

Семенов А.С., Беляев М.О., Грищенко А.И. Моделирование процесса возникновения овальности поперечного сечения образцов из монокристаллических жаропрочных никелевых сплавов при растяжении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 153–177. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.09

Semenov A.S., Beliaev M.O., Grishchenko A.I. Modeling of cross-section ovality of single crystal nickel-based superalloy samples under tension. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 2, pp. 153-177. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.09



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.2.09

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОВАЛЬНОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ОБРАЗЦОВ ИЗ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЖАРОПРОЧНЫХ НИКЕЛЕВЫХ СПЛАВОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

А.С. Семенов, М.О. Беляев, А.И. Грищенко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 01 мая 2017 г.
Принята: 15 июня 2017 г.
Опубликована: 30 июня 2017 г.

Ключевые слова:

монокристаллические сплавы на никелевой основе, механические свойства, анизотропия, кубическая симметрия, упругость, пластичность, ползучесть, одноосное растяжение, овальность сечения, конечно-элементное моделирование.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача об одноосном растяжении цилиндрического тела из монокристаллического материала, обладающего кубической симметрией. Одним из характерных внешних проявлений анизотропии механических свойств материала является потеря начальной круговой формы поперечного сечения цилиндрического образца при растяжении или сжатии в условиях несоосности оси образца с осями анизотропии материала.

Задача решается в упругой, упругопластической и упруговязкопластической постановках. При решении краевых задач используются как аналитические, так и численные (трехмерное конечно-элементное моделирование) методы. Для оценки изменения формы сечения вводится безразмерный параметр овальности как отношение разности наибольшего и наименьшего диаметров к наименьшему. Производится сравнение результатов расчета с данными эксперимента на высокотемпературную ползучесть жаропрочного монокристаллического сплава на никелевой основе ВЖМ4. Исследуется влияние отклонения ориентации оси образца от осей анизотропии на форму поперечного сечения под нагрузкой и после ее удаления. При решении неупругих задач используются как микромеханические (кристаллографические) модели, так и феноменологические модели и производится сравнение полученных результатов. Решение задачи в упругопластической постановке с учетом геометрической нелинейности позволяет описать эволюцию процесса образования шейки, которая для анизотропных материалов может быть неосесимметричной.

Полученные результаты указывают на необходимость модификации методов измерений при выполнении механических испытаний анизотропных материалов на одноосное растяжение, связанных с регистрацией изменения размера поперечного сечения в целях определения осевой деформации. При идентификации параметров материала овальность может быть использована для оценки осевой деформации, а также для компенсации недостающей информации о кристаллографической ориентации образца.

© ПНИПУ

© Семенов Артем Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: semenov.artem@gmail.com

Беляев Михаил Олегович – студент, e-mail: belyaev-m-o@yandex.ru

Грищенко Алексей Иванович – аспирант, e-mail: gai-gr@yandex.ru

Artem S. Semenov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: semenov.artem@gmail.com

Mikhail O. Beliaev – Undergraduate Student, e-mail: belyaev-m-o@yandex.ru

Aleksey I. Grishchenko – PhD Student, e-mail: gai-gr@yandex.ru



MODELING OF THE CROSS-SECTION OVALITY OF SINGLE CRYSTAL NICKEL-BASED SUPERALLOY SAMPLES UNDER TENSION

A.S. Semenov, M.O. Beliaev, A.I. Grishchenko

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 May 2017
Accepted: 15 June 2017
Published: 30 June 2017

Keywords:

single-crystal nickel-base superalloy, mechanical properties, anisotropy, cubic symmetry, elasticity, plasticity, creep, tension, cross-section ovality, finite element modeling.

ABSTRACT

The problem of uniaxial tension of a cylindrical body from a single-crystal material with a cubic symmetry is considered. The loss of the initial circular shape of the cross section of a cylindrical specimen under tension or compression in conditions of misalignment of the sample axis with the anisotropy axes is one of the characteristic external manifestations of the mechanical properties anisotropy.

The problem is solved in elastic, elasto-plastic and elasto-visco-plastic formulations. Both analytical and numerical (three-dimensional finite element modeling) methods are used to solve boundary value problems. The dimensionless ovality parameter is introduced as a ratio of the difference between the largest and smallest diameters to the smallest ones aiming to estimate the change of the cross-section shape. The results of the calculations are compared with the experimental data concerning the high-temperature creep of the single-crystal nickel-based superalloy VZhM4. The deviation effect of the sample axis orientation from the anisotropy axes on the cross-section shape under loading and unloading is investigated. Both micromechanical (crystallographic) and phenomenological models are used to solve inelastic problems; and later the obtained results are compared. Taking into account the geometric nonlinearity in the solution of the elasto-plastic boundary value problem makes it possible to describe the evolution of the neck formation process which can be non-axisymmetric for anisotropic materials.

The obtained results indicate the need to abandon the measurement methods when performing the mechanical tests of anisotropic materials under uniaxial tension related to recording the change in the cross-section size in order to determine the axial deformation. The ovality can be directly used to estimate the axial strain, and also to compensate the missing information about the crystallographic orientation of the sample.

© PNRPU

Введение

Монокристаллические жаропрочные сплавы на никелевой основе [1–4] получили широкое распространение при изготовлении лопаток газовых турбин современных высокотемпературных авиационных и стационарных газотурбинных двигателей. Отличительными особенностями данного класса материалов являются: анизотропия механических свойств [5, 6], высокая жаропрочность и жаростойкость [1, 2], сопротивление высокотемпературной ползучести и длительной прочности за счет полного исключения границ между зёрнами [2], уменьшение величины модуля упругости в осевом направлении лопатки, приводящее к снижению термических напряжений и росту сопротивления малоциклового усталости [2], а также высокая стойкость к окислению [2–4].

Анализ длительной и термоусталостной прочности [7–12] требует проведения экспериментальных исследований свойств пластичности и ползучести, которые могут быть проведены с использованием цилиндрических образцов различной кристаллографической ориентации. Целью указанных испытаний является определение неупругих характеристик анизотропного материала, которые являются основой для выполнения конечно-элементного (КЭ) расчёта напряженно-деформированного состояния и оценки прочности и долговечности лопаток [13, 14].

Эффект возникновения и развития овальности при ползучести монокристаллических цилиндрических образцов наблюдался в ряде экспериментальных работ [15–18]. Потеря круговой формы поперечного сечения цилиндрического образца при растяжении в условиях несоосности оси образца с осями анизотропии материала приводит к необходимости совершен-

ствования методов экспериментального измерения деформаций, связанных, в частности, с отказом от измерения поперечной деформации на просвет в одном направлении, являющемся стандартным во многих испытательных комплексах. При проведении испытаний на одноосное растяжение цилиндрических образцов с регистрацией только изменения размера поперечного сечения в целях определения осевой деформации требуется внесение коррекций в методику проведения измерений для монокристаллических материалов с ярко выраженной анизотропией. В работе [18] предложена методика экспериментального измерения овальности с использованием трех различно ориентированных по отношению к образцу видеокамер.

Измерение овальности под нагрузкой или после ее снятия может быть использовано для оценки осевой деформации и кристаллографической ориентации образца. Теоретические основы и информативность подобных измерений рассматриваются в данной работе.

Основной причиной возникновения овальности является анизотропия механических (упругих, пластических, вязких) свойств образцов. Монокристаллические сплавы на основе никеля обнаруживают на макроуровне свойства кубической симметрии, при которой механические свойства оказываются практически одинаковыми на трех взаимно перпендикулярных направлениях. Свойства материала с кубической симметрией инвариантны относительно вращений на 90° вокруг трех ортогональных осей (3 оси симметрии четвертого порядка, проходящие через центры противоположных граней куба). Следует отметить, что кубическая сингония является простейшей формой анизотропии, требующей для описания минимального числа констант. Например, в случае кубической симметрии число упругих модулей равно 3, что незначительно отличается от изотропного материала с двумя упругими модулями. Для сравнения число независимых параметров в гексагональной системе – 5, тетрагональной (D4) и ромбоэдрической (D3) – 6, ромбической – 9, моноклинной – 13, триклинной – 21 [19]. Для трансверсально-изотропного и ортотропного материалов число упругих констант составляет 5 и 9 соответственно. Следует отметить, что рассмотренные ниже общие закономерности искажения формы поперечного сечения цилиндрического образца при растяжении и рекомендации учета указанного эффекта при проведении экспериментов могут рассматриваться в качестве основы при анализе поведения различных анизотропных материалов.

Целью данной работы является систематическое исследование влияния отклонения ориентации оси цилиндрического образца от осей анизотропии на форму поперечного сечения при решении задачи в упругой, упругопластической и упруговязкопластической постановках. При решении рассматриваемой задачи используются как аналитические (где это возможно), так и численные методы. Решение задачи в упругой постановке рассматривалось Фойхтом [20] и Лехницким [21]. В данной работе расчеты неупругого деформирования проводятся с использованием как микромеханических (кристаллографических) моделей, так и феноменологических моделей. Оценка валидности полученных решений производится на основе сравнения результатов расчетов с данными эксперимента на ползучесть жаропрочного монокристаллического сплава на никелевой основе ВЖМ4.

1. Постановка задачи

Исследуется влияние кристаллографической ориентации образца, уровня осевых деформаций и температуры на возникновение и эволюцию овальности поперечного сечения образца в условиях одноосного растяжения как при низких уровнях нагрузки (с использованием упругой модели материала), так и при высоких значениях нагрузки (с использованием упругопластической модели материала), а также при высокотемпературном нагружении с выдержкой (с использованием модели ползучести).

Овальность как геометрическая характеристика изменения формы поперечного сечения при *упругом* деформировании определялась аналитически на основе зависимости коэффициента поперечной деформации от азимутального угла, при *неупругом* деформировании определялась как аналитически (без учета процесса шейкообразования), так и на основе анализа результатов КЭ решения (с учетом возможности шейкообразования). В качестве характеристики величины овальности поперечного сечения α выбрано отношение разности наибольшего D_{\max} и наименьшего D_{\min} диаметров деформированного сечения к D_{\min} :

$$\alpha = \frac{D_{\max} - D_{\min}}{D_{\min}}. \quad (1)$$

Нелинейный анализ выполнялся методами прямого КЭ моделирования процессов деформирования монокристаллических образцов в трехмерной постановке с учетом геометрических особенностей образца. При получении численного решения были использованы КЭ программные комплексы ANSYS [22] (с использованием феноменологических моделей пластичности и ползучести кристалла) и PANTOCRATOR [23] (с использованием микро-механических (кристаллографических) моделей пластичности и ползучести кристалла).

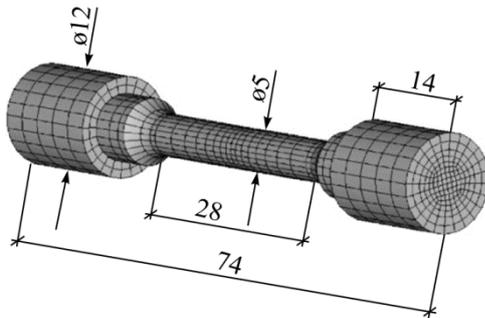


Рис. 1. Конечно-элементная модель образца для испытаний на растяжение
Fig. 1. Finite element model of the tensile test specimen

КЭ модель образца представлена на рис. 1. В расчетах использовались двадцатиузловые изопараметрические квадратичные гексаэдрические конечные элементы. Наличие анизотропных свойств материала не позволяет в общем случае учесть симметрию в геометрии образца, что привело к отказу от осесимметричной постановки задачи и от рассмотрения только одной половины конструкции.

Образцы были изготовлены из монокристаллического сплава на никелевой основе ВЖМ4 [24, 17]. Основные параметры материала, используемые в расчетах, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры сплава ВЖМ4 [24, 17], используемые в КЭ расчетах

Table 1

Parameters of the alloy VZhM4 [24, 17], used in the FE computations

		Температура T , °C		
		20	700	1000
Модуль Юнга $E_{[001]}$	МПа	13000	10100	8600
Коэффициент Пуассона ν_{12}	–	0,39	0,42	0,43
Модуль сдвига G_{12}	МПа	11900	9500	8300
Коэффициент линейного температурного расширения α	1/°C	$1,11 \cdot 10^{-5}$	$1,68 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$
Предел текучести $\sigma_{0,2 [001]}$	МПа	846	950	690
Предел текучести $\sigma_{0,2 [111]}$	МПа	1320	1140	810
Предел прочности $\sigma_B [001]$	МПа	1330	1264	780
Предел прочности $\sigma_B [111]$	МПа	1700	1500	910
Константа ползучести Нортона $A_{[001]}$	(МПа) ⁻ⁿ	$1,00 \cdot 10^{-32}$	$2,12 \cdot 10^{-29}$	$6,89 \cdot 10^{-20}$
Константа ползучести Нортона $n_{[001]}$	–	8	8	8

Нагружение на внешних торцах задавалось сосредоточенными силами, действующими вдоль оси образца. Допускался свободный поворот торцевых сечений образца в целях максимального приближения к условиям проведения экспериментов на ползучесть. При решении задачи упругопластичности нагрузка предполагалась монотонно возрастающей от нуля до уровня, соответствующего разрушению. При решении задачи ползучести нагрузка задавалась постоянной в течение всего исследуемого интервала времени. При проведении КЭ расчетов для инициирования шейкообразования задавался незначительный начальный дефект.

2. Модели материала

Определяющие уравнения *линейно-упругого* анизотропного материала для случая кубической симметрии, записанные в осях собственной анизотропии [100], [010] и [001], имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} + \frac{1}{E_1} \sigma_{33}, \\ \gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{12}, \\ \gamma_{23} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{23}, \\ \gamma_{31} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{31}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где использованы три упругих параметра $E_1 = E_{[001]}$, ν_{12} и G_{12} , которые являются независимыми в отличие от случая изотропного материала, для которого имеется связь $E_1 = 2G_{12}(1 + \nu_{12})$.

С использованием обозначений прямого тензорного исчисления определяющие уравнения (2) могут быть переписаны в виде, инвариантном к выбору системы координат:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; ${}^4\mathbf{C}$ – тензор упругих податливостей 4-го ранга; $(\cdot\cdot)$ – обозначает операцию двойного скалярного произведения или свертки: ${}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = C_{ijkl} \sigma_{kl}$. Матрица упругих податливостей, соответствующая ${}^4\mathbf{C}$, является симметричной и в осях собственной анизотропии допускает представление:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В произвольном (повернутом) базисе, отличном от базиса собственной анизотропии с базисными ортами, совпадающими с ребрами кристаллической решетки [100], [010] и [001], матрица $[\mathbf{C}]$ не будет содержать в общем случае нулевых компонент.

При формулировке феноменологических моделей неупругого деформирования монокристалл рассматривается как анизотропная сплошная среда, учитывающая исходную и деформационную анизотропию. В качестве простейшего варианта формулировки функции нагружения может быть использован критерий Хилла, основанный на задании квадратичной формы в пространстве напряжений [25, 26]:

$$f = \sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{X}) \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{X})} - R - \sigma_T = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ – девиатор тензора напряжений; $\mathbf{1}$ – единичный тензор; \mathbf{X} – тензор микронапряжений, определяющий местоположение центра поверхности нагружения; ${}^4\mathbf{M}$ – тензор четвертого ранга, характеризующий анизотропию поверхности нагружения. В случае изотропного тензора ${}^4\mathbf{M}$ критерий (5) переходит в критерий Мизеса. Альтернативные (более сложные) варианты критерия (5) представлены в работах [27–30] и др.

Скорость неупругой (пластической) деформации \mathbf{d}^p в феноменологической теории определяется на основе ассоциированного закона:

$$\mathbf{d}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (6)$$

где для вычисления множителя \dot{p} используются выражения:

- для вязкоупругой модели

$$\dot{p} = A \left(\mathbf{s} \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{s} \right)^{n/2} p^m, \quad (7a)$$

- для вязкопластической модели

$$\dot{p} = \left\langle \frac{\sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{X}) \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{X})} - R - \sigma_T}{K} \right\rangle^n, \quad (7b)$$

- для упругопластической модели

$$\dot{p} = \begin{cases} \left(\frac{dR}{dp} \right)^{-1} \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{X}) \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot (\dot{\mathbf{s}} - \dot{\mathbf{X}})}{\sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{X}) \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{X})}}, & \sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{X}) \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{X})} - R - \sigma_T = 0, \\ 0, & \sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{X}) \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{X})} - R - \sigma_T < 0. \end{cases} \quad (7\text{в})$$

В выражении (7б) использованы скобки Макойли $\langle x \rangle = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Внутренние переменные, характеризующие нелинейное изотропное и кинематическое упрочнение, определяются равенствами

$$R = bQr, \quad \dot{r} = (1 - br)\dot{p}, \quad (8\text{а})$$

$$\mathbf{X} = {}^4\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{x}, \quad \overset{\nabla}{\mathbf{x}} = \mathbf{d}^p - {}^4\mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{x}\dot{p}, \quad (8\text{б})$$

где символом $\overset{\nabla}{(\)}$ обозначена производная Яумана.

Учет нелинейного кинематического упрочнения актуален при анализе процессов циклического деформирования с несимметричным циклом нагружения. При монотонном нагружении можно ограничиться учетом только изотропного упрочнения, то есть принять ${}^4\mathbf{N} = {}^4\mathbf{L} = \mathbf{0}$ и как следствие этого $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

В уравнениях (7)–(8) $A, n, m, \sigma_T, K, b, Q$ – константы материала (допускающие зависимость от температуры). Для кубической группы симметрии кристалла тензоры ${}^4\mathbf{M}$, ${}^4\mathbf{N}$, ${}^4\mathbf{L}$, ${}^4\mathbf{C}$, а также тензор упругих модулей ${}^4\mathbf{D} = {}^4\mathbf{C}^{-1}$ в системе координат, связанной с кристаллографическим базисом, имеет следующую структуру, характеризующуюся только тремя константами (для ${}^4\mathbf{M}$ это M_{11}, M_{12} и M_{44}):

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{12} & M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Учитывая, что в критерии (5) производится свертка ${}^4\mathbf{M}$ с девиаторами, а также выбирая σ_T равным пределу текучести при нагружении вдоль оси $\langle 001 \rangle$ (что приводит к равенству $M_{11} - M_{12} = 1$), для формулировки критерия (5) достаточно задать только одну дополнительную константу M_{44} [29]. Константа M_{44} может быть найдена из опытов на растяжение при двух произвольных несовпадающих ориентациях. Например, на основе данных о пределах текучести при ориентациях $\langle 001 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$

$$M_{44} = 3 \left(\frac{\sigma_{T\langle 001 \rangle}}{\sigma_{T\langle 111 \rangle}} \right)^2 - 1. \quad (10)$$

При многоосном непропорциональном нагружении следует использовать более сложные модели неупругого деформирования [31, 32 и др.], однако для рассматриваемого случая одноосного растяжения вариант (6) является достаточным.

При использовании *микромеханических* (физических, кристаллографических) моделей материала [33–38] предполагается, что пластическое течение осуществляется как результат возможного скольжения в N системах скольжения, характеризуемых нормалью к α -й плоскости скольжения \mathbf{n}^α и направлением скольжения \mathbf{l}^α ($\alpha = 1, \dots, N$). Для рассматриваемого случая монокристаллов с кубической гранецентрированной решеткой при учете только октаэдрических систем скольжения $N = 12$. Скорость неупругой (пластической) деформации определяется равенством

$$\mathbf{d}^p = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}^\alpha (\mathbf{l}^\alpha \mathbf{n}^\alpha)^S, \quad (11)$$

вводимым вместо (6). Для вычисления скорости сдвиговых деформаций $\dot{\gamma}^\alpha$ в α -й системе скольжения используются выражения, аналогичные (7):

- для *вязкоупругой* модели

$$\dot{\gamma}^\alpha = A |\tau^\alpha|^n (\gamma^\alpha)^m \text{sign}(\tau^\alpha), \quad (12a)$$

- для *вязкопластической* модели

$$\dot{\gamma}^\alpha = \left\langle \frac{|\tau^\alpha - X^\alpha| - R^\alpha - \tau_0}{K} \right\rangle^n \text{sign}(\tau^\alpha - X^\alpha), \quad (12b)$$

- для *упругопластической* модели

$$\dot{\gamma}^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{\partial R^\alpha}{\partial \gamma^\beta} \right]^{-1} (\dot{\tau}^\alpha - \dot{X}^\alpha) \text{sign}(\tau^\alpha - X^\alpha), & |\tau^\alpha - X^\alpha| - R^\alpha - \tau_0 = 0, \\ 0, & |\tau^\alpha - X^\alpha| - R^\alpha - \tau_0 < 0, \end{cases} \quad (12b)$$

где $\tau^\alpha = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{l}^\alpha \mathbf{n}^\alpha)^S$ – касательные напряжения, приведенные к α -й системе скольжения.

Переменные, характеризующие нелинейное изотропное и кинематическое упрочнение, определяются равенствами

$$R^\alpha = bQ \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} r^\beta, \quad \dot{r}^\alpha = (1 - br^\alpha) \dot{\gamma}^\alpha, \quad (13a)$$

$$X^\alpha = Nx^\alpha, \quad \dot{x}^\alpha = [\text{sign}(\tau^\alpha - X^\alpha) - Lx^\alpha] \dot{\gamma}^\alpha. \quad (13b)$$

Недиагональная структура матрицы изотропного упрочнения $h^{\alpha\beta}$, задаваемая в виде

$$h^{\alpha\beta} = H [q + (1 - q) \delta_{\alpha\beta}], \quad (14)$$

позволяет учесть перекрестное (латентное) упрочнение [39] путем введения в рассмотрение взаимного влияния различных систем скольжения друг на друга.

В уравнениях (12)–(14) $A, n, m, \tau_0, K, b, Q, N, L, H, q$ – константы материала (допускающие зависимость от температуры).

3. Результаты расчетов

Рассматривается задача об осевом растяжении анизотропного цилиндрического тела с начальной круговой формой поперечного сечения в условиях несоосности оси образца с осями анизотропии материала. Задача решается в упругой, упругопластической и упруговязкопластической постановках. Исследуется влияние на овальность следующих факторов:

- кристаллографической ориентации образца (азимутальной и аксиальной ориентаций);
- уровня осевой деформации;
- уровня температуры;
- модели деформирования материала.

Результаты КЭ анализа позволяют определить величину радиальных перемещений точек на внешнем контуре поперечного сечения образца в процессе деформирования или после снятия нагрузки, что является основой для вычисления текущей или остаточной овальности. В случае возникновения шейки у образца при пластическом деформировании овальность оказывается зависящей от осевой координаты и целью расчетов становится определение ее максимального значения.

3.1. Вычисление овальности в упругой постановке

В случае анизотропного линейно-упругого материала овальность (1) может быть выражена аналитически через коэффициент поперечной деформации (расширенная интерпретация коэффициента Пуассона) и осевую деформацию однородно деформируемого цилиндрического образца. Следует отметить, что овальность в значительной мере зависит от кристаллографической ориентации образца.

Для дальнейшего анализа вводятся в рассмотрение две системы координат. Первая (*лабораторная*) система координат XYZ связана с образцом (Z направлена вдоль оси образца, вдоль оси Z также прикладывается внешнее воздействие (растягивающая сила)). Вторая (*кристаллографическая*) система координат связана с ориентацией кристаллической решетки. Кристаллографическая ориентация образца в общем случае может быть задана на основе введения трех углов Эйлера φ, θ, ψ (рис. 2), характеризующих переход от кристаллографической системы к лабораторной путем трех последовательных поворотов.

Последнее вращение вокруг оси образца Z на угол ψ характеризует азимутальную ориентацию образца и непосредственно используется при анализе зависимости изменения радиуса при деформировании для различных точек сечения образца. Результирующая матрица поворота из кристаллографической в лабораторную систему координат определяется как произведение трех элементарных матриц поворота вокруг осей $Z^*=[001]$, X^* и Z соответственно:

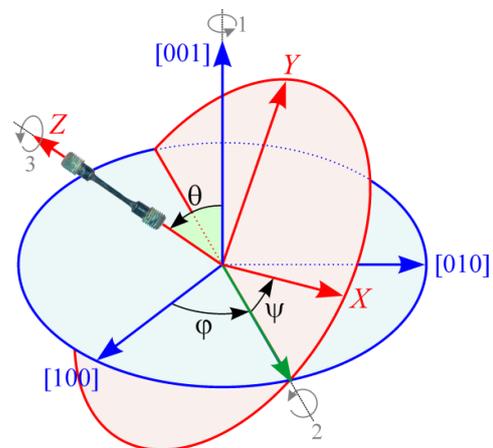


Рис. 2. Углы Эйлера, характеризующие кристаллографическую ориентацию образца

Fig. 2. Euler angles for specifying the crystallographic orientation of the sample

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Коэффициент поперечной деформации при растяжении образца вдоль оси Z при измерении поперечной деформации в направлении оси X определяется соотношением [2]

$$\nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} = \frac{\nu_{12} - (1 + \nu_{12} - E_1 / 2G_{12})(l_z^2 l_x^2 + m_z^2 m_x^2 + n_z^2 n_x^2)}{1 - 2(1 + \nu_{12} - E_1 / 2G_{12})(l_z^2 m_z^2 + m_z^2 n_z^2 + n_z^2 l_z^2)}, \quad (16)$$

где ε_{xx} – поперечная деформация образца; ε_{zz} – продольная деформация образца; $E_1 = E_{[001]}$, ν_{12} – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) при растяжении образца вдоль оси $[001]$ при измерении поперечной деформации в направлении оси $[100]$; G_{12} – модуль сдвига, также измеренный в кристаллографических осях; $l_x, l_z, m_x, m_z, n_x, n_z$ – направляющие косинусы углов между осями кристаллографической и лабораторной системами координат:

$$\begin{aligned} l_x &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi, & l_z &= \sin \varphi \sin \theta, \\ m_x &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi, & m_z &= -\cos \varphi \sin \theta, \\ n_x &= \sin \theta \sin \psi, & n_z &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Направляющие косинусы $l_x, l_z, m_x, m_z, n_x, n_z$ (17) были найдены как элементы матрицы поворота $[\mathbf{R}]$ (15): $l_x = R_{11}, l_z = R_{31}, m_x = R_{21}, m_z = R_{32}, n_x = R_{13}, n_z = R_{33}$.

Для образца с кристаллографической ориентацией $[001]$ имеем $\varphi = 0, \theta = 0$ и как следствие (16) $\nu_{xz} = \nu_{12}$. Для образца с кристаллографической ориентацией $[111]$ имеем $\varphi = \arccos(1/\sqrt{2}), \theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, и как следствие (16) коэффициент поперечной деформации также оказывается постоянным (не зависящим от ψ):

$$\nu_{xz} = \frac{\nu_{12} - 1/3 \cdot (1 + \nu_{12} - E_1 / 2G_{12})}{1 - 2/3 \cdot (1 + \nu_{12} - E_1 / 2G_{12})}.$$

Для образца с кристаллографической ориентацией $[011]$ имеем $\varphi = 0, \theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = 45^\circ$, и как следствие (16) коэффициент поперечной деформации оказывается чувствительным к изменению угла ψ ,

$$\nu_{xz} = \frac{\nu_{12} - 1/2(1 + \nu_{12} - E_1 / 2G_{12}) \sin^2 \psi}{1 - 1/2(1 + \nu_{12} - E_1 / 2G_{12})}.$$

В общем случае $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\varphi, \theta, \psi)$. На рис. 3 представлены азимутально-ориентационные зависимости коэффициента поперечной деформации $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\psi)$ для ВЖМ4 при 20 °С для монокристаллов с кристаллографическими ориентациями $[001]$, $[011]$, $[012]$ и $[111]$. Для образца ориентации $[011]$ максимальное значение ν_{xz} наблюдается при $\psi = 0^\circ$, что соответствует измерению поперечных деформаций вдоль оси $[100]$, минимальное – при $\psi = 90^\circ$, соответствующем измерению поперечных деформаций вдоль направления $[01\bar{1}]$.

Коэффициент поперечной деформации v_{xz} для образца с кристаллографической ориентацией [011] изменяется в широком диапазоне: от $-0,05$ до $0,67$. Интересно отметить, что принятые для изотропного материала границы изменения коэффициента Пуассона от 0 до $0,5$ оказались нарушенными для рассматриваемого анизотропного материала. При растяжении цилиндрического образца появление отрицательных значений коэффициента поперечной деформации означает увеличение радиуса поперечного сечения для локальных областей с ψ , близким к 90 и 270° .

Общая картина изменения коэффициента поперечной деформации при варьировании кристаллографической ориентации образца (не ограничиваемая только рассмотренными выше случаями ориентаций [001], [011] и [111]) может быть проанализирована на основе введения в рассмотрение распределений в пределах сферического треугольника (рис. 4, полученный с использованием программы CES [41]), где изменение θ соответствует изменению радиальной координаты, а изменение φ – изменению полярного угла в пределах сферического треугольника. Вследствие высокой симметрии кубических монокристаллов при анализе ориентационных зависимостей вместо полного телесного угла может быть рассмотрен только сферический треугольник (часть, заключенная между направлениями [001], [011] и $[\bar{1}11]$). Остальные области могут быть получены путем поворотов и отражений. Характер распределения коэффициентов поперечной деформации для шести случаев $v_{xz}, v_{yz}, v_{zy}, v_{xy}, v_{yx}, v_{zx}$, соответствующих трем различным ортогональным направлениям воздействия, различается значительно (рис. 4, а–е). Симметрия индексов $v_{ij} = v_{ji}$ наблюдается только в кристаллографической системе координат. При отклонении от нее указанное равенство нарушается: в общем случае $v_{xz} \neq v_{zx}$ (ср. рис. 4, а и е), $v_{yz} \neq v_{zy}$ (ср. рис. 4, б и в) и $v_{xy} \neq v_{yx}$ (ср. рис. 4, г и д).

Овальность (1), возникающая в процессе деформирования, может быть вычислена на основе коэффициентов поперечной деформации:

$$\alpha = \frac{D_0(1 + \varepsilon_{\perp}^{\max}) - D_0(1 + \varepsilon_{\perp}^{\min})}{D_0(1 + \varepsilon_{\perp}^{\min})} = \frac{v_{\perp\parallel}^{\max} - v_{\perp\parallel}^{\min}}{1 - v_{\perp\parallel}^{\max} \varepsilon_{\parallel}} \varepsilon_{\parallel}, \quad (18)$$

где D_0 – начальный диаметр образца; $\varepsilon_{\perp}^{\max}, \varepsilon_{\perp}^{\min}$ – максимальная и минимальная поперечная деформация образца; ε_{\parallel} – осевая деформация образца, $v_{\perp\parallel}^{\max} = -\varepsilon_{\perp}^{\min} / \varepsilon_{\parallel}$, $v_{\perp\parallel}^{\min} = -\varepsilon_{\perp}^{\max} / \varepsilon_{\parallel}$ – максимальный и минимальный коэффициент поперечной деформации.

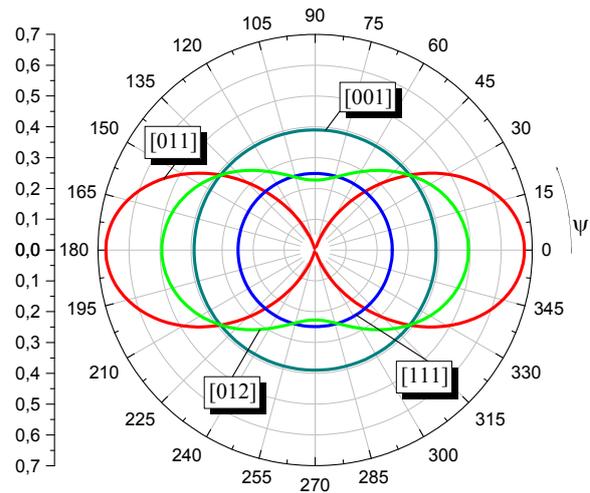


Рис. 3. Зависимость коэффициента поперечной деформации v_{xz} от азимутальной ориентации для монокристаллического сплава ВЖМ4 при 20°C при различных аксиальных ориентациях образца

Fig. 3. Dependence of the transverse deformation coefficient v_{xz} from azimuthal orientation for the single-crystal alloy VZhM4 at 20°C for different axial orientations of a sample

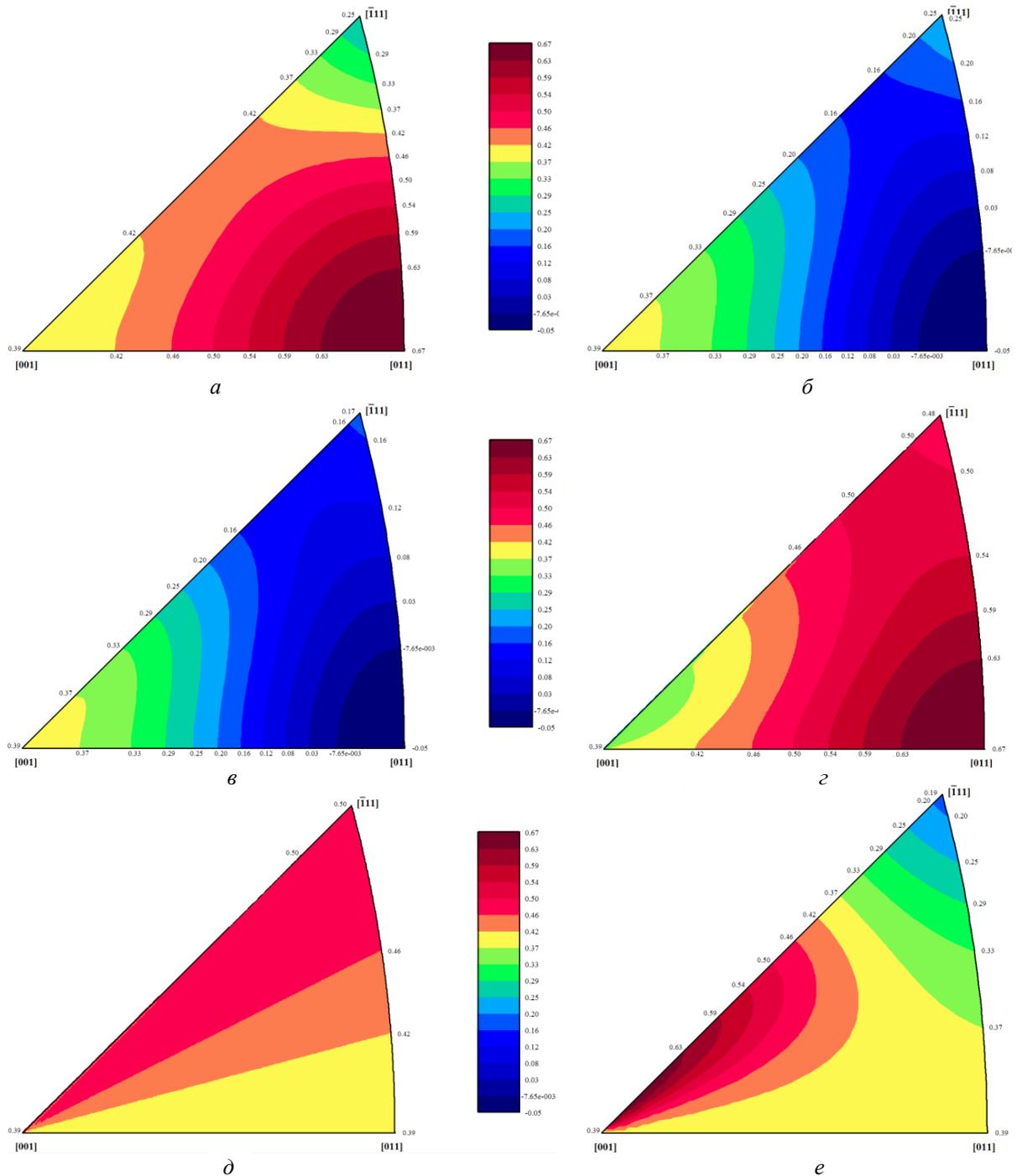


Рис. 4. Зависимость коэффициентов поперечной деформации (а) ν_{xz} ; (б) ν_{yz} ; (в) ν_{zy} ; (г) ν_{xy} ; (д) ν_{yx} ; (е) ν_{zx} от ориентации образца из монокристаллического сплава ВЖМ4 при 20 °С

Fig. 4. Dependence of the transverse deformation coefficients (a) ν_{xz} ; (b) ν_{yz} ; (c) ν_{zy} ; (d) ν_{xy} ; (e) ν_{yx} ; (f) ν_{zx} from orientation of the single-crystal sample from alloy VZhM4 at 20 °С

Как показывает анализ выражений (16)–(18), овальность будет максимальной для ориентации [011]. Данный результат также может быть получен из рассмотрения рис. 4. Для ориентации [011] следствием (18) получаем следующее выражение для овальности:

$$\alpha = \frac{1 + \nu_{12} - E_1 / 2G_{12}}{1 - \nu_{12} + E_1 / 2G_{12} - 2\nu_{12}\varepsilon_{\parallel}} \varepsilon_{\parallel}. \quad (19)$$

Теоретически полученная зависимость овальности поперечного сечения цилиндрического образца из монокристаллического сплава ВЖМ4 при 20 °С показана на рис. 5. Наблюдается прогрессирующий характер роста овальности с ростом деформации. Подобный вид зависимости для овальности является следствием ее определения (1). При использовании альтернативного определения $\alpha' = (D_{\max} - D_{\min}) / D_0$ может быть установлена линейная зависимость α' от осевых деформаций. Следует отметить, что при получении зависимости (19) не учитывалось возникновение пластических деформаций, неизбежно присутствующих (и даже доминирующих) при больших деформациях.

Следует отметить, что при малых отклонениях оси образца от [001] овальность будет малой. Например, при осевой деформации 20 % для 10° отклонения оси образца от [001] ($\theta = 10^\circ, \varphi = 0^\circ$), являющегося предельно допустимым при отбраковке образцов для механических испытаний, овальность α составит 1 %, в то время как для 45° отклонения от [001] ($\theta = 45^\circ, \varphi = 0^\circ$ соответствует [011]) овальность превосходит 16 %.

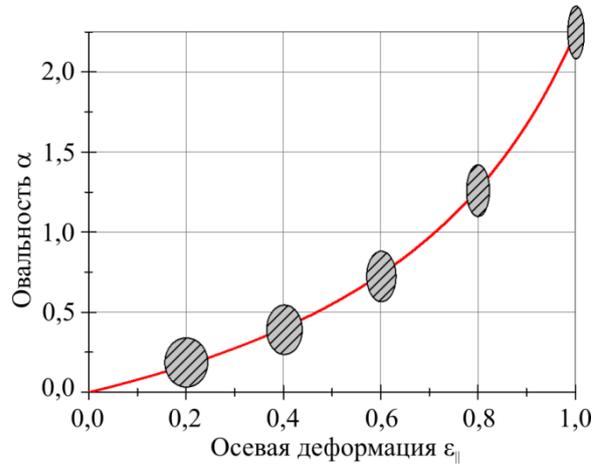


Рис. 5. Зависимость овальности от осевой деформации цилиндрического образца ориентации [011] для монокристаллического сплава ВЖМ4 при 20 °С (линейно-упругая постановка задачи)

Fig. 5. Dependence of the ovality on the axial deformation of a cylindrical sample with orientation [011] for a single-crystal alloy VZhM4 at 20 °C (linear elastic formulation of the problem)

3.2. Вычисление овальности в упругопластической постановке

Простейшие аналитические оценки ориентационной зависимости коэффициента поперечной деформации при неупругом растяжении образца вдоль оси Z были получены с использованием соотношения

$$\nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{xx}^p}{\varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p} = -\frac{-\nu_{12}/E - (1/E + \nu_{12}/E - 1/2G_{12})(l_z^2 l_x^2 + m_z^2 m_x^2 + n_z^2 n_x^2) + \varepsilon_{xx}^p}{1/E - 2(1/E + \nu_{12}/E - 1/2G_{12})(l_z^2 m_z^2 + m_z^2 n_z^2 + n_z^2 l_z^2) + \varepsilon_{zz}^p}, \quad (20)$$

где ε_{xx} , ε_{zz} – поперечная и продольная деформации образца; ε_{xx}^e и ε_{zz}^e – их упругие составляющие, вычисляемые аналогично (16); ε_{xx}^p и ε_{zz}^p – пластические деформации, вычисляемые на основе соотношений микромеханической модели (11), (12б) с последующим переходом в лабораторную систему координат при помощи тензора поворота (15).

На рис. 6 представлены вычисленные на основе (20) азимутально-ориентационные зависимости коэффициента поперечной деформации $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\psi)$ для ВЖМ4 при 1000 °С. Наблюдается схожий с упругим решением (ср. с рис. 3) характер влияния аксиальной ориентации (рис. 6, а для ориентаций [001], [011], [012] и [111]). Однако, в отличие от упругого решения, полученные зависимости оказываются чувствительными к уровню де-

формаций (напряжений) (см. рис. 6, б). С ростом деформаций (напряжений) кривые становятся менее вытянутыми, с менее контрастным соотношением габаритных размеров в характерных ортогональных направлениях.

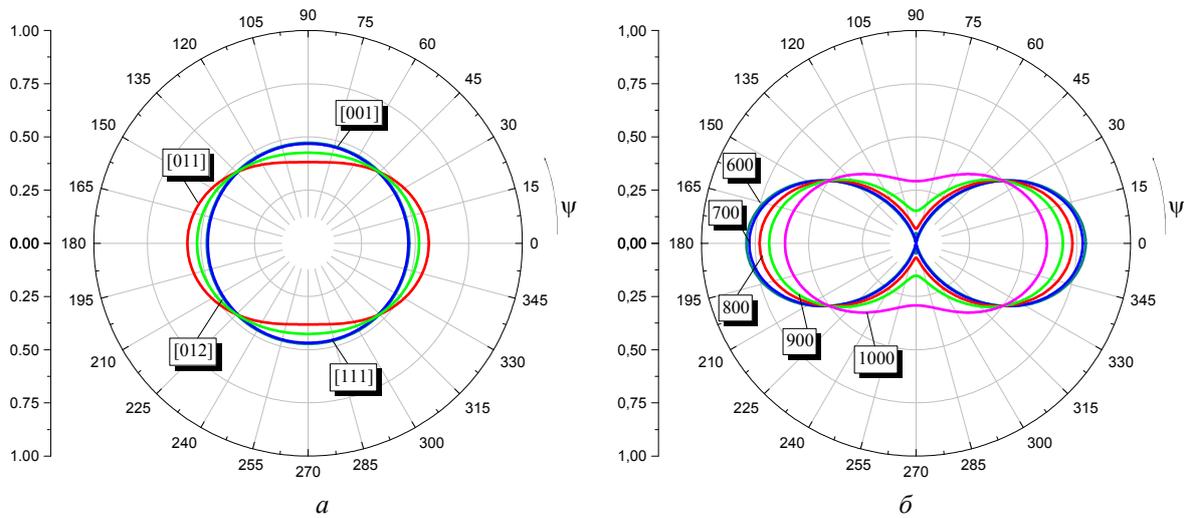


Рис. 6. Зависимости коэффициента поперечной деформации v_{xz} от азимутальной ориентации для монокристаллического сплава ВЖМ4 при 1000 °С для: *a* – различных аксиальных ориентаций образца при осевой деформации 3 %; *б* – различных уровней напряжений (МПа) для ориентации [011]
 Fig. 6. Dependence of the transverse deformation coefficient v_{xz} from azimuthal orientation for the single-crystal alloy VZhM4 at 1000 °C for: *a* – different axial orientations of a sample under 3 % strain; *b* – different stresses (MPa) for orientation [011]

Недостатком рассмотренного подхода является неучет процессов локализации деформаций и шейкообразования, которые могут быть учтены при решении задачи численными методами.

При КЭ моделировании процесса упругопластического деформирования цилиндрического образца начального кругового поперечного сечения использовались две модели пластичности: микромеханическая (физическая) (11), (12в), (13) и феноменологическая (6), (7в), (8). Сравнение овальности поперечного сечения образца проводилось при различных температурах: 20 и 1050 °С, а также при различных уровнях осевых деформаций.

Результаты КЭ расчетов показали, что, как и при решении задачи в упругой постановке, наибольшая овальность при решении задачи в упругопластической постановке наблюдается для кристаллографических ориентаций $\langle 011 \rangle$. Полученные расчетным и аналитическим путем значения овальности α для образцов с кристаллографической ориентацией [011] приведены в табл. 2.

Распределения полей радиальных перемещений, наиболее полно отражающих возникновение овальности поперечного сечения образца, показаны на рис. 7 для различных моделей деформирования и уровней осевых деформаций. Наибольшее сжатие наблюдается в направлении оси [100] при растяжении вдоль оси [011].

Отличием упругопластического решения от упругого является наблюдаемый в первом случае прогрессирующий рост овальности при интенсивном шейкообразовании. Вследствие шейкообразования овальность при пластичности много выше: 54 % в сравнении с 4 % при упругости (см. рис. 5) для осевой деформации 6 %. В пластичности, так же как и в упругости, возникают области увеличения поперечных размеров при растяжении анизотропного материала (отрицательные коэффициенты поперечной деформации). Однако указан-

ные области имеют более локальный характер – в целом по сечению доминируют области с положительными коэффициентами поперечной деформации.

Таблица 2

Значения овальности α для образцов с кристаллографической ориентацией [011]

Table 2

Ovality α for samples with crystallographic orientation [011]

Осевые деф., ε , %	КЭ расчет				Аналитическое решение	
	Микромеханическая модель пластичности (11)–(13)		Феноменологическая модель пластичности (6)–(8)		Микромеханическая модель пластичности (11)–(13)	
	$T=20\text{ }^\circ\text{C}$	$T=1050\text{ }^\circ\text{C}$	$T=20\text{ }^\circ\text{C}$	$T=1050\text{ }^\circ\text{C}$	$T=20\text{ }^\circ\text{C}$	$T=1050\text{ }^\circ\text{C}$
0,14	0,0746	0,0856	0,0746	0,0856	0,103	0,119
0,7	0,458	0,452	0,365	0,393	0,303	0,446
1,0	0,745	0,716	0,482	0,442	0,330	0,502
1,5	1,23	1,34	0,670	0,502	0,363	0,541
3,0	2,84	13,6	1,23	0,746	0,415	0,556
5,8	23,4	51,5	3,53	1,74	0,440	–

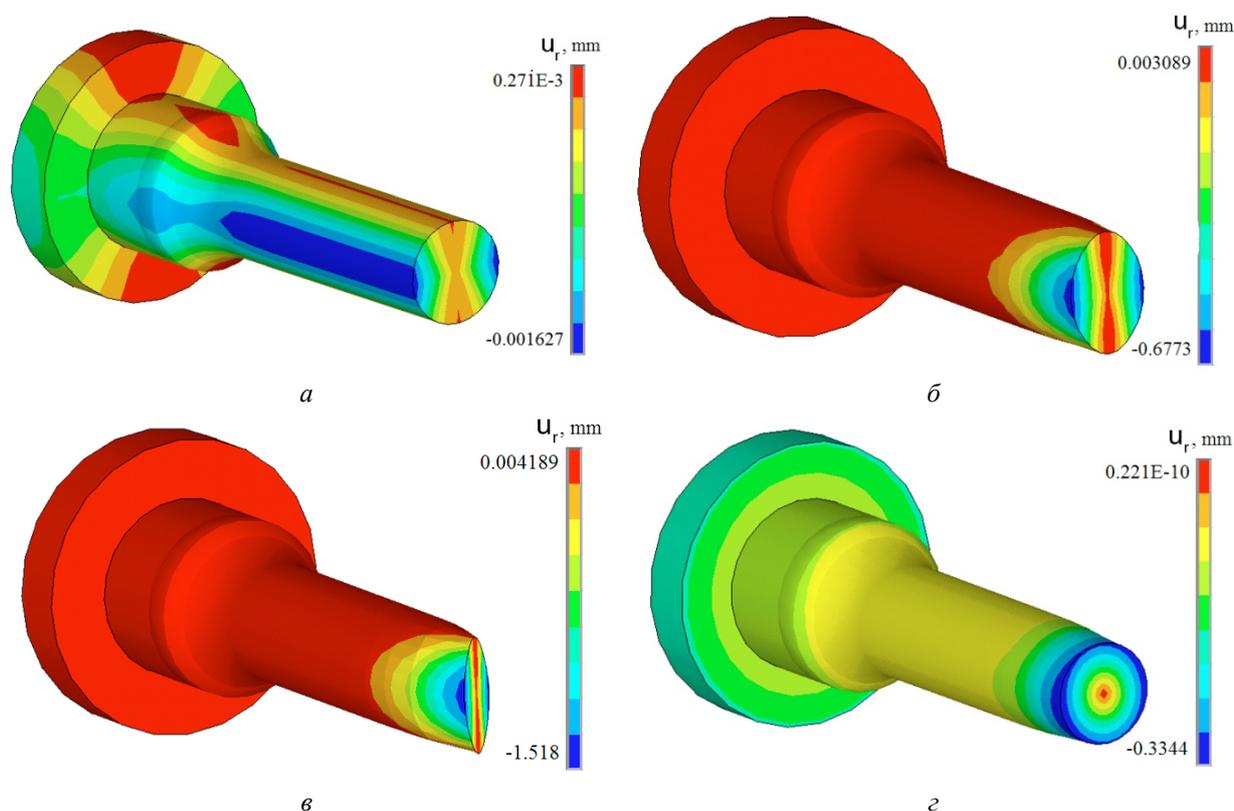


Рис. 7. Распределение полей радиальных перемещений u_r , мм, в образцах ориентации [011] из сплава ВЖМ4 при $1050\text{ }^\circ\text{C}$ для различных моделей деформирования и уровней осевых деформаций: *a* – упругая модель, $\varepsilon = 0,14\%$; *b* – микромеханическая модель пластичности, $\varepsilon = 5,5\%$; *в* – микромеханическая модель пластичности, $\varepsilon = 10\%$; *г* – феноменологическая модель пластичности, $\varepsilon = 5,5\%$

Fig. 7. Radial displacement fields u_r , mm, in samples with orientation [011] from the alloy VZhM4 at $1050\text{ }^\circ\text{C}$ for various models of deformation and levels of axial strain: *a* – elastic model, $\varepsilon = 0.14\%$; *b* – micromechanical plastic model, $\varepsilon = 5.5\%$; *c* – micromechanical plastic model, $\varepsilon = 10\%$; *d* – phenomenological plastic model, $\varepsilon = 5.5\%$

Анализ результатов КЭ моделирования показал, что овальность монотонно возрастает с ростом осевых деформаций и достигает 51,5 % при деформации 5,8 %. Зависимости овальности от осевой деформации цилиндрического образца для монокристаллического сплава ВЖМ4 при 20 и 1050 °С, полученные с использованием микромеханической модели пластичности, представлены на рис. 8. Видно, что с ростом температуры овальность становится более ярко выраженной. Полученные зависимости могут быть использованы для определения осевой деформации на основе значений текущей или остаточной овальности при кратковременных испытаниях. Однако указанные зависимости являются трехпараметрическими – овальность зависит от деформации, ориентации и температуры.

При сравнении прогнозов двух моделей бóльшие значения овальности наблюдаются при использовании микромеханической модели пластичности (см. табл. 2). Овальность оказалась весьма чувствительной к выбору модели пластического деформирования материала, в то время как диаграммы деформирования для обеих моделей пластичности являются достаточно близкими (рис. 9).

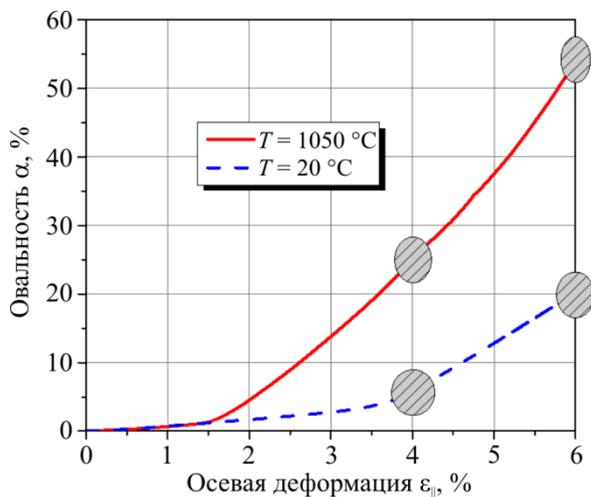


Рис. 8. Зависимость овальности от осевой деформации образца ориентации [011] для монокристаллического сплава ВЖМ4 при 20 и 1050 °С (микромеханическая модель пластичности)

Fig. 8. Dependence of the ovality on the axial deformation of a sample [011] for a single-crystal alloy VZhM4 at 20 and 1050 °С (micromechanical model of plasticity)

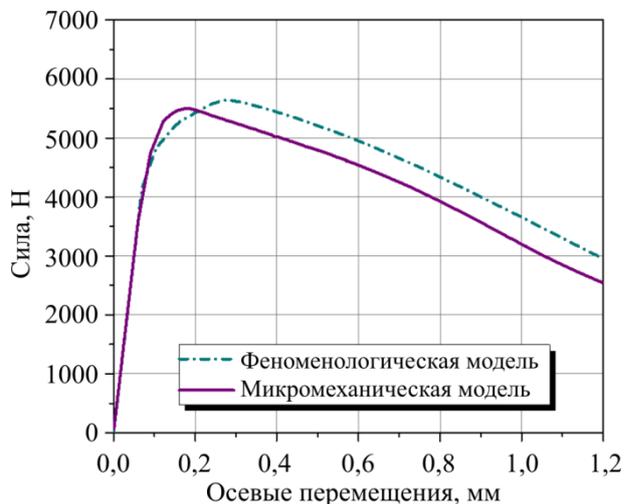


Рис. 9. Расчетные диаграммы деформирования цилиндрического образца из монокристаллического сплава ВЖМ4 ориентации [011] при 1050 °С

Fig. 9. Computed deformation diagrams of cylindrical sample from single crystal alloy VZHM4 with orientation [011] at 1050 °С

Возможным объяснением чувствительности овальности к выбору модели пластического деформирования материала являются локализованная неоднородность и многоосность полей напряжений и деформаций при шейкообразовании, вызывающие отличия в предсказаниях моделей материала с различными подходами описания кинематики деформирования. При сравнительном анализе овальности с использованием двух моделей для уровней деформаций меньших 1 % (полное отсутствие признаков шейкообразования) обе модели показывают близкие значения.

3.3. Вычисление овальности при ползучести

Монокристаллический сплав ВЖМ4 относится к жаропрочным сплавам, традиционно используемым при высоких температурах (выше 1000 °С), что указывает на актуальность исследования характера деформирования цилиндрических образцов при ползучести.

Аналитические оценки ориентационной зависимости коэффициента поперечной деформации при ползучести образца (растягивающая нагрузка прикладывалась вдоль оси Z, поперечная деформация измерялась в направлении оси X) были получены с использованием соотношения

$$\nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{xx}^c}{\varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^c} = -\frac{-\nu_{12}/E - (1/E + \nu_{12}/E - 1/2G_{12})(l_z^2 l_x^2 + m_z^2 m_x^2 + n_z^2 n_x^2) + \varepsilon_{xx}^c}{1/E - 2(1/E + \nu_{12}/E - 1/2G_{12})(l_z^2 m_z^2 + m_z^2 n_z^2 + n_z^2 l_z^2) + \varepsilon_{zz}^c}, \quad (21)$$

где ε_{xx} и ε_{zz} – поперечная и продольная деформации образца; ε_{xx}^e и ε_{zz}^e – их упругие составляющие, вычисляемые аналогично (16); ε_{xx}^c и ε_{zz}^c – деформации ползучести, вычисляемые на основе соотношений микромеханической модели (11), (12а) с последующим пересчетом из кристаллографической в лабораторную систему координат при помощи тензора поворота (15).

На рис. 10 представлены азимутально-ориентационные зависимости коэффициента поперечной деформации $\nu_{xz} = \nu_{xz}(\psi)$ для ВЖМ4 при выдержке под нагрузкой 250 МПа в течение 21,5 часов при 1050 °С для монокристаллов ориентаций [001], [011], [012] и [111].

При проведении вычислительных экспериментов, так же как и в предыдущем параграфе, рассматривались две модели ползучести: микромеханическая (физическая), определяемая уравнениями (11), (12а), (13), и феноменологическая, описываемая соотношениями (6), (7а), (8).

Сравнение результатов КЭ анализа с данными экспериментов [17] представлены в табл. 3, где приведены значения максимального и минимального диаметров, а также овальность в разгруженном состоянии (после проведения экспериментов). **Образец 1** подвергся выдержке под нагрузкой 250 МПа до разрушения в течение

21,5 часов при 1050 °С. Для него угол отклонения от ориентации $\langle 001 \rangle$ составлял 2,15°. Осевая деформация при разрушении достигла 16,7 %. **Образец 2** подвергся выдержке под нагрузкой 280 МПа в течение 11,5 часов при 1050 °С. Угол отклонения от ориентации $\langle 001 \rangle$ 4,58°. Осевая деформация при разрушении достигла 17,8 %.

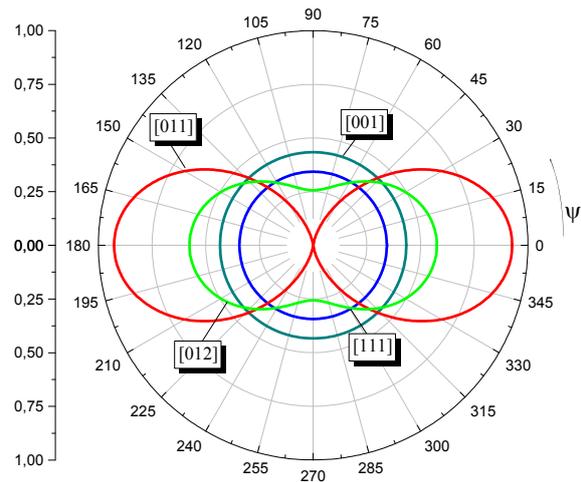


Рис. 10. Зависимость коэффициента поперечной деформации ν_{xz} от азимутальной ориентации для сплава ВЖМ4 при выдержке под нагрузкой 250 МПа в течение 21,5 часов при 1050 °С Fig. 10. Dependence of the transverse deformation coefficient ν_{xz} from azimuthal orientation for the alloy VZhM4 under creep at 250 MPa and 1050 °C after 21,5 hours

Таблица 3

Сравнение результатов расчета с данными опытов [17]

Table 3

Comparison of computation results with experimental data [17]

		D_{max} , мм	D_{min} , мм	α , %	
Образец 1	Эксперимент	4,614	4,556	1,27	
	КЭ решение	Микромеханическая модель ползучести	4,616	4,580	0,79
		Феноменологическая модель ползучести	4,611	4,607	0,09
Образец 2	Эксперимент	4,414	4,342	1,66	
	КЭ решение	Микромеханическая модель ползучести	4,491	4,442	1,09
		Феноменологическая модель ползучести	4,489	4,478	0,25

Измерения диаметров производились на поперечных сечениях разрушенных образцов (рис. 11), поэтому на экспериментальные данные могли оказать влияние стадии долома, накопление повреждений [41–43] на III стадии ползучести (стадия ускоренной ползучести), а также последствия шейкообразования. В силу указанных причин результаты КЭ моделирования демонстрируют меньшее сужение поперечного сечения образца и меньшую овальность, чем в эксперименте, поскольку в расчетах накопление повреждений на III стадии и долом не учитывались. При рассматриваемых уровнях нагрузки и временах выдержки интенсивного шейкообразования в КЭ расчетах не наблюдалось. Следует отметить более высокую точность предсказания микромеханической модели ползучести в сравнении с феноменологической моделью.

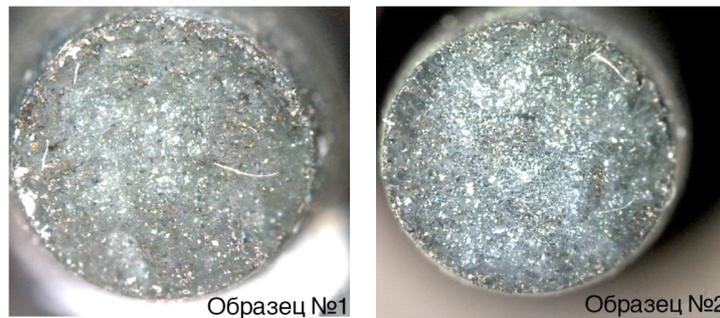


Рис. 11. Поперечные сечения разрушенных цилиндрических образцов при ползучести

Fig. 11. Cross-sections of fractured cylindrical specimens under creep

Также был проведен параметрический анализ влияния кристаллографической ориентации и уровня осевой деформации при ползучести на овальность. Результаты КЭ расчетов показали, что, как и при решении задачи в упругой и упругопластической постановке, наибольшая овальность при решении задачи ползучести наблюдается для кристаллографических ориентаций $\langle 011 \rangle$ (см. рис. 10). Полученные расчетным путем значения овальности α , а также наибольший и наименьший диаметры деформированного поперечного сечения для образцов с кристаллографической ориентацией $[011]$ при напряжении

320 МПа и температуре 1050 °С приведены в табл. 4 для различных уровней осевой деформации. Следует отметить, что изменение овальности происходит вследствие только деформации ползучести с течением времени – упругие деформации в рассматриваемых условиях (при постоянных напряжениях) остаются постоянными.

Таблица 4

Сравнение прогнозов микромеханической и феноменологической моделей ползучести для образцов ориентации [011] при напряжении 320 МПа и температуре 1050 °С

Table 4

Comparison of the microscopic and phenomenological creep models for samples with orientation [011] at stress of 320 MPa and temperature of 1050 °C

Осевые деф., ε , %	КЭ решение						Аналитическое решение		
	Микромеханическая модель ползучести			Феноменологическая модель ползучести			Микромеханическая модель ползучести		
	D_{\max} , ММ	D_{\min} , ММ	α , %	D_{\max} , ММ	D_{\min} , ММ	α , %	D_{\max} , ММ	D_{\min} , ММ	α , %
1,1	5,001	4,946	1,10	4,978	4,968	0,200	5,0004	4,946	1,09
3,7	5,001	4,819	3,79	4,919	4,901	0,356	5,0004	4,817	3,80
8,0	5,001	4,614	8,41	4,819	4,791	0,595	5,0004	4,601	8,66

Как видно из приведенных результатов, при использовании микромеханической модели наблюдается наибольшая овальность. Максимальный диаметр поперечного сечения при использовании данной модели практически не изменяется. При использовании микромеханической модели ползучести при осевых деформациях 8 % овальность достигает 8,41 %, в то время как при использовании феноменологической модели овальность возрастает значительно медленнее – она достигает только 0,6 % при осевых деформациях 8 %. Результаты, полученные аналитически, показывают хорошее совпадение с соответствующим КЭ решением. Зависимость овальности от осевой деформации образца ориентации [011] при ползучести для монокристаллического сплава ВЖМ4, полученная с использованием микромеханической модели, имеет близкий к линейному характер (рис. 12).

Следует отметить, что овальность при ползучести оказалась весьма чувствительной к выбору модели деформирования материала, в то время как кривые ползучести для цилиндрических образцов ориентации [011], полученные в КЭ расчетах, для обеих моделей ползучести являются достаточно близкими (рис. 13), но не идентичными в силу особенностей формулировок рассматриваемых моделей.

На рис. 14 приведены поля радиальных перемещений для различных моделей деформирования и различных уровней осевых деформаций для образцов кристаллографической ориентации [011], подвергнутых выдержке под нагрузкой 320 МПа при температуре 1050 °С.

Результаты КЭ расчетов показали, что интенсивного шейкообразования в рассматриваемых условиях нагружения при ползучести не наблюдается.

Следует отметить, что наблюдаются отличия в характере распределения радиальных перемещений для микромеханической и феноменологической моделей ползучести. Прогнозируемое микромеханической моделью ползучести скольжение вдоль плоскостей наиболее плотной упаковки с наибольшими факторами Шмида приводит к возникновению изгибных мод деформирования образца и прогрессирующей с течением времени деформационной анизотропии, приводящей к росту овальности. Феноменологическая модель (7а) дает

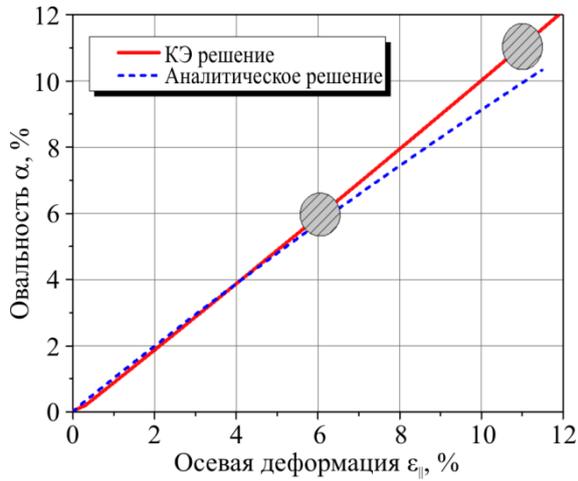


Рис. 12. Зависимость овальности от осевой деформации образца сплава ВЖМ4 ориентации [011] при ползучести при 320 МПа и 1050 °С (микромеханическая модель ползучести)
 Fig. 12. Dependence of the ovality on the axial deformation of a sample [011] for a single-crystal alloy VZhm4 at 320 МПа and 1050 °С (micromechanical model of creep)

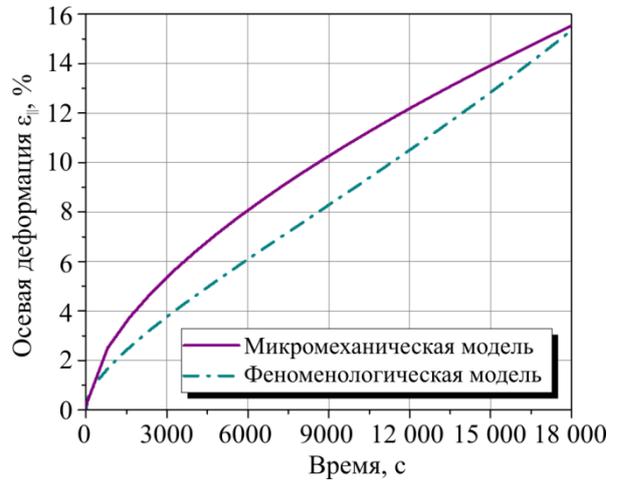


Рис. 13. Расчетные кривые ползучести для цилиндрического образца из монокристаллического сплава ВЖМ4 ориентации [011] при температуре 1050 °С и напряжении 320 МПа
 Fig. 13. Computed creep curves of cylindrical sample from single crystal alloy VZHM4 with orientation [011] at temperature 1050 °С and stress 320 МПа

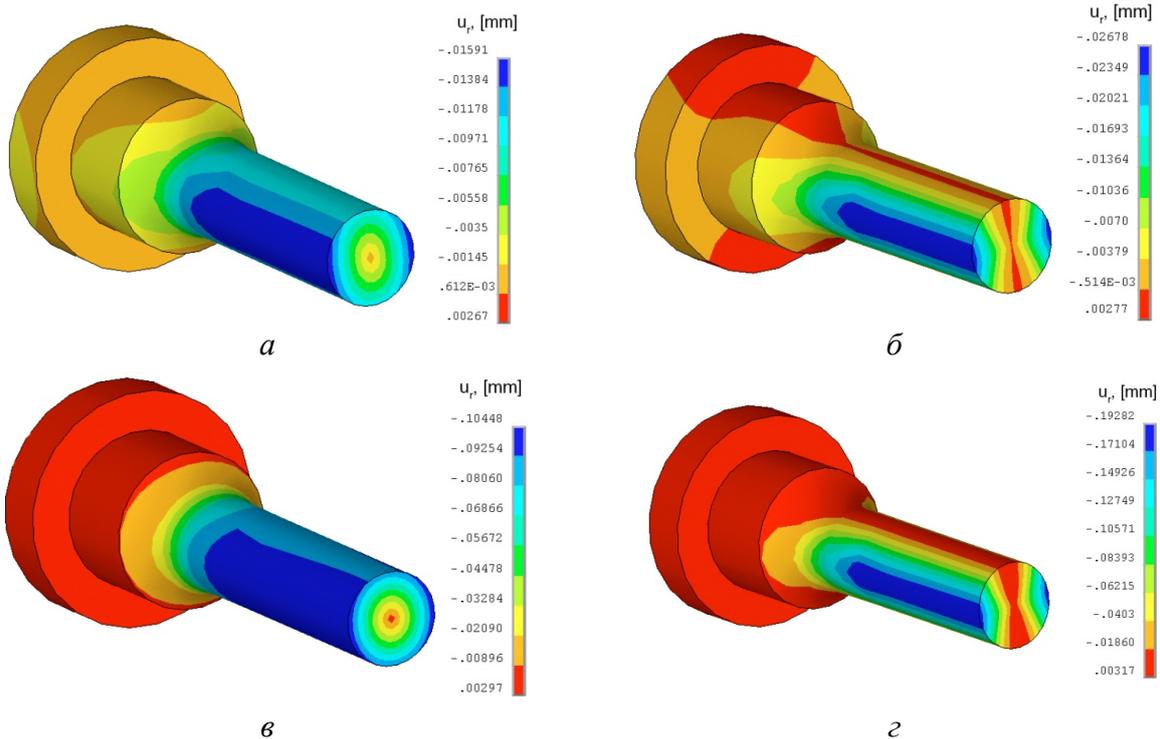


Рис. 14. Распределение полей радиальных перемещений u_r , мм, в образцах ориентации [011] из сплава ВЖМ4 при 1050 °С и 320 МПа для различных моделей материала и уровней осевых деформаций: а – феноменологическая модель ползучести, $\varepsilon = 1,1\%$; б – микромеханическая модель ползучести, $\varepsilon = 1,1\%$; в – феноменологическая модель ползучести, $\varepsilon = 8\%$; г – микромеханическая модель ползучести, $\varepsilon = 8\%$

Fig. 14. Radial displacement fields u_r , mm, in samples with orientation [011] from the alloy VZhm4 at 1050 °С and 320 МПа for various material models and levels of axial strains: а – phenomenological creep model, $\varepsilon = 1.1\%$; б – micromechanical creep model, $\varepsilon = 1.1\%$; в – phenomenological creep model, $\varepsilon = 8\%$; г – micromechanical creep model, $\varepsilon = 8\%$

заниженные значения овальности, что указывает на необходимость уточнения параметров, характеризующих ее анизотропные свойства (константы, определяющие тензор ${}^4\mathbf{M}$). В частности, при идентификации вместо (10) следует использовать аналогичное соотношение для характеристик деформационной способности при ползучести для двух различных ориентаций. В условиях отсутствия данных для двух различных кристаллографических ориентаций предлагается использовать характеристики кривой ползучести и значения овальности при одной ориентации (отличной от $\langle 001 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$) для идентификации параметров, характеризующих анизотропные свойства материала в ${}^4\mathbf{M}$.

Заключение

Получены результаты решения задачи об одноосном растяжении анизотропного цилиндрического тела начальной круговой формы поперечного сечения в упругой, упруго-пластической и вязкоупругой постановках. Результаты расчетов позволили установить, что кристаллографическая ориентация образца, уровень осевых деформаций и температура оказывают значительное влияние на овальность поперечного сечения образца при растяжении.

Наибольшая овальность наблюдается при кристаллографической ориентации $\langle 011 \rangle$. Овальность демонстрирует тенденцию прогрессирующего роста с увеличением осевых деформаций. Предложены аналитические оценки вычисления овальности при упругости. Использование в КЭ расчетах микромеханических (физических) моделей неупругого деформирования монокристалла приводит к большему значению овальности в сравнении с прогнозами феноменологических моделей, которые продемонстрировали более низкую точность в сравнении с экспериментами.

В связи с возникновением овальности поперечного сечения при проведении опытов на растяжение монокристаллического образца в условиях отсутствия данных о его азимутальной ориентации рекомендуется отказаться от определения осевой деформации на основе регистрации изменения размера поперечного сечения только в одном направлении.

Для цилиндрических образцов с отклонениями осевой ориентации от направлений $\langle 001 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$ овальность, как легко измеряемый параметр, может быть использована для уточняющей проверки кристаллографической ориентации образца (например, для определения азимутальной ориентации на основе положения минимального диаметра овального поперечного сечения при известной аксиальной ориентации). При идентификации параметров феноменологической модели, характеризующих анизотропные свойства материала, овальность может быть использована для компенсации недостающей информации, например, в условиях отсутствия данных по одной из необходимых кристаллографических ориентаций. Однако указанный теоретически допустимый подход требует всесторонней тщательной экспериментальной проверки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №15-19-00091).

Библиографический список

1. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Елютин Е.С. Монокристаллические жаропрочные сплавы для газотурбинных двигателей // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». – 2011. – № SP2. – С. 38–52.

2. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов / Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качанов, В.Н. Толораия, О.С. Гаврилин. – М.: Машиностроение, 1997. – 333 с.
3. Каблов Е.Н., Голубовский Е.Р. Жаропрочность никелевых сплавов. – М.: Машиностроение, 1998. – 464 с.
4. Reed R.C. Superalloys: fundamentals and applications. – Cambridge: Cambridge University Press. 2006. – 372 p.
5. Голубовский Е.Р., Светлов И.Л., Хвацкий К.К. Закономерности изменения аксиальной и азимутальной анизотропии прочностных характеристик монокристаллов жаропрочных никелевых сплавов для лопаток ГТД // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2005. – № 10. – С. 50–54.
6. Голубовский Е.Н., Светлов И.Л., Хвацкий К.К. Влияние аксиальной и азимутальной кристаллографической ориентации на прочностные характеристики жаропрочных никелевых сплавов для монокристаллических лопаток ГТД // *Конверсия в машиностроении*. – 2005. – № 4–5. – С. 113–115.
7. Сопrotивление термической усталости монокристаллического сплава / Л.Б. Гецов [и др.] // *Проблемы прочности*. – 2008. – № 5. – С. 54–71.
8. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // *Труды ЦКТИ*. – 2009. – Вып. 296. – С. 83–91.
9. Гецов Л.Б., Семенов А.С., Рыбников А.И. Сопrotивление термической усталости жаропрочных сплавов // *Теплоэнергетика*. – 2009. – № 5. – С. 51–58.
10. Семенов А.С., Гецов Л.Б. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // *Проблемы прочности*. – 2014. – № 1. – С. 50–62.
11. Сопrotивление деформированию и разрушению монокристаллических жаропрочных сплавов при статическом и циклическом нагружении / А.С. Семенов [и др.] // *Вестн. Самар. гос. аэрокос. ун-та им. С.П. Королёва*. – 2014. – № 5–3 (47). – С. 66–75.
12. Thermocyclic- and static-failure criteria for single-crystal superalloys of gas-turbine blades / L.B. Getsov, A.S. Semenov, E.A. Tikhomirova, A.I. Rybnikov // *Materials and Technology*. – 2014. – Vol. 48. – P. 255–260.
13. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Ч. 2. Монокристаллические материалы / Л.Б. Гецов [и др.] // *Газотурбинные технологии*. – 2011. – № 8. – С. 18–25.
14. Методика определения длительной прочности охлаждаемых лопаток из монокристаллических жаропрочных сплавов / Л.Б. Гецов [и др.] // *Теплоэнергетика*. – 2017. – № 4. – С. 1–9.
15. Primary creep in nickel-base superalloys / D.M. Shah, S. Vega, S. Woodard, A.D. Cetel // *Superalloys*. – 2004. – P. 197–206.
16. К вопросу о повышении ресурсных возможностей сопловых лопаток газотурбинных двигателей на основе использования нового монокристаллического сплава / С.Г. Семенов [и др.] // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2016. – № 4. – С. 30–38.
17. Особенности ползучести и длительной прочности жаропрочных монокристаллических сплавов на никелевой основе / С.Г. Семенов [и др.] // *Металловедение и термическая обработка металлов*. – 2015. – № 12 (726). – С. 29–37.
18. Arthington M.R., Siviour C.R., Petrinic N., Elliott B.C.F. Cross-section reconstruction during uniaxial loading // *Meas. Sci. Technol.* – 2009. – Vol. 20. – 075701.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. – 4-е изд. – М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 248 с.
20. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. – Teubner: Leipzig, Berlin, 1928. – 944 p.
21. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 417 с.
22. Ansys 15.0 Documentation. SAS IP, Inc. 2014.
23. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // *Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности констр. и методы их решения: тр. V Междунар. конф.* – СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. – С. 466–480.

24. Никелевые литейные жаропрочные сплавы нового поколения / Е.Н. Каблов [и др.] // Труды ВИАМ, – 2012, – С. 36–52.
25. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1948. – Vol. 193. – No. 1033. – P. 281–297.
26. Нелинейная механика материалов; пер. с франц. А.С. Кравчука / Ж. Бессон, Ж. Каето, Ж.Л. Шабош, С. Форест. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.
27. Desmorat R., Marull R. Non-quadratic Kelvin modes based plasticity criteria for anisotropic materials // International Journal of Plasticity. – 2011. – Vol. 27. – P. 328–351.
28. Smith G.F., Kiral E. Integrity bases for N symmetric second-order tensors, the crystal classes // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, – 1969, – Serie 18 (1). – P. 5–22.
29. Семенов А.С. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Науч.-техн. ведомости С.-Петерб. гос. политехн. ун-та. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 2 (194). – С. 15–29.
30. Nekliudova E.A., Semenov A.S., Melnikov B.E., Semenov S.G. Experimental research and finite element analysis of elastic and strength properties of fiberglass composite material // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – № 3 (47). – С. 25–39.
31. Мельников Б.Е., Семенов А.С., Семенов С.Г. Многомодельный анализ упругопластического деформирования материалов и конструкций. Современное состояние // Тр. ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. – 2010. – № 53. – С. 85–92.
32. Melnikov B.E., Semenov A.S. Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1996. – Vol. 76. – No. S. 2. – P. 615–616.
33. Asaro R.J. Crystal plasticity // J. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50. – No. 4b. – P. 921–934.
34. Asaro R.J. Micromechanics of crystals and polycrystals // Advances in Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 23. – P. 1–115.
35. Линь Т.Г. Физическая теория пластичности // Проблемы теории пластичности. Сер. Новое в зарубежной механике. Вып. 7. – М.: Мир, 1976. – С. 7–68.
36. Cailletaud G.A. Micromechanical approach to inelastic behaviour of metals // Int. J. Plast. – 1991. – Vol. 8. – P. 55–73
37. Трусов П.В., Волегов П.С. Определяющие соотношения с внутренними переменными и их применение для описания упрочнения в монокристаллах // Физическая мезомеханика. – 2009. – Т. 12, № 5. – С. 65–72.
38. Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности. – Пермь, 2013. – 244 с.
39. Kocks U.F., Brown T.J. Latent hardening in aluminium // Acta Metall. – 1966. – Vol. 14. – P. 87–98.
40. Семенов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. – СПб: Изд-во СПбГПУ. 2008. – 211 с.
41. Катанаха Н.А., Семенов А.С., Гецов Л.Б. Долговечность гибов высокотемпературных паропроводов в условиях длительной эксплуатации // Теплоэнергетика. – 2015. – № 4. – С. 32–42.
42. Grishchenko A.I., Semenov A.S. Effective methods of parameter identification for creep models with account of III stage // MATEC Web of Conferences. – 2016. – Vol. 53. – P. 01043.1–7.
43. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: Изд-во МГИУ, 2007. – 263 с.

References

1. Kablov E.N., Petrushin N.V., Eliutin E.S. Monokristallicheskie zharoprochnye splavy dlia gazoturbinykh dvigatelei [Single-crystal superalloys for gas turbine engines]. *Vestnik Moskovskogo gosud. tekhnicheskogo universiteta im. N.E.Baumana. Seriya «Mashinostroenie»*, 2011, no. SP2, pp. 38–52.
2. Shalin R.E., Svetlov I.L., Kachanov E.B., Toloraiia V.N., Gavrilin O.S. Monokristally nikelovykh zharoprochnykh splavov [Single crystals of nickel based superalloys]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1997, 333 p.

3. Kablov E.N., Golubovskii E.R. Zharoprochnost' nikelovykh splavov [Heat resistance of nickel alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1998, 464 p.
4. Reed R.C. Superalloys: fundamentals and applications. Cambridge, Cambridge University Press, 2006, 372 p.
5. Golubovskii E.R., Svetlov I.L., Khvatskii K.K. Zakonomernosti izmeneniia aksial'noi i azimutal'noi anizotropii prochnostnykh kharakteristik monokristallov zharoprochnykh nikelovykh splavov dlia lopatok GTD [Regularities in the variation of the axial and azimuthal anisotropy of the strength characteristics of single crystals of high-temperature nickel alloys for GTE blades]. *Aviatsionno-kosmicheskaiia tekhnika i tekhnologiia*, 2005, no. 10, pp. 50-54.
6. Golubovskii E.H., Svetlov I.L., Xvatskii K.K. Vliianie aksial'noi i azimutal'noi kristallograficheskoi orientatsii na prochnostnye kharakteristiki zharoprochnykh nikelovykh splavov dlia monokristallicheskikh lopatok GTD [Influence of axial and azimuthal crystallographic orientation on the strength characteristics of high-temperature nickel alloys for single-crystal GTE blades]. *Konversiiia v mashinostroenii*, 2005, no. 4-5, pp. 113-115.
7. Getsov L.B., Dobina N.I., Rybnikov A.I., Semenov A.S., Starosel'skii A., Tumanov N.V. Thermal fatigue resistance of a monocrystalline alloy. *Strength of Materials*, 2008, vol. 40, no. 5, pp. 538-551.
8. Getsov L.B., Semenov A.S. Kriterii razrusheniia polikristallicheskikh i monokristallicheskikh materialov pri termotsiklicheskom nagruzhении [Failure criteria of polycrystalline and single-crystal materials under thermocyclic loading]. *Trudy TsKTI*, 2009, no. 296, pp. 83-91.
9. Getsov L.B., Semenov A.S., Rybnikov A.I. Thermal fatigue strength of heat-resistant alloys *Thermal Engineering*, vol. 56, no. 5, pp. 412-420.
10. Semenov A.S., Getsov L.B. Thermal fatigue fracture criteria of single crystal heat-resistant alloys and methods for identification of their parameters. *Strength of Materials*, 2014, vol. 46, no. 1, pp. 38-48.
11. Semenov A.S., Getsov L.B., Semenov S.G., Grishchenko A.I. Soprotivlenie deformirovaniu i razrusheniiu monokristallicheskikh zharoprochnykh splavov pri staticheskom i tsiklicheskom nagruzhении [Deformation and fracture of single-crystal superalloys under static and cyclic loading]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. S.P. Koroleva*. 2014, vol. 47, no. 5-3, pp. 66-75.
12. Getsov L.B., Semenov A.S., Tikhomirova E.A., Rpybnikov A.I. Thermocyclic- and static-failure criteria for single-crystal superalloys of gas-turbine blades. *Materials and Technology*, 2014, vol. 48, pp. 255-260.
13. Getsov L.B., Mikhailov V.E. et al. Raschetnoe opredelenie resursa rabochikh i napravliaiushchikh lopatok GTU. Ch. 2. Monokristallicheskie materialy [Computation of the resource of rotor and guide blades of GTU. Part 2. Single-crystal materials]. *Gazoturbinnye tekhnologii*, 2011, no. 8. pp. 18-25.
14. Getsov L.B., Semenov A.S., Besschetnov V.A. et al. Long-term strength determination for cooled blades made of monocrystalline superalloys. *Thermal Engineering*, vol. 64, no. 4, pp. 280-287.
15. Shah D.M., Vega S., Woodard S., Cetel A.D. Primary creep in nickel-base superalloys. *Superalloys*, 2004. p. 197-206.
16. Semenov S.G., Getsov L.B., et al. Increasing the lifetime of gas-turbine engine nozzle blades using a new monocrystalline alloy. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2016, vol. 45, no. 4, pp. 316-323.
17. Semenov S.G., Getsov L.B., Tikhomirova E.A. et al. Special features of creep and long-term strength of single-crystal refractory nickel-base alloys. *Metal Science and Heat Treatment*, 2016, Vol. 57, no. 11-12, pp. 731-738.
18. Arthington M.R., Siviour C.R., Petrinic N., Elliott B.C.F. Cross-section reconstruction during uniaxial loading. *Meas. Sci. Technol.* 2009, vol. 20, 075701.
19. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaiia fizika. Tom VII – Teoriia uprugosti [Theoretical physics. Vol. VII – Theory of Elasticity]. 4-e izd. Moscow, Nauka, 1987. 248 p.
20. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin, Teubner, Leipzig, 1928, 944 p.
21. Lekhnitskii S.G. Teoriia uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow, Nauka, 1977, 417 p.
22. ANSYS. 15.0 Documentation. SAS IP, Inc. 2014.
23. Semenov A.S. PANTOCRATOR – konechno-elementnyi programmnyi kompleks, orientirovannyi na reshenie nelineinykh zadach mekhaniki [PANTOCRATOR – the finite element program specialized on the nonlinear problem solution]. *Saint Petersburg, Proceedings of the V Int. Conf. on Scientific and Eng. Problems of Predicting the Reliability and Service Life of Struct. and Methods of their Solution*, 2003, pp 466-480.
24. Kablov E.N., Petrushin N.V. et al. Nikelevye liteinye zharoprochnye splavy novogo pokoleniia. Iubileinyi nauchno-tekhnicheskii sbornik. Aviatsionnye materialy i tekhnologii [Nickel-based casting superalloys of new generation]. *Trudy VIAM*, 2012, pp. 36-52.
25. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. R. Soc. Lond.*, 1948, vol. 193, No. 1033, pp. 281-297.

26. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S. non-linear mechanics of materials. *Springer*, 2010, 397 p.
27. Desmorat R., Marull R. Non-quadratic Kelvin modes based plasticity criteria for anisotropic materials. *Int. Journal of Plasticity*, 2011. vol. 27. pp. 328-351.
28. Smith G.F., Kiral E. Integrity bases for N symmetric second-order tensors, the crystal classes. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1969, vol. 18, no. 1, pp. 5-22.
29. Semenov A.S. Identifikatsiia parametrov anizotropii fenomenologicheskogo kriteriia plastichnosti dlia monokristallov na osnove mikromekhanicheskoi modeli [Identification of anisotropy parameters of phenomenological plasticity criterion for single crystals on the basis of micromechanical model]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti S.-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Fiz.-mat. nauki*. 2014. vol. 194, no. 2, pp. 15-29.
30. Nekliudova E.A., Semenov A.S., Melnikov B.E., Semenov S.G. Experimental research and finite element analysis of elastic and strength properties of fiberglass composite material. *Magazine of Civil Engineering*, 2014, vol. 47, no. 3, pp. 25-39.
31. Melnikov B.E., Semenov A.S., Semenov S.G. Mnogomodel'nyi analiz uprugoplasticheskogo deformirovaniia materialov i konstruktssii. Sovremennoe sostoianie [Multimodel analysis of elastoplastic deformation of materials and structures. Current state]. *Trudy TsNII im. akad. A.N. Krylova*. 2010. vol. 53, pp. 85-92.
32. Melnikov B.E., Semenov A.S. Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1996, vol. 76, no. S2. pp. 615-616.
33. Asaro R.J. Crystal plasticity. *J. Appl. Mech.* 1983, vol. 50, no. 4b, pp. 921-934.
34. Asaro R.J. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Appl. Mech.* 1983. vol. 23. pp. 1–115.
35. Lin' T.G. Fizicheskaiia teoriia plastichnosti [Physical theory of plasticity]. *Problemy teorii plastichnosti. Ser. Novoe v zarubezhnoi mekhanike, Moscow, Mir*, 1976, vol. 7Б, pp. 7-68.
36. Cailletaud G. A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals. *Int. J. Plast.* 1991, vol. 8. pp. 55-73.
37. Trusov P.V., Volegov P.S. Opredeliaiushchie sootnosheniia s vnutrennimi peremennymi i ikh primeneniie dlia opisaniia uprochneniia v monokristallakh [Internal variable constitutive models and their application to description of hardening in single crystals]. *Fizicheskaiia mezomekhanika*. 2009, vol. 12, no. 5, pp. 65-72.
38. Trusov P.V., Volegov P.S., Kondrat'ev N.S. Fizicheskie teorii plastichnosti [Physical theories of plasticity]. *Perm'*, 2013, 244 p.
39. Kocks U.F., Brown T.J. Latent hardening in aluminium. *Acta Metall.* 1966, Vol. 14, pp. 87-98.
40. Semenov A.S. Computational methods in the theory of plasticity. *Saint Petersburg, Sankt-Peterburgskii politekhnicheskii universitet*, 2008, 211 p.
41. Katanakha N.A., Semenov A.S., Getsov L.B. Durability of bends in high-temperature steam lines under the conditions of long-term operation. *Thermal Engineering*, 2015, vol. 62, no. 4, pp. 260-270.
42. Grishchenko A.I., Semenov A.S. Effective methods of parameter identification for creep models with account of III stage. *MATEC Web of Conferences*, 2016, vol. 53, pp. 01043.1-7.
43. Lokoshchenko A.M. Modelirovanie protsessa polzuchesti i dlitel'noi prochnosti metallov [Modeling of creep and long-term strength of metals]. Moscow: MGIU, 2007. 263 p.