



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.13

УДК 004.942, 534.12

## ВАЛИДАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ И АЛГОРИТМ ЕЁ РЕАЛИЗАЦИИ

**А.В. Забелин, А.А. Пыхалов**

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 23 августа 2017 г.  
Принята: 12 сентября 2017 г.  
Опубликована: 30 сентября 2017 г.

#### Ключевые слова:

валидация, анализ корреляции, коррелирующая матрица, редуцирование конечно-элементной модели, уточнение параметров конечно-элементной модели, конечно-элементная модель, натурное испытание конструкции, планирование натурального испытания, конфигурация датчиков, антенна.

### АННОТАЦИЯ

Рассмотрена валидация конечно-элементных (КЭ) моделей. Дано её понятие как последовательность действий над реальной конструкцией и её КЭ-моделью с целью получения модели, которая максимально точно представляет статическое напряжённо-деформированное состояние и/или динамические характеристики моделируемой реальной конструкции. Валидация представлена на примере КЭ-модели антенны, имеющей сложную разветвлённую структуру. В качестве выходных переменных (откликов) КЭ-модели были выбраны собственные формы её колебаний. Для определения потенциально оптимального местоположения датчиков, фиксирующих значения откликов с реальной конструкции, проводится анализ специальных матриц, построенных на основе КЭ-модели. Этот анализ показывает доминантные формы колебаний, по которым деформируется значительная масса конструкции, установку датчиков в узлах КЭ-модели по максимальным значениям долей кинетической энергии при колебаниях, а также точки возбуждения всех требуемых собственных форм колебаний конструкции с помощью динамической нагрузки. Таким образом, на основе проведённого анализа определяются точки на конструкции для оптимальной установки датчиков (например, акселерометров), а также точки возбуждения колебаний. Математически выбор местоположения датчиков сопровождается редуцированием глобальных матриц КЭ-модели к узлам (степеням свободы), куда потенциально будут установлены датчики. Также в работе приведено подтверждение того, что выбранное положение датчиков оптимально. Для этого вычисляются специальные коррелирующие матрицы, используемые для сравнения собственных векторов в выбранных узлах исходной и редуцированной КЭ-моделей. Подтверждением оптимальности положения датчиков является получение определенных значений коррелирующих матриц.

Далее на основе предшествующего анализа проводится натурное испытание конструкции. После его проведения вновь вычисляются коррелирующие матрицы, необходимые для сравнения собственных векторов в выбранных ранее узлах (точках), полученных в результате натурального испытания и на редуцированной КЭ-модели. В случае высокой степени корреляции сравниваемых результатов исходная КЭ-модель считается валидированной, при низкой степени корреляции необходимо уточнение КЭ-модели.

© ПНИПУ

© Забелин Антон Вячеславович – аспирант, e-mail: zav1692@mail.ru

Пыхалов Анатолий Александрович – доктор технических наук, профессор, e-mail: pikhalov\_aa@irgups.ru

Anton V. Zabelin – PhD Student, e-mail: zav1692@mail.ru

Anatolii A. Pyhalov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: pikhalov\_aa@irgups.ru



## FINITE-ELEMENT MODEL VALIDATION AND ITS EXECUTION ALGORITHM

A.V. Zabelin, A.A. Pyhalov

Irkutsk State University of Railways, Irkutsk, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 23 August 2017  
Accepted: 12 September 2017  
Published: 30 September 2017

#### Keywords:

validation, correlation analysis, correlation matrix, finite element model reduction, finite element model updating, finite element model, structural test, structural test planning, sensor locations, antenna.

### ABSTRACT

The paper presents the finite element (FE) model validation. The definition of the term is given as a sequence of operations on a construction and its FE model to get the model reflecting the stress–strain behavior, and/or the dynamic properties of the construction as accurate as only possible. In this study, the validation was illustrated by a FE model of an antenna which has a complex divergent structure. Eigenmodes were selected as responses for FE model validation. Special matrices which are calculated using the FE method program are analyzed to define whether a sensor placement is optimal. Sensors are utilized to get the structural responses during structure tests. This analysis shows dominant eigenmodes that correspond with the deformation of the considerable amount of construction mass, location of the sensors which are placed in the nodes having the maximum values of kinetic energy fractions and the excitation points of all the required structure eigenmodes. According to the previous analysis, the location of the sensors (e.g. accelerometers) and excitation points are chosen. Mathematically, the selection of the sensor positions is accompanied with a reduction of the global FE model matrices to the nodes (degrees of freedom) where the sensors will potentially be placed. The next step is to confirm that the location of the sensors is optimal by means of special correlation matrices. They are employed to compare eigenvectors in the selected nodes of the base and reduced FE models. The certain values of the elements of the correlation matrices are the confirmation that the sensors are located in the optimal way.

Further, structural tests are conducted by utilizing the results of the previous analysis. Afterwards, the correlation matrices are calculated again to compare the base finite element model of eigenvectors in the previously chosen nodes (points) with the reduced ones. If the correlation degree of the eigenvectors is high, the base FE model is considered as validated. If the correlation degree of the eigenvectors is low, the base FE model must be updated.

© PNRPU

## Введение

С целью изучения статического напряженно-деформированного состояния (НДС) и динамических характеристик реальных конструкций в настоящее время создаются их конечно-элементные (КЭ) модели. Численное решение методом конечных элементов (МКЭ) считается высокоэффективным математическим подходом в реализации этих задач. Однако добиться достаточного уровня совпадения результатов этого решения и результатов натурального испытания исследуемой конструкции удается далеко не всегда.

При проведении статических испытаний это несовпадение минимально, поскольку на основе КЭ-решения априори (заранее) известно поле напряжений и максимальные градиенты его изменения, например, в областях с концентраторами напряжений (отверстий, переходов и др.). Тогда датчики для проведения натурального испытания устанавливаются в эти области, и при необходимости их положение корректируется с целью повышения уровня совпадения результатов с результатами КЭ-анализа. Также несовпадение результатов в статических задачах может быть компенсировано изучением достоверности механических характеристик используемых материалов и другими факторами.

Гораздо более серьезной проблемой несовпадения результатов натурального эксперимента и решения на основе МКЭ является определение динамических характеристик конструкций. Это связано с тем, что каждой форме их колебаний соответствует своё НДС и определить оптимальное положение датчиков на объекте исследования чрезвычайно проблематично и априори просто невозможно. Кроме того, остаются проблемы, связан-

ные с точностью математического моделирования некоторых свойств самой реальной конструкции, например её геометрии, механических характеристик материала (модуля упругости, коэффициента Пуассона и др.) и др. Большую роль также играют такие аспекты, как некорректность задания в модели конечных элементов, граничных условий, связей, грубой КЭ-сетки и т.д.

Таким образом, достижение идентичности результатов натурных испытаний конструкций и численного анализа их КЭ-модели, в особенности для исследования динамического поведения, является комплексной задачей, решение которой состоит в их взаимной корректировке по аспектам, связанным с испытанием конструкции и параметрами её КЭ-модели.

Последовательность действий над реальной конструкцией и её КЭ-моделью, целью которой является получение КЭ-модели, максимально точно представляющей статическое НДС и/или динамические характеристики изучаемого объекта, называется «валидацией» КЭ-модели [1]. Получаемая в результате модель называется валидированной.

Инструменты для получения валидированной КЭ-модели связаны с различными способами сравнения (анализа корреляции) результатов натурального испытания конструкции и результатов, получаемых на основе КЭ-модели, с последующими действиями для достижения высокого уровня их идентичности.

Валидация КЭ-моделей востребована в таких отраслях промышленности, как авиационно-космический комплекс, автомобилестроение, общее машиностроение и отрасли гражданского строительства.

Валидация КЭ-моделей позволяет:

1. получить надёжную КЭ-модель, отражающую поведение реальной конструкции с высокой точностью, и, главное, использовать её для мониторинга работы этой конструкции;
2. значительно сэкономить материальные средства и время на стадии проектирования конструкций за счёт сокращения количества натуральных прототипов и их испытаний;
3. обеспечить высокое качество и надёжность работы итоговой проектируемой конструкции в целом и наметить пути её дальнейшего совершенствования по функциональности.

Под мониторингом в инженерной практике [2–6] понимается контроль состояния сложных, ответственных и высоконагруженных конструкций, осуществляемый непрерывно с короткими промежутками по времени и необходимый для обеспечения их безопасности в условиях эксплуатации. Технически он состоит в том, что параметры конструкции (перемещения, напряжения, скорости, ускорения и др.) фиксируются датчиками, размещёнными в заранее определённых местах. До недавнего времени использовался подход, когда данные о состоянии конструкции и её НДС в целом получали только на основе датчиков.

Однако в связи с применением только датчиков полное представление о работе конструкции может быть упущено или интерпретировано неверно. Выходом из данной ситуации и послужило дополнительное использование КЭ-модели натурального объекта. Это позволяет получить больше информации, например визуализировать НДС натурального объекта практически в любой его точке и в любой момент времени и имеет другие преимущества [3, 4]. В то же время появляется и дополнительная сложность подхода, определяемого самой КЭ-моделью объекта. Эта модель должна отражать его поведение максимально точно ещё до начала мониторинга, т.е., быть валидированной. Это и определяет актуальность валидации КЭ-моделей.

Блок-схема валидации КЭ-модели представлена на рис. 1. Её ключевыми операциями являются анализ корреляции результатов натурального испытания и расчета КЭ-модели с уточнением параметров модели [1].

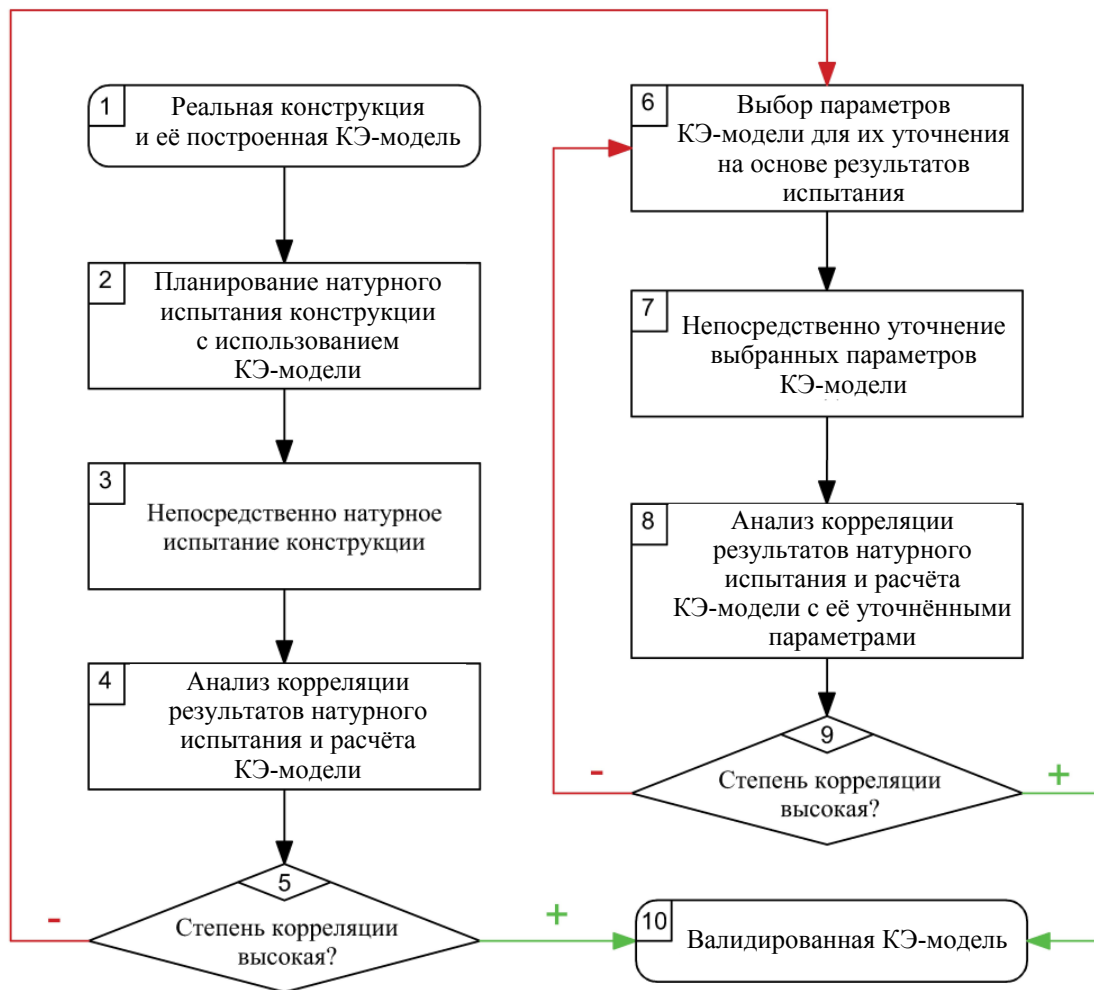


Рис. 1. Блок-схема валидации КЭ-модели  
Fig. 1. Flowchart for FE model validation

В общем смысле анализ корреляции – это операция, позволяющая количественно оценить схожесть двух и более множеств данных [7]. В случае с КЭ-моделями первым из этих множеств выступают результаты натурального эксперимента, а вторым множеством выступают результаты расчёта исходной КЭ-модели. Вторым множеством также могут выступать результаты расчёта измененной КЭ-модели. Средством анализа корреляции являются коррелирующие матрицы или коэффициент корреляции. Дополнительно может быть использован статистический анализ множеств данных.

В данной статье алгоритм валидации представлен на примере КЭ-модели антенны, имеющей сложную разветвленную конструкцию, для которой существуют результаты натуральных испытаний в виде собственных векторов колебаний. Работа отдельных блоков алгоритма (см. рис. 1) более подробно представлена ниже, в том числе в виде математических зависимостей процесса валидации КЭ-модели. Далее для результатов (выходных переменных), по которым валидируется КЭ-модель, будет использован термин «отклики».

## 1. Алгоритм валидации КЭ-моделей

Имеется объект натурального испытания и его КЭ-модель (см. рис. 1, блок 1), для которой был предварительно проведён анализ сходимости результатов.

**Планирование натурального испытания с использованием КЭ-модели** (см. рис. 1, блок 2). При использовании результатов статического расчета в виде перемещений и напряжений, по которым валидируется КЭ-модель, планирование испытания выполняется просто. В этом случае достаточно проанализировать модель, например, на предмет максимальных перемещений и/или концентраторов напряжений и установить датчики в соответствующие позиции.

При использовании в качестве откликов собственных векторов планирование испытаний осуществляется сложнее и заключается в том, что подбор оптимального положения датчиков, например акселерометров, определяется их минимумом для фиксации максимального количества форм колебаний конструкции. При подборе конфигурации расстановки датчиков необходима её проверка с помощью коррелирующих матриц, описание которых представлено ниже. Точки возбуждения колебаний конструкции также подбираются по принципу их минимального количества для возбуждения максимального количества форм колебаний. Алгоритм блока планирования испытания (см. рис. 1, блок 2) в этом случае более сложный и развернуто представлен на рис. 2.

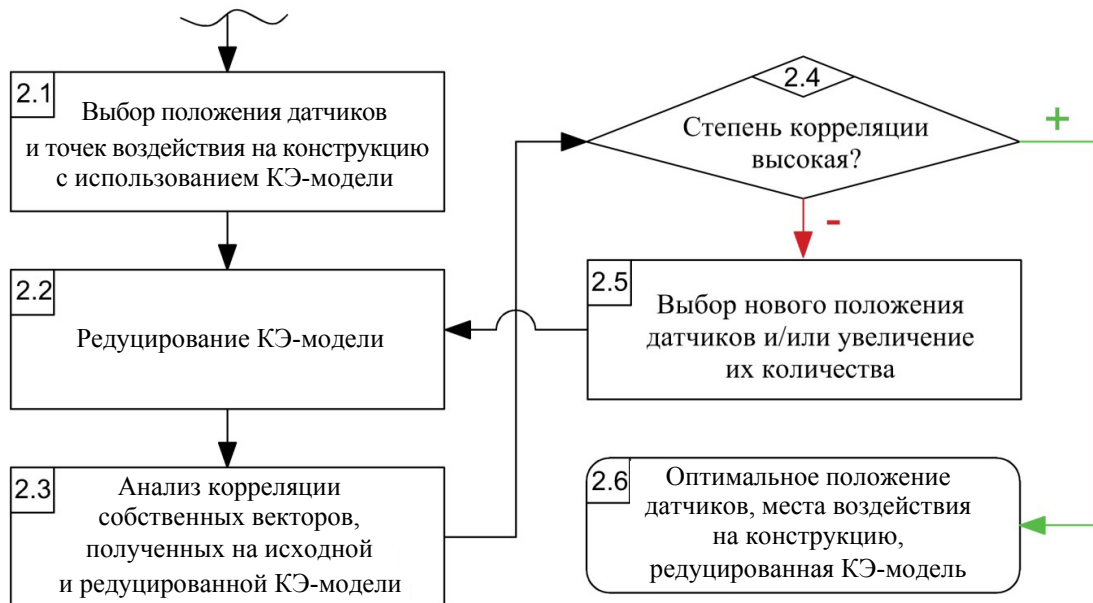


Рис. 2. Блок-схема планирования испытания конструкции на основе КЭ-модели в случае использования собственных векторов в качестве результатов (откликов)

Fig. 2 Flowchart for structural test planning using FE model when eigenvectors are utilized as the results (responses)

**Выбор положения датчиков и точек воздействия на конструкцию с использованием КЭ-модели** (см. рис. 2, блок 2.1). В случае выбора собственных векторов в качестве фиксируемых результатов выбираются узлы КЭ-модели, которые будут соответствовать точкам положения датчиков, а также точкам возбуждения колебаний конструкции. При этом выполняется принцип «минимального количества датчиков и точек возбуждения для фиксации максимума информации о поведении конструкции». Это достигается с помо-

щью построения специальных матриц, анализ которых позволяет определить потенциально оптимальное местоположение вышеуказанных узлов (точек). Далее представлена основная информация об указанных выше матрицах, более подробное их описание дано в работах [8–11]. Наиболее часто используются матрицы.

1. Матрица  $[MEM]$  (Modal effective mass) [8, 11] предназначена для определения доли масс конструкции, участвующих в колебании. Она вычисляется для выбранных  $j = 1 \dots k$  форм по всем степеням свободы (три поступательных, три вращательных). Таким образом, данная матрица имеет размерность  $k \times 6$ . По значениям данной матрицы можно судить об энергии, возникающей при колебании конструкции по различным формам колебаний в различных направлениях, так как  $[MEM]$  включает в себя доли масс конструкции. На основе анализа данной матрицы выбираются формы колебаний, которые будут фиксироваться датчиками. Чем больше доля массы и, соответственно, энергия, возникающая при колебаниях по определённой форме, тем проще её зафиксировать с помощью датчиков, и поэтому она предпочтительнее для фиксации. Элемент матрицы  $[MEM_{ij}]$  для  $j$ -й формы колебаний по направлению степени свободы  $i$  определяется следующим образом:

$$[MEM_{ij}] = \Gamma_{ij} \otimes \Gamma_{ij}, \quad (1)$$

$$\Gamma_{ij} = \{\Phi\}_j^T \cdot [M] \cdot \{\Phi_{irb}\}, \quad (2)$$

где  $\Gamma_{ij}$  – доля массы конструкции, участвующей в колебании по  $j$ -й форме по направлению степени свободы  $i$ ;  $\otimes$  – поэлементное (покомпонентное) умножение матриц, также называемое произведением Шура или Адамара;  $\{\Phi\}_j$  – вектор упругой  $j$ -й формы колебаний;  $\{\Phi_{irb}\}$  – вектор формы колебания как абсолютно твёрдого тела по направлению степени свободы  $i$ ;  $[M]$  – матрица масс.

2. Матрица  $\{KE\}$  (Kinetic Energy) [8, 9, 11] используется для вычисления долей кинетической энергии в узлах КЭ-модели относительно суммарной кинетической энергии конструкции при её колебаниях. Данная матрица вычисляется отдельно для каждой выбранной формы  $j = 1 \dots k$ , по всем её  $m$  степеням свободы. Размерность матрицы  $\{KE\}$  для одной формы колебаний  $m \times 1$ , то есть она является вектором. Исходя из значений матрицы выбираются положения датчиков и/или точек возбуждения колебаний конструкции. Чем выше значение доли кинетической энергии в точке, тем она предпочтительнее для выбора в качестве положения датчика, так как перемещение такой точки проще зафиксировать. Вектор  $\{KE\}_j$  для  $j$ -й формы колебаний имеет вид

$$\{KE_j\} = \{\Phi_j\}^T \cdot [\Omega], \quad (3)$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} M_{11} \cdot \varphi_1 & M_{12} \cdot \varphi_2 & \dots & M_{1m} \cdot \varphi_m \\ M_{21} \cdot \varphi_1 & M_{22} \cdot \varphi_2 & \dots & M_{2m} \cdot \varphi_m \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ M_{m1} \cdot \varphi_1 & M_{m2} \cdot \varphi_2 & \dots & M_{mm} \cdot \varphi_m \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $M_{mm}$  – элемент матрицы масс;  $\varphi_m$  – элемент вектора  $j$ -й формы колебаний.

Часто с целью поиска точек положения датчиков КЭ-модель разделяют на  $\mu$  групп конечных элементов, где для каждой из них кинетическая энергия суммируется. Таким образом формируется вектор долей энергии  $\{KE\}_{\mu j}$  по  $\mu$  группам конечных элементов для каждой  $j$ -й формы колебаний ( $j = 1 \dots k$ ). Размерность такого вектора  $\mu \times 1$ . При использовании  $k$  собственных форм колебаний при валидации данные векторы объединяются, формируя матрицу  $[KE]_{\mu} = \{\{KE\}_{\mu 1} \dots \{KE\}_{\mu k}\}$  размерностью  $\mu \times k$ . С помощью такой матрицы удобно идентифицировать область установки датчиков. После этой идентификации следует воспользоваться матрицей  $\{KE\}$ , значения которой точно укажут, куда стоит установить датчики.

3. Матрица  $\{DPR\}$  (Drive Point Residue) [8–10]. Если в качестве откликов было выбрано несколько форм колебаний, то желательно выявить общие для них точки приложения динамической нагрузки на конструкцию. Чем больше форм колебания возбуждается из одной точки, тем лучше. Для решения данной задачи используется матрица  $\{DPR\}$ , которая вычисляется для каждой формы колебания. Возможно использование матрицы  $\{DPR\}$  и для выявления положения датчиков. Матрица  $\{DPR\}$  для  $j$ -й формы колебаний имеет вид

$$\{DPR_j\} = \{\Phi_j\} \otimes \{\Phi_j\} \cdot \omega_j, \quad (5)$$

где  $\omega_j$  – собственная частота  $j$ -й формы колебания.

Если количество степеней свободы модели равно  $m$ , то размерность матрицы  $\{DPR\}$  для одной формы колебаний  $m \times 1$ , то есть она является вектором.

**Редуцирование КЭ-модели** (см. рис. 2, блок 2.2). На основе анализа матриц  $[MEM]$ ,  $\{KE\}$ ,  $[KE]_{\mu}$  и  $\{DPR\}$  выбираются узлы КЭ-модели, определяющие точки на конструкции, куда при натурном испытании будут помещены датчики. Математически выбор узлов сопровождается редуцированием КЭ-модели, при котором собственные векторы сводятся к выбранным узлам по определенным степеням свободы [3, 12–14]. Последняя процедура позволяет осуществить сравнение собственных векторов с помощью коррелирующих матриц.

Редуцирование КЭ-модели выполняется с помощью матрицы преобразования  $[T]$ , вид которой зависит от метода редуцирования, в качестве которого в данной работе используется метод Гайяна [13]. При его использовании выбор узлов и степеней свободы оказывает на значения блочной матрицы преобразования существенное влияние, что является предпочтительным свойством при редуцировании КЭ-модели при её валидации [12].

Формула вычисления матрицы  $[T]$  по Гайяну имеет вид

$$[T] = \begin{bmatrix} [E] \\ -[K_{dd}^{-1}] \cdot [K_{dr}] \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $[E]$  – единичная матрица;  $[K_{dd}]$  – матрица жёсткости, формируемая из элементов глобальной матрицы жёсткости, с индексами  $d$  редуцируемых из КЭ-модели степеней свободы;  $[K_{dr}]$  – матрица жёсткости, формируемая из элементов глобальной матрицы жёстко-

сти, с индексами  $d$  редуцируемых из КЭ-модели степеней свободы и к которым КЭ-модель редуцируется (с индексом  $r$ ).

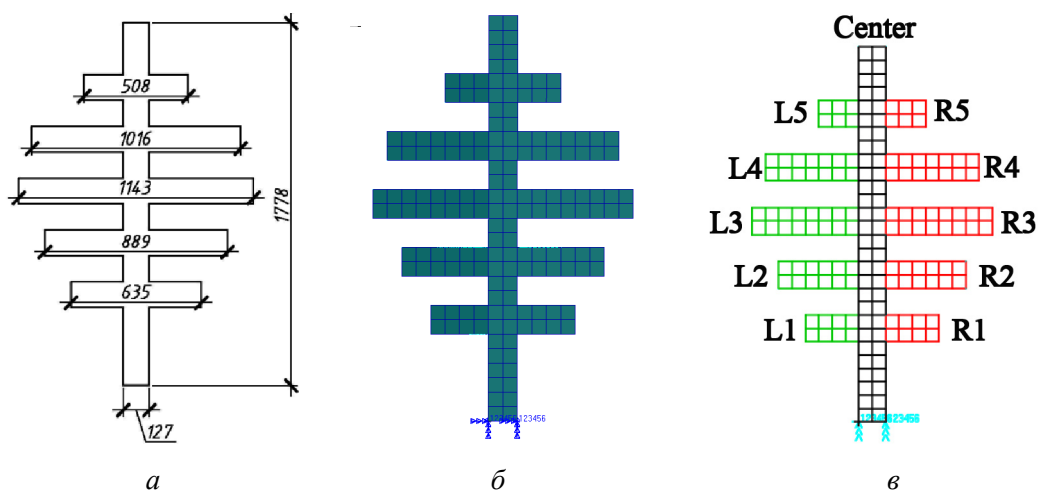


Рис. 3. Геометрия конструкции (а); КЭ-модель антенны (б); группы конечных элементов (в)

Fig. 3. Geometry of the construction (a); FE model of the antenna (b); shows the groups of the finite elements (c)

Преобразуемые (редуцируемые) матрицы связаны с матрицами исходной КЭ-модели следующим образом:

– вектор перемещений

$$\{x_r\} = [T]^{-1} \cdot \{x_f\}, \quad (7)$$

– матрица масс

$$[M_r] = [T]^T \cdot [M_f] \cdot [T], \quad (8)$$

– матрица жесткости

$$[K_r] = [T]^T \cdot [K_f] \cdot [T], \quad (9)$$

где  $f$  – индекс степеней свободы исходной КЭ-модели;  $r$  – индекс степеней свободы, к которым производится редуцирование КЭ-модели;  $d$  – индекс степеней свободы, которые редуцируются (убираются) с КЭ-модели;  $\{x_f\}$  – вектор перемещений узлов по степеням свободы исходной КЭ-модели;  $\{x_r\}$  – вектор перемещений узлов по степеням свободы, к которым КЭ-модель редуцируется;  $[M_r]$  – матрица масс редуцированной КЭ-модели;  $[M_f]$  – матрица масс исходной КЭ-модели;  $[K_r]$  – матрица жесткости редуцированной КЭ-модели;  $[K_f]$  – матрица жесткости исходной КЭ-модели.

**Анализ корреляции результатов и его алгоритм** (см. рис. 1, блоки 4, 5, 8, 9 и рис. 2, блоки 2.3, 2.4). После выбора конфигурации расстановки датчиков на КЭ-модели путем её редуцирования проводится анализ корреляции (сравнения) собственных векторов, полученных на исходной и редуцированной КЭ-моделях (см. рис. 2, блоки 2.3, 2.4) для подтвер-



ждения оптимальности такой установки датчиков. Также анализ корреляции проводится для собственных векторов, полученных при натурном испытании и на редуцированной КЭ-модели с её исходными (см. рис. 1, *блоки 4, 5*) и уточнёнными (см. рис. 1, *блоки 8, 9*) параметрами для определения, валидированная КЭ-модель или нет.

Средством анализа корреляции при использовании собственных векторов в качестве сравниваемых результатов являются коррелирующие матрицы, среди которых универсальными и наиболее часто используемыми являются матрицы:  $[MAC]$  (Modal Assurance Criterion) и  $[ORTHO]$  (Orthogonality).

$[MAC]$  оценивает согласованность (когерентность) сравниваемых форм колебаний [8, 10, 12, 15]. При её расчёте не учитывается матрица масс.  $[ORTHO]$  оценивает степень ортогональности двух собственных векторов с их нормированием по матрице масс [8, 12, 16].

Если значения диагональных членов коррелирующих матриц больше 0,75 и внедиагональных членов меньше 0,25, то сравниваемые множества собственных векторов обладают высокой степенью корреляции, в остальных случаях степень корреляции низкая [8, 12].

Отдельные элементы коррелирующих матриц  $[MAC]$  и  $[ORTHO]$  для множеств собственных векторов  $\{\Phi\}$  и  $\{\Psi\}$  вычисляются следующим образом:

$$MAC_{ij} = \frac{[\{\Phi_i\}^T \cdot \{\Psi_j\}]^2}{[\{\Phi_i\}^T \cdot \{\Phi_i\}] \cdot [\{\Psi_j\}^T \cdot \{\Psi_j\}]}, \quad (10)$$

$$ORTHO_{ij} = \{\Phi_i\}^T \cdot [M_r] \cdot \{\Psi_j\}, \quad (11)$$

где  $MAC_{ij}$  и  $ORTHO_{ij}$  – элементы коррелирующих матриц  $[MAC]$  и  $[ORTHO]$ ;  $\{\Phi\}$  и  $\{\Psi\}$  – множества собственных векторов;  $[M_r]$  – редуцированная матрица масс.

Векторы-столбцы  $\{\Phi\}$  и  $\{\Psi\}$  зависят от следующих этапов валидации КЭ-модели [8, 12].

1. Подготовительный этап (см. рис. 2, *блоки 2.3, 2.4*).  $\{\Phi\}$  и  $\{\Psi\}$  – соответственно множества собственных векторов исходной и редуцированной КЭ-моделей. На основе значений коррелирующих матриц делается вывод об оптимальности выбранного положения датчиков. При высокой степени корреляции оптимальность положения датчиков подтверждается, и можно проводить натурное испытание конструкции. При низкой степени корреляции следует изменить положение датчиков. При невозможности только варьирования положения датчиков (степень корреляции недостаточна) следует увеличить их количество (см. рис. 2, *блок 2.5*), руководствуясь при этом принципом о минимальности количества датчиков;

2. Этап испытаний (см. рис. 1, *блоки 4, 5*).  $\{\Phi\}$  и  $\{\Psi\}$  – множества собственных векторов, полученных соответственно при испытании и на редуцированной КЭ-модели. По итогам данного этапа делается вывод о способности КЭ-модели представлять НДС конструкции при колебаниях. При высокой степени корреляции КЭ-модель считается валидированной. Если степень корреляции низкая, то переходят к уточнению параметров КЭ-модели. После их уточнения вновь проводится анализ корреляции.

3. Этап уточнения КЭ-модели (см. рис. 1, блоки 8, 9).  $\{\Phi\}$  и  $\{\Psi\}$  – соответственно множества собственных векторов редуцированной КЭ-модели с уточнёнными параметрами и собственные векторы, полученные при испытании. При высокой степени корреляции КЭ-модель также считается валидированной. Если степень корреляции низкая, то следует выбрать иные параметры для уточнения и/или выбрать иной метод уточнения. После повторного уточнения параметров вновь проводится анализ корреляции результатов.

**Проведение непосредственно испытаний** (см. рис. 1, блок 3) в соответствии с планом натурального испытания, полученным по блоку 2 (см. рис. 1).

**Выбор параметров КЭ-модели для их уточнения на основе результатов натурального испытания** (см. рис. 1, блок 6). Если уровень корреляции результатов, полученных с натурального объекта и КЭ-модели низок, то следует выбрать и уточнить параметры КЭ-модели. Выбираются, например, модуль упругости, геометрия и другие характеристики. Также выбираются интервалы варьирования параметров, в которых они будут уточняться.

**Уточнение конечно-элементных моделей** (см. рис. 1, блок 7). Ниже представлен вариант классификации методов уточнения КЭ-моделей.

1. Методы уточнения КЭ-матриц [17–20]. По ним напрямую уточняются матрицы жёсткости и масс КЭ-моделей. Решение по данным методам получается за одну итерацию, однако для получения точного решения необходимо, чтобы результаты натурального испытания были максимально достоверными.

2. Методы, основанные на анализе чувствительности изменения значений откликов к изменениям параметров [4, 21, 22]. Эти методы итерационные и основаны на минимизации разницы между значениями откликов, полученных при испытании и на КЭ-модели с использованием результатов анализа чувствительности.

Недостатком методов является сложность выбора уточняемых параметров, но она решается предварительным анализом чувствительности откликов к изменениям параметров КЭ-модели.

3. Стохастические методы. Данными методами [23–26] в КЭ-модели уточняются детерминированные значения параметров, математические ожидания, дисперсии параметров, интервалы значений параметров и т.д. Недостатком методов является сложность использования и интерпретации результатов уточнения.

4. Методы аппроксимации откликов. Данные методы основаны на аппроксимации зависимостей (11) выбранных откликов от уточняемых параметров [5, 30].

$$\{Y\} = f(\{P\}), \quad (12)$$

где  $\{Y\}$  – вектор значений откликов, получаемый с их моделей аппроксимации;  $\{P\}$  – вектор параметров;  $f$  – модели аппроксимации откликов, которые могут иметь вид полинома [5, 27, 28], радиально-базисной функции [28, 29] и т. д.

Модель аппроксимации откликов может быть использована для вычисления оптимальных значений параметров КЭ-модели с помощью методов оптимизации.

Методы аппроксимации откликов позволяют уточнять параметры КЭ-моделей значительно быстрее по сравнению с остальными методами, так как операции над аппроксимационной моделью гораздо менее ресурсозатратны для ПК, чем уточнение параметров непосредственно КЭ-элементным решателем/оптимизатором [27, 30]. Поэтому рассматриваемые методы являются предпочтительными.

## 2. Пример валидации КЭ-модели антенны

**Описание геометрии и КЭ-модели антенны.** Антенна предназначена для приема (передачи) электромагнитного сигнала. Её размеры, в миллиметрах, представлены на рис. 3, а. Толщина вертикального элемента равна 25,4 мм, толщина горизонтальных элементов 2,66 мм.

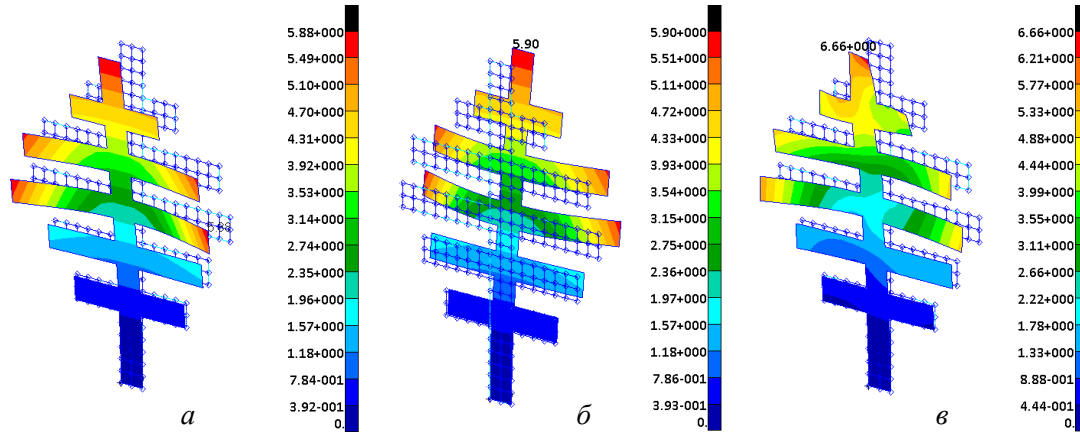


Рис. 4. Первая форма колебаний: *a* – исходной КЭ-модели; *б* – редуцированной КЭ-модели; *в* – натурального объекта

Fig. 4. First eigenmode of initial FE model (*a*); of the reduced FE model (*b*); of the structural object (*c*)

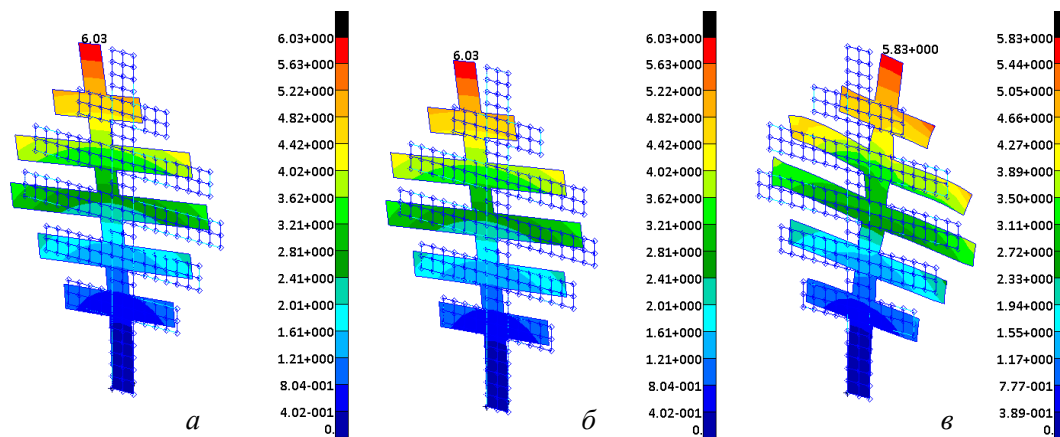


Рис. 5. Восьмая форма колебаний: *a* – исходной КЭ-модели; *б* – редуцированной КЭ-модели; *в* – натурального объекта

Fig. 5. Eight eigenmode of the initial FE model (*a*); of the reduced FE model (*b*); of the structural object (*c*)

КЭ-модель антенны построена в программе MSC.Patran (см. рис. 3, б). КЭ-сетка модели сгенерирована 168 оболочечными Quad-элементами. Свойства материала (алюминий): модуль упругости  $E = 70000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>. Граничные условия – жёсткое закрепление консоли в нижней части. Анализ модели проводился в программном комплексе MSC.Nastran. КЭ-модель была предварительно разбита на группы элементов согласно рис. 3, в. В качестве откликов, по которым валидируется КЭ-модель антенны, были выбраны собственные векторы колебаний.

Расчёты проводились по 10 первым формам колебаний, представленным по собственным частотам в таблице и по формам 1 и 8 на рис. 4, а и 5, а. Остальные формы представляют собой колебания горизонтальных элементов антенны.

Собственные частоты колебаний для ИС – исходной КЭ-модели,  
 Р – редуцированной КЭ-модели; ИП – собственные частоты, полученные  
 по результатам испытания  
 Eigenfrequencies of IN for the initial FE model, R for the reduced FE model;  
 T for the test eigenfrequencies

| Частота (Гц) | Номер формы колебания |      |      |       |       |       |       |       |       |       |
|--------------|-----------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|              | 1                     | 2    | 3    | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
| ИС (IN)      | 5,94                  | 8,36 | 8,56 | 10,88 | 11,29 | 14,87 | 14,96 | 30,01 | 32,91 | 33,15 |
| Р (R)        | 5,95                  | 8,48 | 8,67 | 11,03 | 11,43 | 15,06 | 15,16 | 30,01 | 33,29 | 33,54 |
| ИП (Т)       | 5,95                  | 8,48 | 8,67 | 11,03 | 11,44 | 15,06 | 15,16 | 30,47 | 33,3  | 33,55 |

**Последовательность валидации КЭ-модели антенны** – согласно блок-схемам, представленным на рис. 1 и 2.

**1. Планирование испытания натурального объекта** (см. рис. 1, блок 2 и рис. 2).

Для определения оптимального положения датчиков на конструкции необходимо вычислить и проанализировать матрицы  $[MEM]$ ,  $\{KE\}$ ,  $[KE]_{\mu}$  и  $\{DPR\}$  (см. рис. 2, блок 2.1).

Они вычисляются в модуле MSC.ProCOR, программы MSC.Patran [8].

На рис. 6, а представлена матрица  $[MEM]$ . Её значения показывают долю массы (Percent MEM), участвующую в колебании по формам (G-set modes) для всех 6 степеней свободы (Mass). Исходя из значений матрицы можно сделать вывод, что при испытании предпочтительно сфокусироваться на 1 и 8 формах колебаний, так как доля участия массы у них максимальна. Однако для более подробного изучения поведения объекта в работе используются все 10 исследуемых форм колебаний.

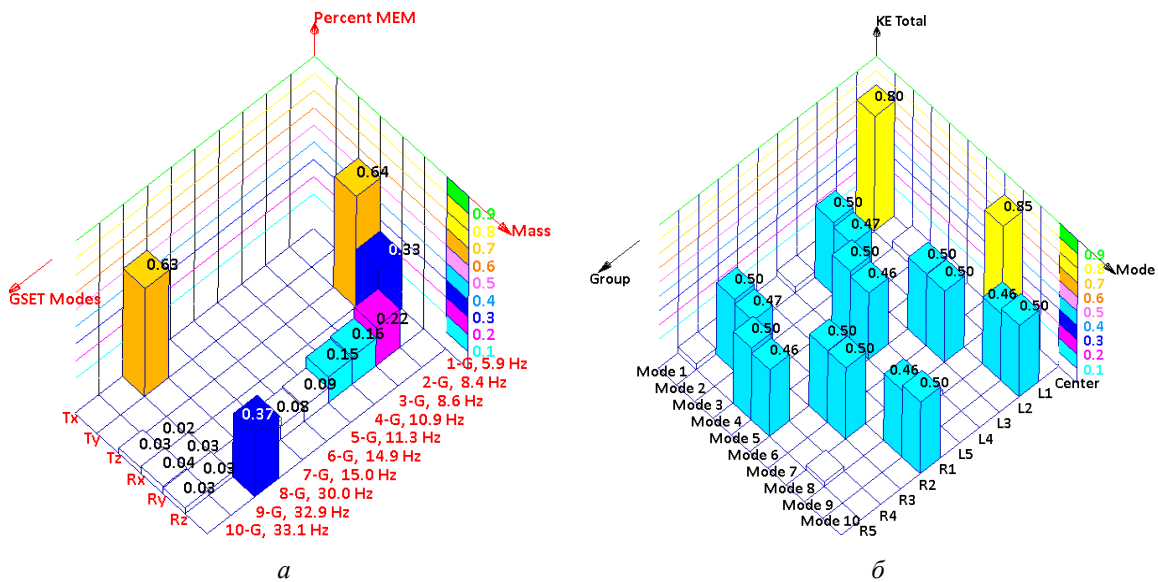


Рис. 6. Матрица  $[MEM]$  (а); матрица  $[KE]_{\mu}$  (б)

Fig. 6. Matrix  $[MEM]$  (a); matrix  $[KE]_{\mu}$  (b)

На рис. 6, б представлена матрица  $[KE]_{\mu}$ . Она показывает значения долей кинетической энергии (KE Total), возникающей при колебаниях групп элементов (Group) КЭ-модели по выбранным формам колебаний (Mode). Значения матрицы  $[KE]_{\mu}$  показывают, что кинетическая энергия максимальна в вертикальной части конструкции при ко-

лебаниях по формам 1 и 8. Остальным формам соответствуют перемещения только горизонтальных групп элементов. Для более точного анализа величины долей кинетической энергии  $\{KE\}$  можно отобразить непосредственно на КЭ-модели в виде векторов (рис. 7, а–в). Таким образом, делается вывод о необходимости установки датчиков на края каждой группы элементов конструкции, а также в места сопряжения горизонтальных и вертикальных её элементов для фиксации 10 форм колебаний.

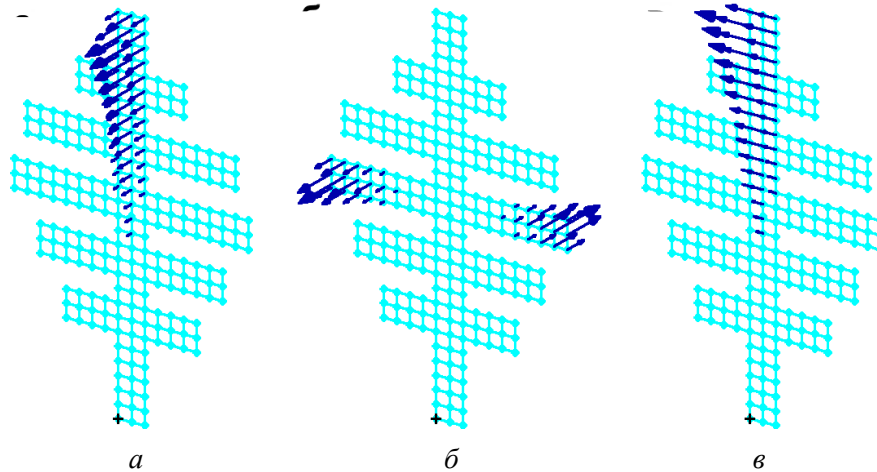


Рис. 7. Векторы долей кинетической энергии  $\{KE\}$  (а, б, в) при колебаниях для соответственно 1-й, 2-й и 8-й форм колебаний на КЭ-модели  
 Fig. 7. Vectors of kinetic energy fractions  $\{KE\}$  (a, b, c) of 1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup>, 8<sup>th</sup> eigenmodes that were calculated with the FE model

На рис. 8, а–б представлены значения матрицы  $\{DPR\}$  непосредственно на КЭ-модели конструкции. Области приложения динамической нагрузки на конструкцию для возбуждения требуемых форм колебаний согласно матрице  $\{DPR\}$  (см. рис. 8, а–б) выбираются края горизонтального элемента, расположенного вторым сверху.

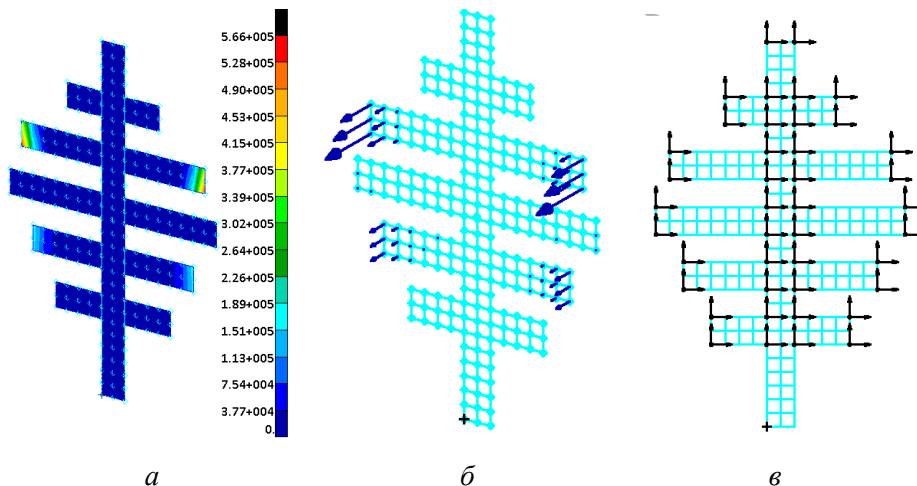


Рис. 8. Значения матрицы  $\{DPR\}$  на КЭ-модели антенны (а); отображение матрицы  $\{DPR\}$  в виде векторов (б); узлы, к которым редуцируется КЭ-модель (потенциальное положение датчиков на конструкции при испытании) (в)  
 Fig. 8.  $\{DPR\}$  matrix values displayed on the FE model of the antenna (a);  $\{DPR\}$  matrix displayed as vectors (b); is the reduced set of nodes (potential sensor placement on the structure for the test) (c)

Согласно предварительному анализу КЭ-модели были выбраны потенциально оптимальные позиции датчиков. Они изображены в виде черных точек со стрелками на рис. 8, в. Выбору положения датчиков сопутствует редуцирование исходной КЭ-модели к выбранным 42 узлам КЭ-модели (см. рис. 2, блок 2.2) по выбранным степеням свободы. Таких степеней свободы приходится три на узел (три поступательных в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ ), т.е. в сумме в редуцированной КЭ-модели остаётся 126 степеней свободы.

Результаты расчёта редуцированной КЭ-модели по 10 формам колебаний представлены в таблице (собственные частоты) и на рис. 4, б и 5, б (1 и 8-я формы колебаний). После выбора положения датчиков был проведён анализ корреляции собственных векторов, полученных на исходной (GSET Modes) и редуцированной (ASET Modes) КЭ-моделях, были вычислены матрицы  $[MAC]$  и  $[ORTHO]$  (см. рис. 2, блок 2.3). Коррелирующие матрицы  $[MAC]$  и  $[ORTHO]$  изображены соответственно на рис. 9, а и б. Элементы матриц (Ortho Coefficient) имеют значения: для диагональных больше 0,75, а для внедиагональных меньше 0,25, что говорит о высокой степени корреляции сравниваемых результатов (см. рис. 2, блок 2.4). Такая степень корреляции подтверждает, что выбранная конфигурация расстановки датчиков оптимальна (см. рис. 2, блок 2.6), увеличение их количества или перестановка не требуется, и можно приступать к натурному испытанию конструкции. В случае низкой степени корреляции следовало бы добавить больше датчиков и/или изменить конфигурацию их расстановки на КЭ-модели (см. рис. 2, блок 2.5) до достижения требуемых значений коррелирующих матриц.

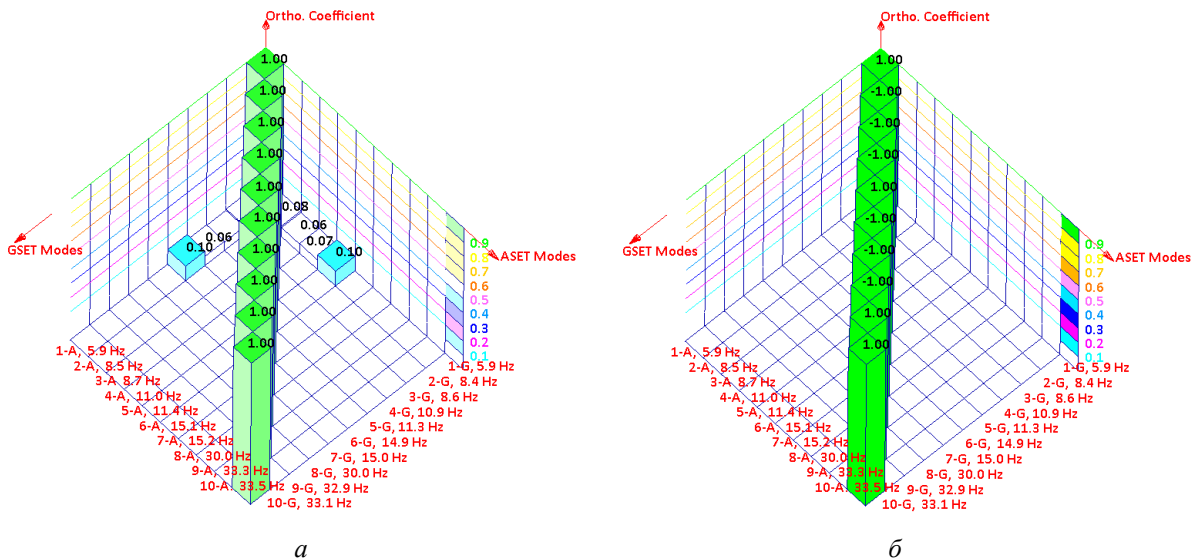


Рис. 9. Коррелирующая матрица  $[MAC]$  (а); коррелирующая матрица  $[ORTHO]$  (б).

Сравниваются формы колебаний на исходной (GSET Modes) и редуцированной (ASET Modes) КЭ-моделях

Fig. 9.  $[MAC]$  correlation matrix (a);  $[ORTHO]$  correlation matrix (b).

Initial finite element model modes (GSET Modes) and reduced finite element model modes (ASET Modes) are compared

**2. Натурное испытание конструкции** (см. рис. 1, блок 3) проводится в соответствии с планом испытания, полученным ранее. Результаты испытаний были взяты из [8].

**3. Анализ корреляции собственных векторов, полученных при испытании и на КЭ-модели** (см. рис. 1, блоки 4, 5). Собственные частоты, полученные при испытаниях, указаны в таблице. Первая и восьмая испытательные формы колебаний изображены на

рис. 4, в и 5, в. Собственные частоты и формы колебаний, полученные на исходной, редуцированной КЭ-моделях и при испытаниях практически идентичны.

Коррелирующие матрицы  $[MAC]$  и  $[ORTHO]$ , построенные для сравнения собственных векторов по формам колебаний, полученных при испытаниях и на редуцированной КЭ-модели, представлены на рис. 10, а и б соответственно (см. рис. 1, блок 4). Диагональные элементы матриц больше 0,75, а внедиагональные элементы меньше 0,25, что говорит о высокой степени корреляции исследуемых данных и уточнение КЭ-модели не требуется (см. рис. 1, блок 5), так как она является валидированной КЭ-моделью на основе анализа корреляции результатов (см. рис. 1, блок 10).

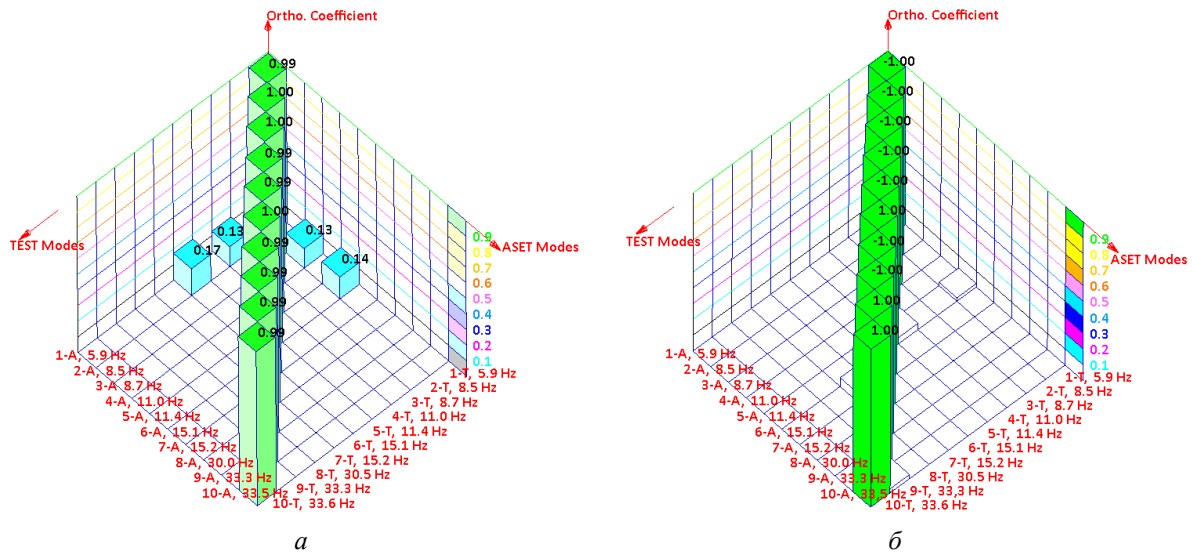


Рис. 10. Коррелирующая матрица  $[MAC]$  (а); коррелирующая матрица  $[ORTHO]$  (б).  
Сравниваются формы колебаний на редуцированной КЭ-модели (ASET Modes)  
и полученные при испытаниях (TEST Modes)

Fig. 10.  $[MAC]$  correlation matrix (a);  $[ORTHO]$  correlation matrix (b).  
Reduced finite element model modes (ASET Modes) and structural  
test modes (TEST Modes) are compared

## Заключение

На основании результатов валидации КЭ-модели антенны необходимо отметить следующее:

1. Валидированные КЭ-модели деформируемых объектов позволяют получить их динамические характеристики с максимальным уровнем достоверности относительно данных эксперимента по собственным формам и частотам колебаний.

2. Специальные матрицы  $[MEM]$ ,  $\{KE\}$ ,  $[KE]_{\mu}$  и  $\{DPR\}$  позволяют подобрать оптимальное местоположение датчиков для фиксации значений откликов на конструкции при её натурных испытаниях, а также определить место приложения динамической нагрузки на конструкцию для возбуждения максимального количества форм колебаний.

3. Анализ корреляции собственных векторов, полученных на исходной и редуцированной КЭ-моделях, даёт возможность узнать, является ли выбранное положение датчиков оптимальным ещё до начала испытаний. В дополнение анализ корреляции результатов, полученных на редуцированной КЭ-модели и при испытании, позволяет понять, насколько подробно КЭ-модель способна отразить поведение реальной конструкции. Средством анализа корреляции собственных векторов являются коррелирующие матрицы.

4. На примере с антенной было доказано, что местоположение датчиков было подобрано верно и что КЭ-модель точно отражает поведение конструкции. Следовательно, доказано, что КЭ-модель антенны является валидированной и уточнения её параметров не требуется.

5. Высокая степень точности корреляции результатов анализа КЭ-модели антенны и результатов эксперимента позволяет реализовать возможность использования данной КЭ-модели при разработке системы мониторинга работы реальной конструкции антенны, а представленная в данной работе методика валидации КЭ-моделей может быть применена для других эксплуатируемых ответственных конструкций;

### Библиографический список

1. Chen G. FE model validation for structural dynamics // A thesis submitted to the University of London for the degree of Doctor of Philosophy. – 2001. – 209 p.
2. Леденёв В.В., Ярцев В.П. Обследование и мониторинг строительных конструкций зданий и сооружений. – Изд-во ТГТУ, 2017. – 252 с.
3. Мещихин И.А., Гаврюшин С.С., Зайцев Е.А. Мониторинг технических конструкций на основе редуцированных конечно-элементных моделей // Изв. высших учебных заведений. Машиностроение. – 2015. – № 9 [666]. – С. 10–18.
4. Savov K., Mordini A., Wenzel H. The finite element model updating: a powerful tool for structural health monitoring // Structural engineering international. – 2007. – Vol. 17. – No. 4. – P. 352–358. DOI: 10.2749/101686607782359010
5. Zong Z., Lin X., Niu J. Finite element model validation of bridge based on structural health monitoring. Part I: Response surface-based finite element model updating // Journal of Traffic and Transportation Engineering. – 2015. – Vol 2. – No. 4. – P. 258–278. DOI:10.1016/j.jtte.2015.06.001
6. Zong Z., Lin X., Niu J. Finite element model validation of bridge based on structural health monitoring. Part II: Uncertainty propagation and model validation // Journal of Traffic and Transportation Engineering. – 2015. – Vol 2. – No. 4. – P. 279–289. DOI: 10.1016/j.jtte.2015.06.002
7. Харченко М.А. Корреляционный анализ. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2008. – 31 с.
8. MSC.ProCOR 2005 r3. MSC.Software Corporation. – 2006. – 224 p.
9. Lung S.-F., Pak C.-G. Updating the finite element model of the aerostructures test wing using ground vibration test data // 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. – California, 2009. – AIAA 2009-2528. – 17 p.
10. Modal identification, model updating and nonlinear analysis of a reinforced concrete bridge / S. El-Borgi, M. Neifar, F. Cherif, S. Choura, S. Hichem // Journal of Vibration and Control. – 2008. – Vol. 14. – No. 4. – P. 511–530. DOI: 10.1177/1077546307079788
11. Rose T.L. Using superelements to identify the dynamic properties of a structure // MSC World Users' Conference Proceedings. – 1988. – URL: <http://web.mscsoftware.com/support/library/conf/wuc88/p04188.pdf> (accessed 27 September 2017).
12. Ching Y.T. Model reduction and model correlation using MSC/NASTRAN // MSC World Users' Conf. Proc. – 1995. – Paper no. 8.
13. Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA J. – 1965. – Vol. 3. – No. 2. – 380 p. DOI: 10.2514/3.2874
14. Qu Z-Q. Model Order Reduction Techniques. – London, Springer-Verlag, 2004. – 378 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-3827-3\_1.
15. Allemang A.J. The modal assurance criterion (MAC): twenty years of use and abuse // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Vol.37. – No. 8. – P. 14–21.
16. Ewins D. Modal testing: theory and practice. – Research studies press, Letchworth, Hertfordshire, England, 1984. – 313 p.
17. Mottershead J.E., Friswell M.I. Model updating in structural dynamics: a survey // Journal of Sound and Vibration. – 1993. – Vol. 167. – No. 2. – P. 347–375. DOI: 10.1006/jsvi.1993.1340



18. Berman A, Nagy E.J. Improvement of a large analytical model using test data // *AIAA Journal*. – 1983. – Vol. 21. – No. 8. – P. 1168–1173. DOI:10.2514/3.60140
19. Link M., Weiland M., Barragan J. Direct physical matrix identification as compared to phase resonance testing: an assessment based on practical application // *International Modal Analysis Conference, 5th, London, England Proceedings*. – 1987. – Vol. 1. – P. 804–811.
20. Minas C., Inman D. Correcting finite element models with measured modal results using eigenstructure assignment methods // *International Modal Analysis Conference, 6th, Kissimmee, FL*. – 1988. – P. 583–587.
21. Методика уточнения конечно-элементной модели механической системы с помощью анализа чувствительности [Электронный ресурс] / С.М. Николаев, И.А. Киселёв, В.А. Жулёв, П.С. Воронов // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* – 2014. – №1. – С.128–136. – URL: <http://old.technomag.edu.ru/doc/751548.html> (accessed 15 August 17). DOI: 10.7463/1214.0751548
22. Mottershead J.E., Link M., Friswell M.I. The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2011. – Vol. 25. – No. 7. – P. 2275–2296. DOI:10.1016/j.ymssp.2017.03.009
23. Collins J.D., Hart G.C., Hasselman T.K., Kennedy B. Statistical identification of structures // *AIAA Journal*. – 1974. – Vol. 12. – No. 2. – P. 185–190. DOI:10.2514/3.49190
24. Beck J.L., Katafugiotis L.S. Updating models and their uncertainties I: Bayesian statistical framework // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1998. – P. 455–461. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(455)
25. Uncertainty identification by the maximum likelihood method / J.R. Fonseca, M.I. Friswell, J.E. Mottershead, A.W. Lees // *Journal of Sound and Vibration*. – 2005. – Vol. 288. – No. 3. – P. 587–599. DOI:10.1016/j.jsv.2005.07.006
26. Khodaparast H.H., Mottershead J.E., Badcock K.J. Interval model updating with irreducible uncertainty using the Kriging predictor // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2011. – Vol. 25. – No. 4. – P. 1204–1226. DOI: 10.1016/j.ymssp.2010.10.009
27. Ren W., Chen H. Finite element model updating in structural dynamics by using the response surface method // *Engineering Structures*. – 2010. – Vol. 32. – No. 8. – P. 2455–2465. DOI:10.1016/j.engstruct.2010.04.019
28. On the use of statistics in design and the implications for deterministic computer experiments / T.W. Simpsons, J.D. Peplinski, P.N. Patrick, J.K. Allen // *ASME Design Engineering Technical Conferences*. – 1997. – 14 p.
29. Zhou L., Yan G., Ou J. Response surface method based on radial basis functions for modeling large-scale structures in model updating // *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. – 2013. – Vol. 28. – No. 3. – P. 210–226. DOI: 10.1111/j.1467-8667.2012.00803.x
30. Marwala T. Finite element model updating using response surface method // *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 7*. – 2007. – 9 p. DOI:10.2514/6.2004-2005

## References

1. Chen G. FE model validation for structural dynamics. A thesis submitted to the University of London for the degree of Doctor of Philosophy, 2001, 209 p.
2. Ledenev V.V., Iartsev V.P. Obsledovanie i monitoring stroitel'nykh konstrukttsii zdaniy i sooruzhenii [Inspection and monitoring of buildings]. *Izd-vo FBGOU VO «TGTU»*, 2017, 252 p.
3. Meshchikhin I.A., Gavriushin S.S., Zaitsev E.A. Monitoring tekhnicheskikh konstrukttsii na osnove redutsirovannykh konechno-elementnykh modelei [Monitoring of engineering structures using reduced finite element models]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie – Mechanical Engineering*, 2015, no.9[666], pp.10-18.
4. Savov K., Mordini A., Wenzel H. The finite element model updating: a powerful tool for structural health monitoring, *Structural engineering international*, 2007, 17 (4), pp. 352- 358. DOI: 10.2749/101686607782359010
5. Zong Z., Lin X., Niu J. Finite element model validation of bridge based on structural health monitoring – Part I: Response surface-based finite element model updating, 2015 *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2 (4), pp. 258-278. DOI:10.1016/j.jtte.2015.06.001

6. Zong Z., Lin X., Niu J. Finite element model validation of bridge based on structural health monitoring – Part II: Uncertainty propagation and model validation, 2015, *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2 (4), pp. 279-289. DOI: 10.1016/j.jtte.2015.06.002
7. Kharchenko M.A. Korreliatsionnyi analiz [Correlation analysis]. *Izdatel'sko-poligraficheskii tsentr Voronezhskogo universiteta*, 2008, 31 p.
8. MSC.ProCOR 2005 r3. *MSC.Software Corporation*, 2006, 224 p.
9. Lung S.-F., Pak C.-G. Updating the finite element model of the aerostructures test wing using ground vibration test data, *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. California, 2009. AIAA 2009-2528. 17 p.
10. El-Borgi S., Neifar M., Cherif F., Choura S., Hichem S. Modal identification, model updating and non-linear analysis of a reinforced concrete bridge, 2008, *Journal of Vibration and Control*, 14 (4), pp. 511-530. DOI: 10.1177/1077546307079788
11. Rose T.L. Using superelements to identify the dynamic properties of a structure, 1988, *MSC World Users' Conference Proceedings*, available at: <http://web.mscsoftware.com/support/library/conf/wuc88/p04188.pdf>
12. Ching Y.T. Model reduction and model correlation using MSC/NASTRAN. *MSC World Users' Conf. Proc.* 1995, Paper №. 8.
13. Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices, 1965, *AIAA J.*, 3 (2), p. 380. DOI: 10.2514/3.2874
14. Qu Z.-Q. Model Order Reduction Techniques. *Springer-Verlag London*, 2004, 378 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-3827-3\_1.
15. Allemang A.J. The modal assurance criterion (MAC): twenty years of use and abuse. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 37 (8), pp. 14-21.
16. Ewins D. Modal testing: theory and practice. *Research studies press, Letchworth, Hertfordshire, England*, 1984, 313 p.
17. Mottershead J.E., Friswell M.I. Model updating in structural dynamics: a survey, 1993, *Journal of Sound and Vibration*, 167 (2), pp. 347–375. doi:10.1006/jsvi.1993.1340
18. Berman A, Nagy E.J. Improvement of a large analytical model using test data, 1983, *AIAA Journal*, 21 (8), pp. 1168-1173. DOI:10.2514/3.60140
19. Link M., Weiland M., Barragan J. Direct physical matrix identification as compared to phase resonance testing: an assessment based on practical application. *International Modal Analysis Conference, 5th, London, England Proceedings*, 1987, vol. 1, pp. 804-811.
20. Minas C., Inman D. Correcting finite element models with measured modal results using eigenstructure assignment methods. *International Modal Analysis Conference, 6th, Kissimmee, FL*. 1988, pp. 583-587.
21. Nikolaev S.M., Kiselev I.A., Zhulev V. A., Voronov P.S. Metodika utochneniia konechno–elementnoi modeli mekhanicheskoi sistemy s pomoshch'iu analiza chuvstvitel'nosti [Sensitivity Based Finite Element Model Updating Technique]. *Nauka i Obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana, Elektron. Zhurn.*, 2014, no. 1, pp. 128-136. DOI: 10.7463/1214.0751548.
22. Mottershead J.E., Link M., Friswell M.I. The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial, 2011, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 (7), pp. 2275-2296. DOI:10.1016/j.ymsp.2017.03.009
23. Collins J.D., Hart G.C., Hasselman T.K., Kennedy B. Statistical identification of structures, 1974, *AIAA Journal*, 12 (2), pp.185-190. DOI:10.2514/3.49190
24. Beck J.L., Katafugiotis L.S. Updating models and their uncertainties I: Bayesian statistical framework, 1998, *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 455-461. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(455)
25. Fonseca J.R., Friswell M.I., Mottershead J.E., Lees A.W. Uncertainty identification by the maximum likelihood method, 2005, *Journal of Sound and Vibration*, 288 (3), pp. 587-599. doi:10.1016/j.jsv.2005.07.006
26. Khodaparast H.H., Mottershead J.E., Badcock K.J. Interval model updating with irreducible uncertainty using the Kriging predictor, 2011, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 (4), pp.1204-1226. DOI:10.1016/j.ymsp.2010.10.009
27. Ren W., Chen H. Finite element model updating in structural dynamics by using the response surface method, 2010, *Engineering Structures*, 32 (8), pp. 2455-2465. DOI:10.1016/j.engstruct.2010.04.019
28. Simpsons T.W., Peplinski J.D., Patrick P.N., Allen J.K. On the use of statistics in design and the implications for deterministic computer experiments. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1997, 14 p.
29. Zhou L., Yan G., Ou J. Response surface method based on radial basis functions for modeling large-scale structures in model updating, 2013, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 28 (3), pp. 210-226. DOI: 10.1111/j.1467-8667.2012.00803.x
30. Marwala T. Finite element model updating using response surface method. *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 7*. 2007, 9 p. DOI:10.2514/6.2004-2005