводится к бесконечным системам связанных алгебраических или дифференциальных уравнений, решение которых ищется численно, либо в некоторых частных случаях – аналитически, например в работе [14–15, 31].

В некоторых работах дискретность подкрепляющего набора предлагается учитывать, записывая переменную жесткость системы с помощью дельта-функции Дирака [5, 11, 21–26, 28, 30–32, 34–36]. Такой подход также позволяет избежать процедуры «склейки». Задача сводится к уравнениям с коэффициентами, содержащими особенности дельта-функции

Общий метод построения решения уравнений с коэффициентами, содержащими особенности типа дельта-функции и их производных, дан в работах [16, 23–24, 28, 30, 32]. Этот метод может быть использован в качестве общей основы исследования всевозможных объектов, сочетающих непрерывные элементы с дискретными.

## 1. Основная интерпретация задачи. «Единая» оболочка

В данной работе представлена математическая модель конической оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов. Такая оболочка представляет собой дискретно-континуальную систему, сочетающую континуальный элемент – собственно оболочку и дискретные элементы – шпангоуты. Следуя [16, 27, 29, 31], будем рассматривать указанную систему с помощью аппарата обобщенных функций как «единую» оболочку из некоторого неоднородно-ортотропного моментного материала (среда Коссера) т.е. как оболочку переменной жесткости.

Пусть  $N_{11}^{об}, N_{22}^{об}, N_{12}^{об}, N_{21}^{об}, Q_{11}^{об}, Q_{22}^{об}, M_{11}^{об}, M_{22}^{об}, M_{12}^{об}, M_{21}^{об}$  – погонные усилия и моменты в конической оболочке, а  $N_{n2j}^{III}, Q_{n1j}^{III}, Q_{n3j}^{III}, M_{n1j}^{III}, M_{n2j}^{III}, M_{n3j}^{III}$  – составляющие внутренних сил (нормальная и перерезывающая силы и изгибающие и крутящий моменты в поперечном  $j$ -го шпангоута в осях подвижного триедра.

Введем обобщенные погонные усилия и моменты в «единой» оболочке (рис. 1):

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_{11}^{06}, & N_2 &= N_{22}^{06} + \frac{1}{A^*} \sum_j N_{n2j}^m \delta(\alpha - \alpha_j), \\
 S_1 &= N_{12}^{06}, & S_2 &= N_{21}^{06} + \frac{1}{A^*} \sum_j Q_{n1j}^m \delta(\alpha - \alpha_j), \\
 Q_1 &= Q_{11}^{06}, & Q_2 &= Q_{22}^{06} + \frac{1}{A^*} \sum_j Q_{n3j}^m \delta(\alpha - \alpha_j), \\
 M_1 &= M_{11}^{06}, & M_2 &= M_{22}^{06} + \frac{1}{A^*} \sum_j M_{n1j}^m \delta(\alpha - \alpha_j), \\
 M_3 &= \frac{1}{A^*} \sum_j M_{n3j}^m \delta(\alpha - \alpha_j), \\
 H_1 &= M_{12}^{06}, & H_2 &= M_{21}^{06} + \frac{1}{A^*} \sum_j M_{n2j}^m \delta(\alpha - \alpha_j).
 \end{aligned} \quad (1)$$

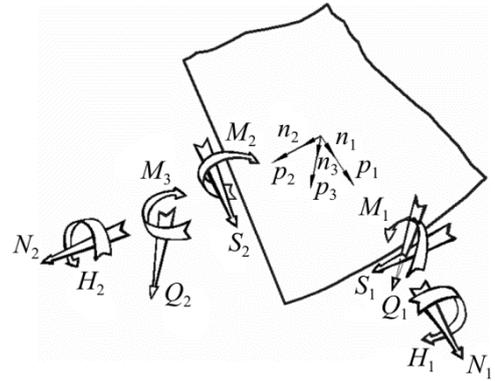


Рис. 1. Внутренние силовые факторы  
Fig. 1. Stress factors

Здесь  $N_1, N_2, S_1, S_2, Q_1, Q_2$  – нормальные, касательные и перерезывающие усилия;  $M_1, M_2, H_1, H_2$  – изгибающие и крутящие моменты;  $M_3$  – моментное взаимодействие материала;  $\delta(\alpha - \alpha_j)$  – дельта-функция, сосредоточенная на параллели  $\alpha = \alpha_j$ . Криволинейная координата  $\alpha$  отсчитывается вдоль образующей конической поверхности;  $A^*$  – соответствующий коэффициент первой квадратичной формы деформированной поверхности.

## 2. Криволинейные координаты. Метрика поверхности

Рассмотрим прямой круговой конус. Выберем систему декартовых координат  $(x, y, z)$  так, чтобы его начало было совмещено с вершиной конуса. Положение точки  $M$  срединной поверхности будем фиксировать в координатной сетке, состоящей из линий главных кривизн, т.е. из образующих конической поверхности и семейства параллелей.

Пусть  $\beta$  – двугранный угол между текущим и некоторым фиксированным меридиальным сечениями оболочки;  $\alpha$  – некоторый параметр, отсчитываемый в направлении образующей;  $f(\alpha)$  – расстояние между текущей параллелью и вершиной конуса.

Уравнение конической поверхности в параметрической форме

$$x = f(\alpha) \sin \gamma \cos \beta, \quad y = f(\alpha) \sin \gamma \sin \beta, \quad z = f(\alpha) \cos \beta, \quad (2)$$

где параметры  $\alpha$  и  $\beta$  – криволинейные координаты точки  $M$  (рис. 2).

Пусть  $ds$  произвольно ориентированный малый линейный элемент срединной поверхности, соединяющий точки с криволинейными координатами  $\alpha, \beta$  и  $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta$ . Квадрат длины этого элемента

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = A^2 (d\alpha)^2 + 2AB \cos \chi d\alpha d\beta + B^2 (d\beta)^2, \quad (3)$$

где

$$A^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2, \quad B^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2, \quad (4)$$

$$AB \cos \chi = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta}.$$

Здесь  $\chi$  – угол между координатными линиями. Внося (2) в (4), имеем

$$A = f'(\alpha), \quad B = f(\alpha) \sin \gamma, \quad \chi = \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

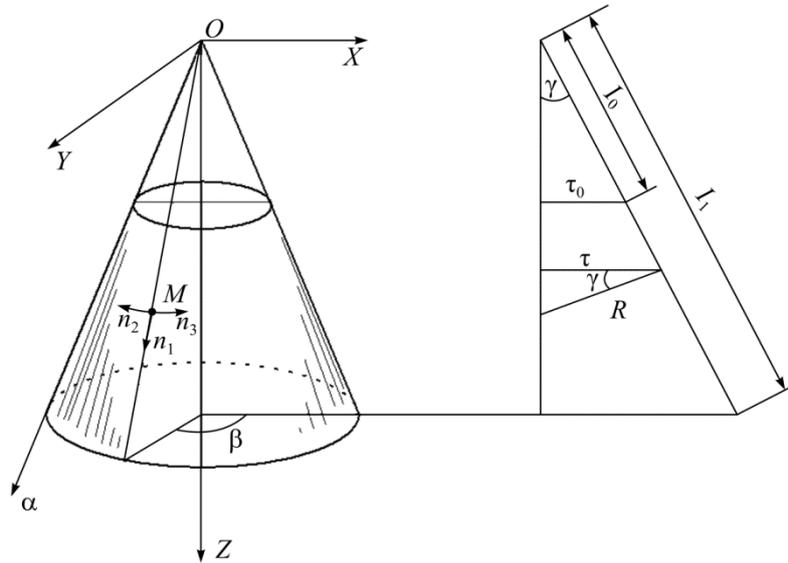


Рис. 2. Геометрия конической оболочки  
Fig. 2. Geometry of the conical shell

Введем в рассмотрение тангенциальные орты  $n_1$  и  $n_2$ , ориентированные в направлении возрастания координат  $\alpha$  и  $\beta$  по координатным линиям  $\beta = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$  соответственно, и орт нормали  $n_3 = n_1 \times n_2$ . Орты  $n_1, n_2, n_3$  образуют подвижный векторный базис. Производные скалярных, а также векторных функций криволинейных координат  $\alpha, \beta$  по направлению ортов  $n_1, n_2$

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial n_2} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}. \quad (6)$$

### 3. Геометрическая сторона задачи

Пусть  $\rho(\alpha, \beta)$  – радиус-вектор точки  $M$  срединной поверхности до деформации,  $\rho^*(\alpha, \beta)$  – радиус-вектор точки  $M$  после деформации,  $U(\alpha, \beta)$  – вектор упругого смещения той же точки. Очевидно,

$$p = xi + yi + zk, \quad p^* = x^*i + y^*j + z^*k, \quad p^* = p + U, \quad (7)$$

где  $i, j, k$  – орты декартовой системы координат, а  $x, y, z$  и  $x^*, y^*, z^*$  – соответственно декартовы координаты точки  $M$  до и после деформации.

Из (7) следует

$$x^* = p^* \cdot i = x + U \cdot i, \quad y^* = p^* \cdot j = y + U \cdot j, \quad z^* = p^* \cdot k = z + U \cdot k. \quad (8)$$

Выражениями (8) представлены параметрические уравнения деформированной поверхности оболочки. Линейный элемент  $ds^*$  этой поверхности определяется первой квадратичной формой

$$(ds^*)^2 = A^{*2}(d\alpha)^2 + 2A^*B^*\cos(n_1^*, n_2^*)d\alpha d\beta + B^{*2}(d\beta)^2, \quad (9)$$

где аналогично (4)

$$A^{*2} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \alpha}\right)^2, \quad B^{*2} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \beta}\right)^2, \quad (10)$$

$$A^*B^*\cos(n_1^*, n_2^*) = \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} \frac{\partial x^*}{\partial \beta} + \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} \frac{\partial y^*}{\partial \beta} + \frac{\partial z^*}{\partial \alpha} \frac{\partial z^*}{\partial \beta}.$$

Из (8) с учетом (6) имеем

$$\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} = A \left( n_1 + \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) i, \quad \frac{\partial x^*}{\partial \beta} = B \left( n_2 + \frac{\partial U}{\partial n_2} \right) i, \quad \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} = A \left( n_1 + \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) j, \quad (11)$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial \beta} = B \left( n_2 + \frac{\partial U}{\partial n_2} \right) j, \quad \frac{\partial z^*}{\partial \alpha} = A \left( n_1 + \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) k, \quad \frac{\partial z^*}{\partial \beta} = B \left( n_2 + \frac{\partial U}{\partial n_2} \right) k.$$

Внося (11) в (10) и пренебрегая квадратами малых величин и их произведениями, найдем

$$A^* = A \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial n_1} n_1 \right), \quad B^* = B \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial n_2} n_2 \right), \quad A^*B^*\cos(n_1^*, n_2^*) = AB \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_2 + \frac{\partial U}{\partial n_2} n_1 \right). \quad (12)$$

Пусть через точку  $M$  срединной поверхности проходит некоторая кривая, заданная в параметрической форме

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t). \quad (13)$$

Представим орт  $t$ , направленный по касательной к этой кривой, в виде линейной комбинации

$$t = \alpha n_1 + \beta n_2 = (t n_1) n_1 + (t n_2) n_2. \quad (14)$$

Пусть  $ds_t$  – дифференциал дуги кривой (13). Из (3) имеем

$$(ds_t)^2 = [A^2 \dot{\alpha}^2 + 2AB \cos \chi \dot{\alpha} \dot{\beta} + B^2 \dot{\beta}^2] (dt)^2, \quad (15)$$

где  $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ ,  $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$ .

Материальный отрезок после деформации будет иметь длину  $ds_t^*$ . Согласно (2)

$$(ds_t^*)^2 = (A^{*2} \dot{\alpha}^2 + 2A^*B^* \cos(n_1^*, n_2^*) \dot{\alpha} \dot{\beta} + B^{*2} \dot{\beta}^2) (dt)^2. \quad (16)$$

Развернем (16) с помощью (12). Пренебрегая квадратами малых величин и их произведениями, с учетом (15) найдем

$$ds_t^* = ds_t \left[ 1 + \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_1 \right) (t \cdot n_1)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_2 + \frac{\partial U}{\partial n_2} n_1 \right) (t \cdot n_1)(t \cdot n_2) + \left( \frac{\partial U}{\partial n_2} n_2 \right) (t \cdot n_2)^2 \right]. \quad (17)$$

Выражением (17) представлена длина ориентированного в направлении произвольного тангенциального орта  $t$  материального отрезка. Относительная деформация этого отрезка  $\varepsilon_t = \frac{ds_t^* - ds_t}{ds_t}$  на основании (17) будет выражена так:

$$\varepsilon_t = \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_1 \right) (tn_1)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_2 + \frac{\partial U}{\partial n_2} n_1 \right) (tn_1)(tn_2) + \left( \frac{\partial U}{\partial n_2} n_2 \right) (tn_2)^2. \quad (18)$$

Совмещая орт  $t$  с направлением  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно получим

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U}{\partial n_1} n_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial U}{\partial n_2} n_2. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь угловые деформации срединной поверхности оболочки. Пусть через точку  $M$  срединной поверхности проходят две кривые:

$$\alpha = \alpha_1(t), \beta = \beta_1(t) \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_2(t), \beta = \beta_2(t), \quad (20)$$

орты которых  $t_1$  и  $t_2$ . Косинус угла между этими ортами

$$\cos(t_1, t_2) = t_1 t_2 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2, \quad (21)$$

где направляющие косинусы определяются выражениями

$$l = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad m = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad n = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (22)$$

Материальные линии, совпадающие с (20), после деформации займут новое положение. Пусть  $t_1^*$ ,  $t_2^*$  – единичные орты этих линий в новом положении. Их направляющие косинусы

$$l_t^* = \frac{1}{1 + \varepsilon_t} \frac{\partial x^*}{\partial t}, \quad m_t^* = \frac{1}{1 + \varepsilon_t} \frac{\partial y^*}{\partial t}, \quad n_t^* = \frac{1}{1 + \varepsilon_t} \frac{\partial z^*}{\partial t}. \quad (23)$$

Пользуясь (8) и (21)–(23), с точностью до бесконечно малых высшего порядка найдем

$$\cos(t_1^*, t_2^*) = t_1^* t_2^* = (1 - \varepsilon_{t_1} - \varepsilon_{t_2})(t_1 t_2) + t_1 \frac{\partial U}{\partial t_2} + t_2 \frac{\partial U}{\partial t_1}. \quad (24)$$

Ввиду малости угловой деформации  $\gamma_{t_1 t_2} = (t_1 t_2) - (t_1^*, t_2^*)$ ,

$$\cos(t_1^*, t_2^*) = \cos(t_1, t_2) + \gamma_{t_1 t_2} \sin(t_1, t_2). \quad (25)$$

Теперь, внося (24) в (25), найдем

$$\gamma_{t_1 t_2} = \frac{1}{\sin(t_1, t_2)} \left[ t_1 \frac{\partial U}{\partial t_2} + t_2 \frac{\partial U}{\partial t_1} \right] - \text{ctg}(t_1, t_2) (\varepsilon_{t_1} - \varepsilon_{t_2}). \quad (26)$$

Выражением (26) представлено изменение угла между произвольными направлениями на срединной поверхности. Поскольку координатные линии ортогональны,

$$\gamma_{n_1 n_2} = \gamma_{12} = n_1 \frac{\partial U}{\partial t_2} + n_2 \frac{\partial U}{\partial t_1}. \quad (27)$$

Рассмотрим компоненты изгибной деформации срединной поверхности. Пусть  $\rho_3(\alpha, \beta, x_3)$  – радиус-вектор точки  $M_3$  эквидистантой поверхности, отстоящей от срединной поверхности на расстояние  $x_3$ , отсчитываемое по нормали  $n_3$ . Очевидно,

$$\rho_3 = \rho + x_3 n_3. \quad (28)$$

Зададим на срединной поверхности некоторую кривую  $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t)$ . Ее радиус-вектор

$$\rho_t = \rho_t(t) = \rho[\alpha(t), \beta(t)], \quad (29)$$

где  $s_t$  и  $t$  – соответственно дуга и единичный орт кривой.

Кривой (29) на эквидистантой поверхности соответствует кривая  $\rho_{3t} = \rho_{3t}(t, x_3) = \rho_3[\alpha(t), \beta(t), x_3]$ .

На основании (28)–(29)

$$\rho_{3t} = \rho_t + x_3 n_3(\rho_t). \quad (30)$$

Дифференцируя (30), получим

$$\frac{\partial \rho_{3t}}{\partial s_t} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t} = t + x_3 \frac{\partial n_3}{\partial t}. \quad (31)$$

Из (31) имеем

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial n_1} = n_1, \quad \frac{\partial \rho_3}{\partial n_2} = \left(1 - \frac{x_3 \cos \gamma}{B}\right) n_2. \quad (32)$$

Пусть  $\rho_3^*$  – радиус-вектор точки  $M_3$  после деформации. Имеем

$$\rho_3^* = \rho_3 + U_3(\rho_3), \quad (33)$$

где  $U_3(\rho_3) = U_3(\alpha, \beta, x_3)$  – вектор упругого смещения точки  $M_3$ .

В соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява

$$\rho_3^*(\rho, x_3) = \rho^*(\rho) + x_3 n_3^*(\rho), \quad (34)$$

где  $n_3^*$  – орт нормали к срединной поверхности после деформации.

Приравняв правые части (33) и (34), с учетом (28), (7) найдем

$$U_3(\rho_3) = U(\rho) + x_3 \Delta n_3(\rho_t). \quad (35)$$

Дифференцируя (35), получаем

$$\frac{\partial \rho_{3t}^*}{\partial s_t} = \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial t}. \quad (36)$$

Выражение (36) определяет вектор, направленный по касательной к деформированной  $t$ -линии.

Пусть  $ds_{\varepsilon t}$  – элементарный отрезок дуги  $t$ -линии до деформации. С учетом (35)

$$ds_{\varepsilon t} = \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \right| ds_t. \quad (37)$$

После деформации материальный отрезок  $ds_{\varepsilon t}$  будет иметь новую длину  $ds_{\varepsilon t}^*$ . С учетом (36)

$$ds_{\varepsilon t}^* = \left| \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t} \right| ds_t. \quad (38)$$

На основании (37)–(38) относительная деформация элемента  $t$ -линии

$$\varepsilon_{\varepsilon t} = \frac{ds_{\varepsilon t}^* - ds_{\varepsilon t}}{ds_{\varepsilon t}}$$

будет

$$\varepsilon_{\varepsilon t} = \left| \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t} \right| / \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \right| = 1. \quad (39)$$

Умножим выражение (36) скалярно само на себя и, пренебрегая квадратами и произведениями малых величин, найдем

$$\left| \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t} \right|^2 = \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \right|^2 + \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial t} \right) / \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \right|. \quad (40)$$

Внося (40) в (39), получим

$$\varepsilon_{\varepsilon t} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial t} \right) / \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \right|. \quad (41)$$

Выражение (41) носит общий характер. Совмещая орт  $t$  с любым направлением в срединной поверхности, легко получить выражения для линейной деформации эквидистантной поверхности. С учетом (32) найдем

$$\varepsilon_{1\varepsilon} = \frac{\partial U}{\partial n_1} n_1 + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_1} n_1, \quad \varepsilon_{2\varepsilon} = \frac{1}{1 - \frac{x_3 \cos \gamma}{B}} \left( \frac{\partial U}{\partial n_2} n_2 + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_2} n_2 \right). \quad (42)$$

Рассмотрим угловые деформации в эквидистантной поверхности. Пусть через точку  $M$  срединной поверхности проходят две кривые

$$\rho_{t_1} = \rho_{t_1}(t_1), \rho_{t_2} = \rho_{t_2}(t_2). \quad (43)$$

На эквидистантной поверхности  $x = \text{const}$  им соответствуют кривые

$$\rho_{\varepsilon t_1} = \rho_{t_1} + x_3 n_3(\rho_{t_1}), \quad \rho_{\varepsilon t_2} = \rho_{t_2} + x_3 n_3(\rho_{t_2}). \quad (44)$$

Дифференцируя (43), имеем

$$\frac{\partial \rho_{t_1}}{\partial s_{t_1}} = \frac{\partial \rho}{\partial t_1} = t_1, \quad \frac{\partial \rho_{t_2}}{\partial s_{t_2}} = \frac{\partial \rho}{\partial t_2} = t_2, \quad (45)$$

где  $s_{t_1}, s_{t_2}$  и  $t_1, t_2$  – соответственно дуги и орты кривых (43).

Дифференцируя (44), с учетом (30), (45) найдем

$$\frac{\partial \rho_{\vartheta t_1}}{\partial s_{t_1}} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t_1} = t_1 + x_3 \frac{\partial n_3}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial \rho_{\vartheta t_2}}{\partial s_{t_2}} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t_2} = t_2 + x_3 \frac{\partial n_3}{\partial t_2}. \quad (46)$$

Выражением (46) представлены векторы, направленные по касательным к недеформированным  $t$ -линиям. Соответствующие им единичные векторы

$$t_{\vartheta 1} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t_1} / \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t_1} \right|, \quad t_{\vartheta 2} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t_2} / \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t_2} \right|. \quad (47)$$

После деформации  $t$ -линии лежат на поверхности (33). Дифференцируя (33), имеем

$$\frac{\partial \rho_{\vartheta t_1}^*}{\partial s_{t_1}} = \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_1} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t_1} + \frac{\partial U}{\partial t_1} + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial \rho_{\vartheta t_2}^*}{\partial s_{t_2}} = \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_2} = \frac{\partial \rho_3}{\partial t_2} + \frac{\partial U}{\partial t_2} + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial t_2}. \quad (48)$$

Выражения (48) определяют векторы, направленные по касательным к деформированным  $t$ -линиям. Соответствующие им единичные векторы

$$t_{\vartheta 1}^* = \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_1} / \left| \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_1} \right|, \quad t_{\vartheta 2}^* = \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_2} / \left| \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_2} \right|. \quad (49)$$

Косинусы углов между  $t$ -линиями до и после деформации определяются как

$$\cos(t_{\vartheta 1}, t_{\vartheta 2}) = \frac{\frac{\partial \rho_3}{\partial t_1} \frac{\partial \rho_3}{\partial t_2}}{\left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t_1} \right| \left| \frac{\partial \rho_3}{\partial t_2} \right|}, \quad \cos(t_{\vartheta 1}^*, t_{\vartheta 2}^*) = \frac{\frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_1} \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_2}}{\left| \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_1} \right| \left| \frac{\partial \rho_3^*}{\partial t_2} \right|}. \quad (50)$$

Для малых угловых деформаций  $\gamma_{t_1 t_2}^3 = (t_{\vartheta 1}, t_{\vartheta 2}) - (t_{\vartheta 1}^*, t_{\vartheta 2}^*)$

$$\cos(t_{\vartheta 1}^*, t_{\vartheta 2}^*) = \cos(t_{\vartheta 1}, t_{\vartheta 2}) + \gamma_{t_1 t_2}^3 \sin(t_{\vartheta 1}, t_{\vartheta 2}), \quad (51)$$

вследствие чего

$$\gamma_{t_1 t_2}^3 = \frac{\cos(t_{\vartheta 1}^*, t_{\vartheta 2}^*) - \cos(t_{\vartheta 1}, t_{\vartheta 2})}{\sin(t_{\vartheta 1}, t_{\vartheta 2})}. \quad (52)$$

Теперь, развертывая (50) с помощью (34) и (48) и внося результат в (52), нетрудно получить выражение для угловой деформации.

Совместим  $t_1$  с  $n_1$ , а  $t_2$  с  $n_2$ . Тогда из (30)

$$t_{31} = n_1, t_{32} = n_2. \quad (53)$$

На основании (53) из (52) следует, что

$$\gamma_{n_1 n_2}^3 = \cos(n_1^*, n_2^*), \quad (54)$$

где  $n_1^*, n_2^*$  – орты  $n_1$  и  $n_2$  линий после деформаций.

Развертывая выражение (54) с помощью (30) и (48) с точностью до бесконечно малых второго порядка, находим

$$\gamma_{n_1 n_2}^3 = \frac{1}{1 - x_3 \cos \gamma} \left[ \frac{\partial U}{\partial n_1} n_2 + \frac{\partial U}{\partial n_2} n_1 + x_3 \left( \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_2} n_1 + \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_1} n_2 - \frac{\cos \gamma}{B} \frac{\partial U}{\partial n_1} n_1 \right) \right]. \quad (55)$$

Таким образом, формулами (42) и (55) представлены линейные и угловые деформации эквидистантной поверхности в осях подвижного векторного базиса. При  $x_3 = 0$  эти выражения совпадают с соответствующими выражениями для деформации срединной поверхности.

Для рассматриваемых оболочек  $\frac{x_3}{B} \ll 1$ , поэтому, положив  $1 \pm \frac{x_3 \cos \gamma}{B} \approx 1$ , будем в дальнейшем исходить из выражений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} &= \varepsilon_1 + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_1} n_1, & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_2 + x_3 \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_2} n_2, \\ \gamma_{n_1 n_2}^3 &= \gamma_{12}^3 = \gamma_{12} + x_3 \left( \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_2} n_1 + \frac{\partial \Delta n_3}{\partial n_1} n_2 - \frac{\cos \gamma}{B} \frac{\partial U}{\partial n_1} n_2 \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Выражения (56) могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_1 + x_3 \chi_1, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_2 + x_3 \chi_2, \quad \gamma_{12}^3 = \gamma_{12} + 2x_3 \chi_{12}, \quad (57)$$

где

$$\chi_1 = -\frac{\partial}{\partial n_1} \left( n_3 \frac{\partial U}{\partial n_1} \right), \quad \chi_2 = -\frac{\partial}{\partial n_2} \left( n_3 \frac{\partial U}{\partial n_2} \right) - \frac{\sin \gamma}{B} n_3 \frac{\partial U}{\partial n_1}, \quad \chi_{12} = -n_3 \frac{\partial^2 U}{\partial n_1 \partial n_2}. \quad (58)$$

Величины  $\chi_1, \chi_2$  представляют собой компоненты изгибной деформации срединной поверхности;  $\chi_{12}$  определяет кручение срединной поверхности.

Разворачивая выражения (56) и (57), получим известные формулы [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + u \sin \gamma - w \cos \gamma \right), & \gamma_{12} &= \gamma_{12}^1 + \gamma_{12}^2 = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right), \\ \chi_1 &= -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & \chi_2 &= -\frac{1}{B^2} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{B}{A} \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) w + \cos \gamma \frac{\partial v}{\partial \beta} \right], \\ \chi_{12} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{B} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} + v \cos \gamma \right) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

#### 4. Статическая сторона задачи

Выделим сечениями  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha + d\alpha = \text{const}$ ,  $\beta + d\beta = \text{const}$  элемент оболочки. Пусть  $\bar{R}$  – вектор равнодействующей, а  $M$  – вектор момента относительно точки  $M$  всех сил, приложенных к элементу. С точностью до бесконечно малых высших порядков вектор  $\bar{N}$  может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ (N_1 + S_1 + Q_1) B^* d\beta \right] d\alpha + \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ (N_2 + S_2 + Q_2) A^* d\alpha \right] d\beta + A^* B^* \bar{P} d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (60)$$

где  $\bar{P}$  – вектор интенсивности поверхностной нагрузки, отнесенной к площади срединной поверхности, а  $N, S, Q$  – векторы обобщенных погонных усилий (1), приложенных к контуру выделенного элемента (см. рис. 1), причем на площадках с «положительными» внешними нормальными,

$$\begin{aligned} N_1 = N_1 n_1^*, \quad S_1 = S_1 n_2^*, \quad Q_1 = Q_1 n_3^*, \\ N_2 = N_2 n_2^*, \quad S_2 = S_2^R n_1^* + S_2^S n_2^* n_3^*, \quad Q_2 = Q_2 n_3^*, \end{aligned} \quad (61)$$

где в соответствии с (1)

$$S_2^R = N_{21}^{06}, S_2^S = \frac{1}{A^*} \sum_j Q_{n_{1j}}^m \delta(\alpha - \alpha_j). \quad (62)$$

Вектор  $\bar{M}$  с точностью до бесконечно малых высших порядков может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ (M_1 + H_1) B^* d\beta \right] d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ (M_2 + H_2 + M_3) A^* d\alpha \right] d\beta - \\ & - \left[ (N_1 + S_1 + Q_1) n_1^* + (N_2 + S_2 + Q_2) n_2^* \right] A^* B^* d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (63)$$

где  $M$  и  $H$  – погонные векторы обобщенных изгибающего и крутящего моментов (I.I), приложенных к контуру элемента (см. рис. 1), причем на площадках с «положительными» внешними нормальными:

$$\begin{aligned} M_1 = M_1 n_2^*, \quad M_2 = -M_2^R n_1^* - M_2^S n_2^* n_3^*, \quad M_3 = M_3 n_3^*, \\ H_1 = -H_1 n_1^*, \quad H_2 = H_2 n_2^*, \end{aligned} \quad (64)$$

где в соответствии с (1)

$$M_2^R = M_{22}^{06}, M_2^S = \frac{1}{A^*} \sum_j M_{n_{1j}}^m \delta(\alpha - \alpha_j). \quad (65)$$

Из условий равновесия выделенного элемента  $\bar{N} = \bar{M} = 0$  следует

$$N n_2^* n_3^* = N n_2^* = N n_3^* = M n_2^* n_3^* = M n_2^* = M n_3^* = 0. \quad (66)$$

В развернутой форме уравнения (66) принимают вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2 A^*) + (S_1 B^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} + (N_2 A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} + (S_2^R A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} + \\ & + (Q_1 B^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \alpha} + (Q_2 A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \beta} + A^* B^* p_1^* = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha} (S_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A^*) + n_1^* n_2^* \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2^R A^*) \right] + (N_1 B^*) n_2^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \alpha} + (S_2^R A^*) n_2^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} - \\ & - (S_2^R A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} - (Q_1 B^*) n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} - (Q_2 A^*) n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} + A^* B^* p_2^* = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Q_2 A^*) - (N_1 n_1^* + S_1 n_2^*) B^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \alpha} - (N_2 n_2^* + S_2^R n_1^*) A^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \beta} - (S_2^S A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \beta} + \\ & + A^* B^* p_3^* = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 A^*) - (M_1 B^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} - (H_2 A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} + \\ & + (M_2^R A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} - (M_3 A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \beta} - n_1^* n_2^* A^* B^* Q_1 - A^* B^* Q_2 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_2 A^*) - n_1^* n_2^* \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (M_2^R A^*) \right] - (H_1 B^*) n_2^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \alpha} - \\ & - (M_2^R A^*) n_2^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} + (M_2^S A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} - (M_3 A^*) n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} - A^* B^* Q_1 = 0, \\ & (M_1 B^*) n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} - (M_2^R A^*) n_3^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} + (M_2^S A^*) n_2^* n_3^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \beta} - (H_1 B^*) n_3^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \alpha} + \\ & + (H_2 A^*) n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} (M_3 A^*) - A^* B^* (S_2 - S_1) = 0, \end{aligned} \right. \tag{67}$$

где  $p_1^*, p_2^*, p_3^*$  – составляющие вектора интенсивности внешней поверхностной нагрузки в осях подвижного ортогонального триедра  $n_2^* \times n_3^*, n_2^*, n_3^*$ .

Пользуясь (19), (27) (58), нетрудно установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} n_1^* n_2^* &= \gamma_{12}, \quad n_2^* \times n_3^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} = -\sin \gamma_{12}, \quad n_2^* \times n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma_{12}^1, \\ n_2^* \times n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \gamma_{12}^1 + \frac{\cos \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \sin \gamma, \\ n_2^* \times n_3^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \alpha} &= A \chi_1, \quad n_2^* \times n_3^* \frac{\partial n_3^*}{\partial \beta} = B \chi_{12} + \cos \gamma_{12} = B \tau_\beta, \\ n_2^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \gamma_{12}) - \frac{A}{B} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta}, \quad n_2^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} = \sin \gamma \left[ 1 - \varepsilon_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \varepsilon_2) \right], \\ n_3^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \alpha} &= -A \chi_1, \quad n_3^* \frac{\partial n_1^*}{\partial \beta} = -B \chi_{12}, \quad n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} = -A \chi_{12}, \quad n_3^* \frac{\partial n_2^*}{\partial \beta} = -B \chi_2 + \cos \gamma. \end{aligned} \tag{68}$$

На основании (67) уравнения равновесия запишем в обычной форме:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2 A^*) + S_1 B \frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma_{12}^1 - A \sin \gamma S_2^R \gamma_{12} + \\
 & + N_2 A^* \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \gamma_{12}^1 + \frac{\cos \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \sin \gamma \right) + Q_1 A B \chi_1 + Q_2 A^* B \tau_\beta + p_1^* A^* B^* = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (S_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A^*) + \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) N_1 B \gamma_{12} - N_1 A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2^R A) \gamma_{12} + \\
 & + A \sin \gamma S_2^R \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \delta_2) \right] - S_2^S A^* \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \gamma_{12}^1 + \frac{\cos \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \sin \gamma \right) + Q_1 A B \chi_{12} - \\
 & - Q_2 A^* (\cos \gamma - B \chi_2) - p_2^* A^* B^* = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Q_2 A^*) - N_1 A B \chi_1 + N_2 A^* (\cos \gamma - B \chi_2) - (S_1 + S_2^R) A B \chi_{12} - \\
 & - S_2^S A^* B \tau_\beta + p_3^* A^* B^* = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 A^*) - M_1 B \frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma_{12}^1 - H_2 A^* \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \gamma_{12}^1 + \frac{\cos \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \sin \gamma \right) - \\
 & - A \sin \gamma M_2^R \gamma_{12} - M_3 A^* B \tau_\beta - Q_1 A B \gamma_{12} - Q_2 A^* B^* = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_1 B^*) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_2 A^*) - \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) H_1 B \gamma_{12} + H_1 A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} (M_2^R A) \gamma_{12} - \\
 & - A \sin \gamma M_2^R \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \varepsilon_2) \right] + M_2^S A^* \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \gamma_{12}^1 + \frac{\cos \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \sin \gamma \right) - M_3 A^* (\cos \gamma - B \chi_2) - \\
 & - Q_1 A^* B^* = 0, \\
 & (M_2^R - M_1) A B \chi_{12} + H_1 A B \chi_1 + M_2^S A^* B \tau_\beta + H_2 A^* (\cos \gamma - B \chi_2) + \frac{\partial}{\partial \beta} (M_3 A^*) - \\
 & - (S_2 - S_1) A^* B^* = 0, \\
 & A^* = A(1 + \varepsilon_1), B^* = B(1 + \varepsilon_2).
 \end{aligned} \right. \quad (69)$$

Уравнения (69) представляют собой полные нелинейные дифференциальные уравнения равновесия деформированного элемента конической оболочки в квадратичном приближении. Из этих уравнений, отбрасывая некоторые второстепенные члены, нетрудно получить различные варианты уравнений, известные в литературе [2, 3, 6, 8, 13, 27, 39].

## 5. Физическая сторона задачи

### 5.1. Соотношение упругости оболочки

Соотношения упругости для гладкой конической оболочки из однородного изотропного материала

$$\begin{aligned}
 N_{11}^{06} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), & N_{22}^{06} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2), & N_{12}^{06} &= Gh \gamma_{12}, \\
 M_{11}^{06} &= D \left( \chi_1 + \frac{\nu}{k_1 k_2} \chi_2 \right), & M_{22}^{06} &= D (\nu \chi_1 + \chi_2), & M_{12}^{06} &= M_{21}^{06} = D (1-\nu) \chi_{12}.
 \end{aligned} \quad (70)$$

## 5.2. Соотношения упругости шпангоута

Будем считать, что в общем случае шпангоут расположен относительно срединной поверхности произвольно и главные оси инерции его поперечного сечения ориентированы также произвольно (рис. 3). Контакт шпангоута с оболочкой осуществляется по линии. Будем считать, что каждое поперечное сечение шпангоута в отдельности перемещается в пространстве как абсолютно твердое тело. Пусть  $\rho$  – радиус-вектор произвольной

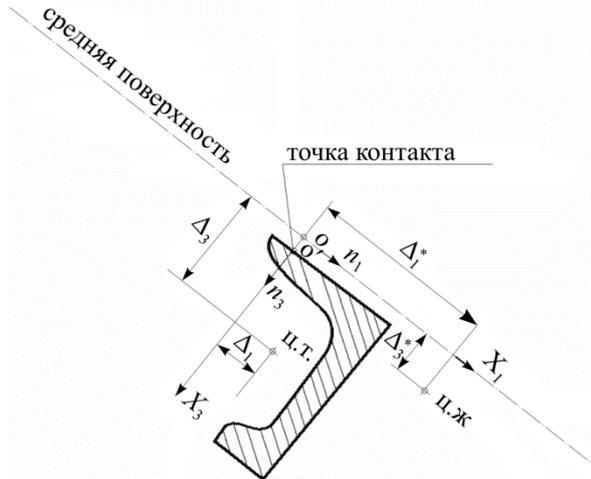


Рис. 3. Поперечное сечение шпангоута  
Fig. 3. Cross-section of the frame

точки, жестко связанной с поперечным сечением  $\beta = \text{const}$  шпангоута, отсчитываемой от точки 0 (см. рис. 3), принятой в качестве полюса. В этом случае перемещение этой точки

$$U_j(\beta, \rho) = U_j(\beta, 0) + \theta_j(\beta)\rho, \quad (71)$$

где  $\theta_j(\beta)$  – вектор малого вращения поперечного сечения  $j$ -го шпангоута.

При построении соотношений упругости для шпангоута будем считать, что его поперечное сечение  $\beta = \text{const}$  жестко связано с жесткой нормалью оболочки, проходящей через точку  $0'$  (см. рис. 3). Другими словами, для шпангоута и оболочки принимается единая гипотеза Кирхгофа-Лява-Клебша.

В силу этой гипотезы в представлении (71) следует положить

$$U_j(\beta, 0) = U(\alpha_j, \beta), \quad (72)$$

где  $\alpha_j$  – координата параллели, соответствующей линии контакта  $j$ -го шпангоута с оболочкой.

Вектор-функцию  $\theta_j$  также можно выразить через вектор-функцию смещения оболочки. Пусть  $\rho^*$  – положение радиуса-вектора  $\rho$  после деформации. На основании (71), (72) и элементарных соображений имеем соотношение  $U|_{\alpha=\alpha_j} + \theta_j \times \rho = U|_{\alpha=\alpha_j} + \rho^* - \rho$ .

Совместив радиус-вектор  $\rho$  поочередно ортами  $n_2, n_3$ , из полученного соотношения найдем

$$\theta_j n_2 = \left[ \frac{\partial U}{\partial n_2} - \varepsilon_2 n_2 \right]_{\alpha=\alpha_j}, \quad \theta_j n_3 = \left[ \frac{\partial U}{\partial n_1} n_2 + n_1 \frac{\partial U}{\partial n_2} + n_3 \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_1 + \frac{\partial U}{\partial n_1} n_2 \right) \right]_{\alpha=\alpha_j}.$$

Скалярно помножив эти соотношения поочередно на  $n_1, n_2, n_3$ , окончательно имеем

$$\theta_j n_1 = \frac{\partial U}{\partial n_2} n_3 \Big|_{\alpha=\alpha_j}, \quad \theta_j n_2 = \frac{\partial U}{\partial n_1} n_3 \Big|_{\alpha=\alpha_j}, \quad \theta_j n_3 = \frac{\partial U}{\partial n_2} n_3 \Big|_{\alpha=\alpha_j},$$

на основании чего

$$\theta_j = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial n_2} n_3 \right) n_1 - \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_3 \right) n_2 - \left( \frac{\partial U}{\partial n_2} n_1 \right) n_3 \right]_{\alpha=\alpha_j}, \quad (73)$$

что и требовалось.

Пусть  $M(\beta, x_1, x_3)$  – произвольная точка поперечного сечения  $\beta = \text{const}$  шпангоута с координатами  $x_1, x_3$ , отсчитываемыми в направлении ортов  $n_1, n_3$  от точки 0 (см. рис. 3). Радиус-вектор этой точки  $\rho(M) = x_1 n_1 + x_3 n_3$ . На основании (71)–(73) вектор упругого смещения этой точки

$$U_j(\beta, x_1, x_3) = U(\alpha_j, \beta) + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_3 \right) n_3 - \left( \frac{\partial U}{\partial n_2} n_1 \right) n_2 \right]_{\alpha=\alpha_j} x_1 - \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial n_2} n_3 \right) n_2 - \left( \frac{\partial U}{\partial n_1} n_3 \right) n_1 \right]_{\alpha=\alpha_j} x_3. \quad (74)$$

Скалярно помножив полученное выражение поочередно на  $n_1, n_2, n_3$ , после несложных преобразований с учетом (6) получим составляющие вектора упругого смещения шпангоута в скалярной форме:

$$u_j(\beta, x_3) = \left( u - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} x_3 \right)_{\alpha=\alpha_j},$$

$$v_j(\beta, x_1, x_3) = \left[ v - \frac{1}{B} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} - v \sin \gamma \right) x_1 - \frac{1}{B} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} - v \cos \gamma \right) x_3 \right]_{\alpha=\alpha_j},$$

$$w_j(\beta, x_1) = \left( w + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} x_1 \right)_{\alpha=\alpha_j}.$$

Рассмотрим теперь деформации и внутренние усилия в шпангоуте.

Переходя к центральным осям  $x_1^*, x_3^*$  поперечного сечения шпангоута, имеем

$$x_1 = x_1^* + \Delta_1, \quad x_3 = x_3^* + \Delta_3, \quad (75)$$

где  $\Delta_1, \Delta_3$  – эксцентриситеты центра тяжести поперечного сечения шпангоута (см. рис. 3).

Линейная деформация окружных волокон шпангоута

$$\varepsilon_j(\beta, x_1, x_3) = \frac{1}{(R_j - x_3) \cos \gamma} \left( \frac{\partial v_j}{\partial \beta} + u_j \sin \gamma - w_j \cos \gamma \right), \quad (76)$$

где  $R_j = R(\alpha_j)$ .

Считая размеры поперечного сечения малыми по сравнению с радиусом оболочки, приближенно примем

$$\varepsilon_j(\beta, x_1, x_2) = \frac{1}{r_j} \left( 1 + \frac{x_3}{R_j} \right) \left( \frac{\partial v_j}{\partial \beta} + u_j \sin \gamma - w_j \cos \gamma \right), \quad (77)$$

где  $r_j = r(\alpha_j) = R_j \cos \gamma$  – радиус поперечного круга линии контакта.

Нормальное напряжение в поперечном сечении шпангоута

$$\sigma_j(\beta, x_1, x_2) = E_j \varepsilon_j(\beta, x_1, x_3), \quad (78)$$

поэтому для нормального усилия и изгибающих моментов в поперечном сечении шпангоута, отсчитываемых относительно осей подвижного триедра, ориентированного в точке 0 (см. рис. 3), имеем

$$N_{n_{2j}}^{\text{III}}(\beta) = \int_{F_j} \sigma_j dF, \quad M_{n_{1j}}^{\text{III}}(\beta) = \int_{F_j} \sigma_j x_3 dF, \quad M_{n_{3j}}^{\text{III}}(\beta) = \int_{F_j} \sigma_j x_1 dF. \quad (79)$$

Разворачивая (79) с помощью (76), (78), мы будем пользоваться оценкой  $1 + \frac{\Delta}{R} \cong 1$ , где  $\Delta$  – величина порядка геометрических параметров поперечного сечения шпангоута, включая эксцентриситеты. Получим

$$N_{n_{2j}}^{\text{III}}(\beta) = \frac{E_j F_j}{r_j} \left[ \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \sin \gamma u - \cos \gamma w - \left( \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{R_j \sin \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{\Delta_3}{R_j} - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{R_j \sin \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{\Delta_1}{R_j} \right]_{\alpha=\alpha_j}, \quad (80)$$

$$M_{n_{1j}}^{\text{III}}(\beta) = \frac{E}{\cos \gamma} \left[ \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \sin \gamma u - \cos \gamma w \right) \frac{\Delta_3 F_j}{R_j} - \left( \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{R_j \sin \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{J_j^{11}}{R_j^2} - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{R_j \cos \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{J_j^{13}}{R_j^2} \right]_{\alpha=\alpha_j}, \quad (81)$$

$$M_{n_{3j}}^{\text{III}}(\beta) = \frac{E}{\cos \gamma} \left[ \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \sin \gamma u - \cos \gamma w \right) \frac{\Delta_1 F_j}{R_j} - \left( \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{R_j \sin \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{J_j^{13}}{R_j^2} - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{R_j \cos \gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{J_j^{33}}{R_j^2} \right]_{\alpha=\alpha_j}, \quad (82)$$

где  $J_j^{11}, J_j^{33}, J_j^{13}$  – осевые и центробежные моменты инерции поперечного сечения  $j$ -го шпангоута относительно осей  $x_1, x_3$ :

$$J_j^{11} = J_{j^*}^{11} + \Delta_3^2 F_j, \quad J_j^{13} = J_{j^*}^{13} + \Delta_1 \Delta_3 F_j, \quad J_j^{33} = J_{j^*}^{33} + \Delta_1^2 F_j,$$

где  $J_{j^*}^{11}, J_{j^*}^{33}, J_{j^*}^{13}$  – моменты инерции относительно центральных осей  $x_1^*, x_3^*$  (в общем случае оси  $x_1^*, x_3^*$  не являются главными).

Крутящий момент в поперечном сечении шпангоута

$$M_{n_{2j}}^{\text{III}}(\beta) = (GJ_{\kappa}) \tau_{\beta|_{\alpha=\alpha_j}} Q_{n_{1j}}^{\text{III}} \Delta_3^* - Q_{n_{3j}}^{\text{III}} \Delta_1^*, \quad (83)$$

где  $(GJ_{\kappa}), \tau_{\beta}$  – жесткость и деформация шпангоута при кручении;  $\Delta_1^*, \Delta_3^*$  – эксцентриситеты центра жесткости поперечного сечения шпангоута (см. рис. 3).

Найдем деформацию кручения шпангоута:

$$\tau_{\beta} = \frac{\partial \theta}{\partial n_2} n_2 = \frac{\partial}{\partial n_2} (\theta_j n_2) - \theta_j \frac{\partial n_2}{\partial n_2} = \frac{\partial}{\partial n_2} (\theta_j n_2) - \frac{1}{B} \theta_j (n_3 \cos \gamma - n_1 \sin \gamma).$$

Внося в формулу для  $\tau_{\beta}$  выражение (72), после элементарных преобразований найдем

$$\tau_{\beta} = \chi_{12} + \frac{1}{R} \gamma_{12}, \quad (84)$$

где  $\chi_{12}, \gamma_{12}$  – определяются согласно (59).

### Библиографический список

1. Андрианов И. В., Данишевский В. В. Упрощенные уравнения нелинейной динамики круговых цилиндрических оболочек // Вестн. С.-Петербург. ун-та. – 2011. – № 1. – С. 17–21.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. Булатов, С.Н. К проблеме расчёта подкреплённых конических оболочек сложной геометрии // Актуальные проблемы механики оболочек: тр. междунар. конф. – Казань, 1998. – С. 19–23.
4. Ванько В. И Цилиндрическая оболочка под внешним давлением: неклассическое решение задачи о больших перемещениях // Вестн. Нижегород. ун-та им. Лобачевского. – 2011. – № 4. – Ч. 4. – С. 1413–1414.
5. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
6. Власов В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек (Т. 1). – М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. – 528 с.
7. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. – 2008. – Т.49, № 5. – С. 169–176.
8. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
9. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М.: Наука, 1989. – 376 с.
10. Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г. Основания нелинейной теории оболочек. – Казань.: Изд-во Акад. наук Татарстана «Фэн», 1996. – 215 с.
11. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
12. Гольденвейзер А.Л. Теории тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
13. Даревский В.М. Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – М., 1966. – С. 355–368.
14. Дудченко А.А. Прочность и проектирование авиационных конструкций из композиционного материала. – М.: Изд-во МАИ, 2007, – 199 с.
15. Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н. Прочность композитных подкреплённых панелей, нагруженных в своей плоскости // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 84–92.
16. Жилин П.А. Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1970. – № 4. – С. 150–162.
17. Жилин П.А. Общая теория ребристых оболочек // Прочность гидротурбин: тр. ЦКТИ. – 1968. – Вып. 88. – С. 46–70.
18. Жилин П.А. К анализу краевых задач для ребристых оболочек // Прочность гидротурбин: тр. ЦКТИ. – 1966. – № 72. – С. 26–40.
19. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкреплённых оболочек вращения. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкреплённых оболочек вращения. – М.: Физматгиз, 2010. – 288 с.

20. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 5. – С. 100–106.
21. Карпов В.В., Сальников А.Ю. Вариационные методы и вариационные принципы механики при расчете строительных конструкций. – СПб., 2009. – 74 с.
22. Карпов В.В. Метод вариационных предельных преобразований в теории оболочек, имеющих нерегулярности // Вестн. гражданских инженеров. – 2005. – № 4(5). – С. 37–42.
23. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
24. Лазарян В.А., Конашенко С.И. Обобщенные функции в задачах механики. – Киев: Наук. думка, 1974. – 192 с.
25. Климанов В.И, Тимашев С.А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек / УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1985. – 291 с.
26. Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 196 с.
27. Муштари Х.М., Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань, 1975. – 326 с.
28. Новицкий В.В. Дельта-функция и ее применение в строительной механике // Расчет пространственных конструкций. – 1962. – Вып. 8. – С. 207–245.
29. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – JL: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
30. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 660 с.
31. Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 3. – С. 63–71.
32. Онанов Г.Г. Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных // ДАН СССР. – 1970. – Т. 1, № 5. – С. 997–1000.
33. Рейсснер Э.Э. Линейная и нелинейная теория оболочек. Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С. 55–69.
34. Семенов А.А., Овчаров А.А. Математическая модель деформирования ортотропных конических оболочек // Инженерный вестник Дона. – 2014. – Т. 29. – Вып. 2. – С. 74–77.
35. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. – № 1. – С. 49–63.
36. Общая нелинейная теория упругих оболочек / Черных К.Ф. [и др.]. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. – 388 с.
37. Chrobot B. Mathematical models of ribbed Shells // Studia Geotechnica et Nechanica. – 1982. – Vol. IV. – No. 3–4. – P. 55–68.
38. Reissner E. Linear and Nonlinear Theory of Shells // Thin-shell structures: theory, experimenyand Design, Prentice – Hall inc., 1974. – P. 29–44.
39. Swaddiwudhipohg S., Tian J., Wang C.M. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via ritz method // Thin walled structures. – 1999. – Vol. 35. – P. 1–24.
40. Yang. B., Zhou J. Analysis of ring-stiffened cylindrical shells // Journal of Applied Mechanics. – 1995. – Vol. 62. – P. 1005–1014.

## References

1. Andrianov I.V., Danishevskij V.V. Uproshchennye uravneniya nelinejnoj dinamiki krugovyh cilindricheskikh obolochek [Simplified equations of nonlinear dynamics of circular cylindrical shells]. *Sankt-Peterburg, Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, 2011, no. 1, pp. 17-21

2. Biderman V.L. Mechanics of thin-walled constructions [Mechanics of thin-walled structures]. *Moscow: Mashinostroenie*, 1977, 488 p.
3. Bulatov S.N. K probleme raschyota podkrepnykh konicheskikh obolochek slozhnoy geometrii [To the problem of calculating reinforced conic shells of complex geometry]. *Kazan', Tr. mezhdunar. konf. «Aktual'nye problemy mekhaniki obolochek»*, 1998, pp. 19-23.
4. Van'ko V.I. Cilindricheskaya obolochka pod vneshnim davleniem: neklassicheskoe reshenie zadachi o bol'shikh peremeshcheniyah [Cylindrical shell under external pressure: a non-classical solution of the problem of large displacements]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. Lobachevsky*, 2011, no. 4. Part 4: Messages presented at X all-Russia. Congress on fundamental problems of the theory of applied mechanics, pp. 1413-1414.
5. Vladimirov B.C. Obobshchennyye funktsii v matematicheskoi fizike [Generalized functions in mathematical physics]. *Moscow, Nauka*, 1979, 320 p.
6. Vlasov V.Z. Izbrannyye trudy. Obshchaya teoriya obolochek (tom 1) [Selected transactions. General theory of the shells (volume 1)]. *Moscow, izdatel'stvo akademii nauk SSSR*, 1962, 528 p.
7. Volchkov Yu. M., Dergileva L.A. Solution of contact problems on the basis of the precise theory of plates and shells Dergileva [Solution of contact problems based on the refined theory of plates and shells]. *J. Appl.*, 2008, vol. 49, no. 5, pp. 169-176.
8. Vol'mir A.C. Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells]. *Moscow, Nauka*, 1972, 432 p.
9. Vorovich I.I. Matematicheskiye problemy nelineinoy teorii plogikh obolochek [Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells]. *Moscow, Nauka*, 1989, 376 p.
10. Galimov K.Z., Paymushin V.N., Teregulov I.G. Osnovaniya nelineinoy teorii obolochek [The Foundation of the nonlinear theory of shells]. *Kazan', Izdatel'stvo Akademii nauk Tatarstana "Fen"*, 1996, 215 p.
11. Gelfand I. M., Shilov G. E. Obobshchennyye funktsii i deystviya nad nimi [Generalized functions and operations on them]. *Moscow, Fizmatgiz*, 1959, 470 p.
12. Goldenveyzer A.L. Teorii tonkikh uprugikh obolochek [Theory of thin elastic shells]. *Moscow, Nauka*, 1976, 512 p.
13. Darevskiy V.M. Nelineinyye uravneniya teorii obolochek i ikh linearizatsiya v zadachakh ustoychivosti [Nonlinear equations of the theory of shells and its linearization in problems of stability]. *Moscow, Trudy VI Vsesoyuznoi konferentsii po teorii obolochek i plastinok*, 1966, pp. 355-368
14. Dudchenko A.A. Prochnost' i proektirovaniye aviatsionnykh konstruksii iz kompozitsionnogo materiala [Strength and design of aircraft structures made of kompozitsionnogo material]. *Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2007, 199 p.
15. Dudchenko A.A., Elpatevskiy A.N. Strength of the composite reinforced panels, loaded in their plane. *Mechanics of composite materials*. 1993, vol. 29, no. 1, pp. 84-92.
16. Zhilin P.A. Lineinaya teoriya rebristyykh obolochek [Linear theory of ribbed shells], *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1970, no. 4, pp. 150-162.
17. Zhilin P.A. Obshchaya teoriya rebristyykh obolochek [General theory of ribbed shells]. *The strength of the hydroturbines: proceedings of Central Committee for Heavy Industry*, 1968, vol. 88, pp. 46-70.
18. Zhilin P.A. K analizu kraevykh zadach dlya rebristyykh obolochek [To the analysis of boundary value problems for the ribbed shells]. *The strength of the hydroturbines: proceedings of Central Committee for Heavy Industry*. 1966, no. 72, pp. 26-40.
19. Karpov V.V. Prochnost' i ustoychivost' podkrepnykh obolochek vrashcheniya. Chast' 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkrepnykh obolochek vrashcheniya [Strength and the stability of the stiffened shells of rotation. Part 1. Models and the algorithms of a study of strength and stability of the stiffened shells of rotation]. *Moscow, Fizmatgiz*, 2010, 288 p.
20. Karpov V.V., Semenov A.A. Matematicheskaya model' deformirovaniya podkrepnykh ortotropnykh obolochek [Mathematical model of deformation of reinforced orthotropic rotational shells]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2013, no. 5, pp. 100-106.
21. Karpov V.V., Sal'nikov A.Yu. Variatsionnyye metody i variatsionnyye principy mekhaniki pri raschetu stroitel'nykh konstruktsiy [Variational methods and variational principles of mechanics in building structures]. *Sankt-Peterburg, Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi arkhitekturno-stroitel'nyi universitet*, 2009, 74 p.
22. Karpov V.V. Metod variatsionnykh predel'nykh preobrazovaniy v teorii obolochek, imeyushchikh neregulyarnosti [The Method of variation of the ultimate transformations in the theory of shells having irregular]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*, 2005, no 4(5), pp. 37-42.

23. Kech V., Teodorescu P. Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsiy s prilozheniyami v tekhnike. Pod redaktsiej B.E.Pobedri [Introduction to the theory of generalized functions with applications in engineering. Edited by B. E. Pobedria]. *Moscow, Izdatel'stvo Mir*, 1978, 518 p.
24. Lazaryan V.A., Konashenko S.I. Obobshchennyye funktsii v zadachakh mekhaniki [Generalized functions in mechanics problems]. *Kazan', Naukova dumka*, 1974, 192 p.
25. Klimanov V.I., Timashev S.A. elineinye zadachi podkreplennykh obolochek [Nonlinear problems of reinforced shells]. *Sverdlovsk, Ural'skii nauchnyi tsentr akademii nauk SSSR*, 1985, 291 p.
26. Mihailov B.K. Plastiny i obolochki s razryvnymi parametrami. [Plates and shells with discontinuous parameters]. *Leningrad, Leningradskii gosudarstvennyi universitet*, 1980, 196 p.
27. Mushtari H.M., Galimov K.Z. Osnovy nelineinoi teorii tonkikh obolochek [Bases of the nonlinear theory of thin shells [Foundations of nonlinear theory of thin shells]. *Kazan', Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta*, 1975, 326 p.
28. Novitsky V.V. Del'ta-funktsiia i ee primeneniye v stroitel'noi mekhanike [The delta-function and its application in structural mechanics]. *Calculation of spatial structures*, 1962, iss. 8, pp. 207-245
29. Novozhilov V.V. Teoriya tonkikh obolochek [Theory of thin shells]. *Leningrad, Sudpromizdat*, 1962, 431 p.
30. Obraztsov I.F., Onanov G.G. Stroitel'naya mekhanika skoshennykh tonkostennykh sistem [Structural mechanics sloping thin-walled systems]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1973, 660 p.
31. Ovcharov A.A., Brylev I.S. Matematicheskaya model' deformirovaniya nelinejno uprugih podkreplennykh konicheskikh obolochek pri dinamicheskom nagruzhении [Mathematical model of nonlinear elastic deformation of reinforced conical shells under dynamic loading]. *Modern problems of science and education*, 2014, no. 3, pp. 63-71
32. Onanov G.G. Uravneniya s singulyarnymi koefitsientami tipa del'ta-funktsii i ee proizvodnykh [Equations with singular coefficients type of Delta-function and its derivatives]. *Doklady akademii nauk SSSR*, 1970, vol. 1, no. 5, pp. 997-1000.
33. Reissner E.E. Lineinaia i nelineinaia teoriia obolochek. Tonkostennyye obolochechnye konstruksii [The Linear and nonlinear theory of shells]. *Moscow. Mashinostroenie*, 1980, pp. 55-69
34. Semenov A.A., Karpov V.V. Matematicheskaya model' deformirovaniya podkreplennykh ortotropnykh obolochek vrashcheniya [Mathematical model of deformation of orthotropic reinforced shells of revolution]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2013, no 5, pp. 100-106
35. Semenov A.A., Ovcharov A.A. Matematicheskaya model' deformirovaniya ortotropnykh konicheskikh obolochek [Mathematical model of deformation of orthotropic conical shells]. *Inzhenernyi vestnik Dona*, 2014, vol. 29, iss. 2, pp. 74-77
36. Semenov A.A. Algoritmy issledovaniya prochnosti i ustojchivosti podkreplennykh ortotropnykh obolochek [Algorithms for the investigation of strength and stability of stiffened orthotropic shells]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2014, no. 1, pp. 49-63
37. Chernyh K.F. i dr. Obshchaya nelinejnaya teoriya uprugih obolochek . [The General nonlinear theory of elastic shells]. *Sankt-Peterburg, Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo universiteta*, 2002, 388 p.
38. Chrobot B. Mathematical models of ribbed Shells. *Studia Geotechnica et Nechanica*, 1982, vol. IV, no. 3-4, pp. 55-68.
39. Reissner E. Linear and Nonlinear Theory of Shells. *Thin-shell structures: theory, experiment and Design, Prentice – Hall inc.*, 1974. pp. 29-44.
40. Swaddiwudhipohg S., Tian J., Wang C.M. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via ritz method. *Thin walled structures*. 1999, vol. 35, pp. 1-24.
41. Yang. B., Zhou J. Analysis of ring-stiffened cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 1995, vol. 62. pp. 1005-1014.