



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.1.01

УДК 539.3

РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

В.Н. Аптуков, А.Р. Хасанов

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 19 октября 2016 г.
Принята: 15 февраля 2017 г.
Опубликована: 30 марта 2017 г.

Ключевые слова:

расширение цилиндрической полости, упругопластическая среда, нелинейная сжимаемость, прикладная теория проникания, металлы, грунты.

АННОТАЦИЯ

Представлена новая постановка задачи о статическом расширении цилиндрической полости в упругопластической сжимаемой среде. Постановка задачи учитывает нелинейную сжимаемость, конечные деформации, закон текучести Мизеса–Шлейхера в зоне пластичности. Особенность настоящей постановки (нелинейная сжимаемость) позволяет рассматривать различные пористые материалы и изучать влияние пористости на параметры задачи.

Приведен вывод аналитических соотношений, определяющих сопротивление расширению полости и размер пластической зоны для двух классов материалов – металлов и пористых сред (грунтов). На основе выявленных аналитических соотношений получены качественные выводы о характере и уровне деформаций в среде. В частности, отмечено, что сыпучая среда характеризуется аномально большой зоной пластической деформации.

В рамках численного анализа рассмотрен ряд металлов, сплавов и мягких грунтов. Получены оценки области значений наиболее важных параметров. Для металлов это безразмерный объемный модуль упругости \bar{K} , на основе которого с помощью аппроксимирующих зависимостей вычисляется удельное сопротивление расширению и размеры полости и зоны уплотнения. Поскольку мягкие грунты являются материалами с выраженными нелинейными свойствами, то характер зависимости параметров обретает здесь более сложную форму – дополнительное влияние пористости материала на сопротивление расширению и размеры деформации. Результаты численных расчетов позволили провести сравнительный анализ влияния пористости на размер зоны уплотнения в окрестности полости для песчаных и глинистых грунтов.

Приведенные оценки сопротивления среды расширению цилиндрической полости полезны для формулировки и уточнения прикладных соотношений теории динамического проникания тонких (заостренных) ударников.

© ПНИПУ

© **Аптуков Валерий Нагимович** – доктор технических наук, профессор, e-mail: aptukov@psu.ru
Хасанов Артур Раисович – аспирант, ассистент, e-mail: artur_raisovich@rambler.ru

Valery N. Aptukov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: aptukov@psu.ru
Artur R. Khasanov – Postgraduate Student, Assistant, e-mail: artur_raisovich@rambler.ru

EXPANSION OF A CYLINDRICAL CAVITY IN A COMPRESSIBLE ELASTIC-PLASTIC MEDIUM

V.N. Aptukov, A.R. Khasanov

Perm State National Research University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 19 October 2016
Accepted: 15 February 2017
Published: 30 March 2017

Keywords:

cylindrical cavity expansion, elastic-plastic medium, nonlinear compressibility, applied theory of penetration, metals, soils.

ABSTRACT

This paper presents a new problem formulation related to the cylindrical cavity expansion in a compressible elastic-plastic medium. Nonlinear compressibility, finite strains and Mises-Schleicher criterion are taken into account in the problem formulation. The feature of the formulation (nonlinear compressibility) allows us to investigate different porous materials and analyze the effect of porosity on problem parameters.

We have presented the derivation of the analytical relations that determine the cavity expansion resistance and size of the plastic zone for two classes of materials, such as metals and porous media (soils). These analytical relations are used to obtain qualitative results about the nature and size of strains in the medium. For example, the flowing medium is characterized by an anomalously large zone of plastic strain.

We have considered a set of metals, alloys and soft soils within the numerical analysis. On the basis of the numerical analysis, we have obtained the estimated range of values of the most important parameters. For metals, this parameter is the dimensionless bulk modulus \bar{K} . By using the bulk modulus, we have approximated the expansion resistivity, the sizes of the cavity and compaction zone. Since soft soil is the material with nonlinear properties, the dependence of parameters has a more complicated form, namely, the additional effect of the material porosity on the expansion resistance and size of strains. By using the results of numerical calculations we have made a comparative analysis of the porosity effect on the size of the compaction zone in the neighborhood of the cavity for sandy and clay soils.

These estimations of the expansion medium resistance of the cylindrical cavity are useful to pose and refine the applied relations with regard to the theory of the dynamic penetration of slender (sharp) impactors.

© PNRPU

Введение

Ударное взаимодействие бойка с плитой – сложный процесс с множеством сопутствующих явлений, которые зависят от целого ряда факторов: скорость удара, механические свойства, геометрия бойка и плиты, угол встречи и др. Такое разнообразие различных факторов, влияющих на проникание, затрудняет использование теоретических методов и способствует широкому распространению методов экспериментальных. Однако для исследователя представляет несомненный интерес теоретический подход, поскольку именно аналитическая методика позволяет наиболее глубоко понять динамику процесса и оценить влияние различных условий проникания. Развитию одной из эффективных методик оценки сопротивления прониканию путем анализа задачи о расширении цилиндрической полости посвящена настоящая статья.

История развития теории расширения полости восходит к 1940-м годам. В работе [1] получены первые аналитические результаты задач о расширении цилиндрической и сферической полостей в квазистатической постановке, соотношения для определения силы сопротивления прониканию конических ударников в металлические преграды. В эти же годы с использованием некоторых теоретических представлений и экспериментальных исследований в ЛФТИ (ныне ФТИ РАН им. Иоффе) в работах Ф.Ф. Витмана и др. [2] была установлена базовая зависимость сопротивления прониканию при средних скоростях удара.

В 50-е годы интенсивные исследования в данной области проводились рядом отечественных специалистов, в частности, из МГУ, результат их работы нашел отражение

в монографии [3], где представлены также исследования, связанные с динамическим поведением грунтов при проникании. Впервые были приведены решения задач о динамическом расширении полости в грунте.

Дальнейшее развитие подход расширения полости получил в работах А.Я. Сагомояна, итог его работ в данной области представлен в двух монографиях [4, 5]. Исследования связаны с последующим совершенствованием модели расширения полости и ее применением для более широких классов задач. Модели расширения полости использовались в задачах о пробивании металлических пластин, получен ряд аналитических результатов. Также А.Я. Сагомояном была рассмотрена задача о процессе проникания ударника с затупленной головной частью в упругопластическую преграду, сопровождающегося образованием пробки. Учет образования пробки приводит к более сложной постановке задачи, в которой необходимо отслеживать два процесса – расширение полости и движение пробки.

За рубежом аналогичный подход использовался в ряде работ американских специалистов, наибольший вклад был внесен М. Форрестолом с соавторами [6–15]. Ими было получено большое количество моделей на основе подхода расширения полости, которые описывали широкий класс задач проникания. Полученные модели применялись для изучения процесса проникания в пористые породы [6], бетон [7, 8], грунт [9], алюминиевые пластины [10–13], керамические материалы [14]. В работе [15] исследовано качество приближений полученных результатов, и сделан вывод, что модель цилиндрического расширения полости дает неплохое приближение только на начальном этапе внедрения, а модель сферического расширения полости – на всем временном интервале. Отметим, что были разработаны аналитические модели для сжимаемых упругопластических сред [15], продемонстрировано влияние сжимаемости на результат для материалов деформационного упрочнения [16]. Последний результат говорит о важности учета сжимаемости среды в задачах проникания, тогда как большинство аналитических результатов в области теории проникания получены с привлечением гипотезы несжимаемости.

В конце 90-х годов были опубликованы монографии С. Сатапати [17] и Х. Юу [18]. В этих работах проанализированы существующие модели расширения полости, суммированы результаты, полученные в теории расширения полости и ее геотехнических приложениях. Монография [18] состоит из двух частей: первая часть содержит фундаментальные решения в области расширения полости в геоматериалах, вторая – приложения методов расширения полости в механике грунтов. В [18] приведены аналитические решения задачи о расширении полости при допущениях упругости и пластичности материала, эти допущения позволили исследовать проникание в такие материалы, как грунт и горные породы. В работе [17] представлены задачи расширения полости в пластичных и хрупких материалах (металлах и керамике). В [17] рассматриваются цилиндрическое и сферическое расширение полостей, приведены аналитические решения в квазистатической и динамической постановке. Следует отметить, что в монографии Сатапати проведен сравнительный анализ существующих результатов для цилиндрического и сферического расширения полости, и в зависимости от условий задачи представлены выводы о выборе симметрии, которая приводит к лучшему приближению.

В настоящее время подход расширения полости активно используется рядом исследователей, среди которых необходимо отметить отечественных [19–22] и зарубежных специалистов [24–30]. В [19] получено обобщенное решение одномерной задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упругопластической среде с учетом возникаю-

щей ударной волны. В работе отмечено, что использование гипотезы несжимаемости среды для оценки нормальных напряжений приводит к заметным ошибкам, особенно при дозвуковых скоростях внедрения. В работах [20, 21] получено новое аналитическое решение задачи о расширении сферической полости в мягкой грунтовой среде с учетом нелинейной сжимаемости и внутреннего трения. В [22] проведено сравнение двух подходов к определению параметров моделей локального взаимодействия, один из подходов базируется на аналитическом решении задачи о расширении сферической полости с учетом динамической сжимаемости и сопротивления сдвигу грунтовой среды. В работе продемонстрировано удовлетворительное соответствие результатов для определения максимума силы сопротивления и нарушение условий применимости модели на квазистационарной стадии внедрения. Отметим, что работы нижегородских исследователей [19–22] основываются на модели грунтовой среды Григоряна [23]. Модель Григоряна выгодно отличается от других моделей наименьшее число экспериментальных констант, необходимых для учета механических свойств, кроме того, эта модель учитывает сжимаемость среды и упругопластический сдвиг. Однако в силу ограниченности экспериментальных данных остается актуальным вопрос о выборе адекватной модели описания поведения среды при проникании, разработке новых моделей.

В последние годы интенсивные исследования в области динамики проникания проводят израильские ученые Г. Бен-Дор, А. Дубинский и др. [24–30]. В работе [24] с использованием подхода динамического цилиндрического расширения полости получены аналитические формулы для баллистического предела и глубины проникания. В [25] модель цилиндрического расширения полости используется для исследования баллистического сопротивления многослойных преград с воздушными прослойками. Также заслуживают внимания обширные аналитические обзоры авторов [26–28]. Они включают огромное количество моделей проникания, причем большое внимание уделено также классу моделей, полученному с помощью подхода расширения полости. В работах [26–28] можно найти модели проникания ударников в различные среды – металлы, грунт, бетон, композиты. Кроме того, авторы выпустили две монографии [29, 30], в которых акцент сделан на аналитических моделях проникания. В названных монографиях рассматриваются модели расширения полости, которым посвящены отдельные главы, включающие обзорную часть и систематическое изложение основных теоретических результатов. В работе [29] был расширен подход Сагомояна о проникании тела с тупой головной частью, сопровождаемом образованием пробки. Основываясь на указанном подходе, авторы [29] получили решения в конечном виде для баллистического предела произвольного тела вращения без дополнительных упрощений. Также в монографиях [29, 30] продемонстрирована связь между моделями расширения полости и моделью локального взаимодействия.

Настоящая статья посвящена развитию работ [31–33], в которых на основе задачи о расширении сферической полости в полупространстве были выявлены соотношения для определения сопротивления среды расширению полости. Также в приведенных работах изучалось влияние свободной поверхности и температурных эффектов, были поставлены и решены задачи о двухслойном материале и задачи динамического расширения сферической полости. В рамках настоящей статьи рассматривается статическая задача, определяется сопротивление расширению и размер пластической зоны различных упругопластических материалов с учетом конечных деформаций, нелинейной сжимаемости, зависимости предела текучести от давления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим пространственно-одномерную задачу (с осевой симметрией) о расширении цилиндрической полости в полупространстве под действием нормальной распределенной нагрузки σ_0 на границе. Пусть r, x – лагранжевая и эйлерова координаты; R_0, R – начальный и конечный радиусы полости.

Текущее положение частицы среды определяется эйлеровой координатой $x = x(r, t)$, для которой справедливо кинематическое уравнение

$$\partial x / \partial t = (\partial x / \partial t)_r = v(r, t). \quad (1)$$

Закон сохранения массы выделенного материального объема $\rho dV = \rho_0 dV_0$ в форме [34]

$$\rho_0 / \rho = (x / r) \partial x / \partial r, \quad (2)$$

где ρ_0, ρ – начальная и текущая плотность; dV_0, dV – начальный и текущий элементарный объем частицы.

Связь между главными компонентами лагранжевого (отмечены символом «*») и эйлерового тензоров напряжений [34]

$$\sigma_r^* = \sigma_r(x / r), \quad \sigma_\theta^* = \sigma_\theta \partial x / \partial r. \quad (3)$$

Закон сохранения импульса (уравнение движения) для переменных Лагранжа и переменных Эйлера

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\theta^*}{r}, \quad \rho \frac{dv}{dt} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{x}. \quad (4)$$

Если во втором уравнении (4) перейти от координаты x к координате r с учетом (2), то получим уравнение движения в смешанной форме [4, 34]

$$\rho_0 r \frac{dv}{dt} = x \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{\partial x}{\partial r}. \quad (5)$$

Кроме того,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad x(r, t) = r + u(r, t), \quad (6)$$

где $u(r, t)$ – перемещение частицы с координатой r .

Для замыкания системы уравнений, состоящей из кинематических соотношений, закона сохранения массы и уравнения движения, необходимо конкретизировать механические свойства материала.

Отметим, что при решении задач, связанных с упругопластическим течением, необходимо следить за границей между упругой и пластической областями, что удобнее всего осуществлять с помощью лагранжевых координат [34].

Расширение цилиндрического отверстия в материале осуществляется от начального R_0 до конечного радиуса R , в области $R \leq x \leq x_* = x(r_*)$ расположена пластическая зона деформации, за границей $x > x(r_*)$ – упругая зона.

Физические уравнения сжимаемой упругопластической среды сформулируем в следующей форме.

В упругой области девиаторные компоненты тензора напряжений в главных осях определяются из соотношений закона Гука в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = 2G \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (7)$$

где G – модуль сдвига.

Условие пластичности в форме Кулона [3]

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi, \quad (8)$$

где τ , σ – касательное и нормальное напряжение на площадке; c – сцепление; φ – угол внутреннего трения.

В компонентах тензора напряжений σ_r и σ_θ для пространственно-одномерного случая с осевой симметрией условие (8) принимает вид [3]

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \pm \tau_0 + \mu(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (9)$$

где $\tau_0 = 2c \cos \varphi$; $\mu = \sin \varphi$; знак перед τ_0 – «минус», если $\sigma_r < \sigma_\theta$, в противном случае «плюс».

Уравнение состояния для металлов

$$p = 3K\varepsilon, \quad (10)$$

где K – объемный модуль (рис. 1, кривая a).

Уравнение состояния для пористых сред [31] принимаем с учетом существования некоторой степени уплотнения ρ_0 / ρ_p , начиная с которой сопротивление уплотнению существенно возрастает.

$$p = -3K\varepsilon_p \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_p}, \quad (11)$$

где ε_p – предельная деформация пористой среды, связанная с выборкой начальной пористости материала (рис. 1, кривая b).

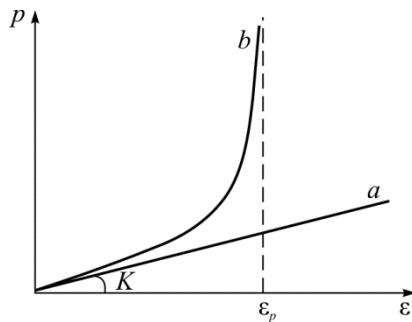


Рис. 1. Зависимость уравнения состояния для металла и пористого материала

Fig. 1. The dependence for the equation of state in the metal and porous material

Существует предельный объем V_p , связанный с предельной деформацией, зависимостью $(V_p - V_0) / V_0 = 3\varepsilon_p$. Переходя в этой формуле от объемов к плотностям, получим связь между предельной деформацией грунта ε_p и предельной плотностью ρ_p в виде соотношения $\rho_p = \rho_0 / (1 + 3\varepsilon_p)$.

Из второго соотношения (7) можно получить связь между текущей плотностью и средней деформацией:

$$\varepsilon = (1/3) \ln(\rho_0 / \rho) \approx (1/3)(\rho_0 / \rho - 1). \quad (12)$$

Подставим (12) в (10) или (11), получим

$$p = -3K\varepsilon_p \frac{\ln \rho_0 - \ln \rho}{\ln \rho_0 - \ln \rho - 3\varepsilon_p} \quad \text{или} \quad p = K(\rho_0 / \rho - 1). \quad (13)$$

2. Построение аналитического решения

В условиях цилиндрической симметрии условие пластичности (9) можно записать в виде $S_r - S_\theta = -\tau_0 + \mu(S_r + S_\theta + 2p)$. Предполагаем отсутствие деформации в направлении оси цилиндрической полости $\varepsilon_z = 0$, поэтому в упругой области справедлива связь $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$. Примем, что это соотношение сохраняется и в пластической области для $\nu = 1/2$ [35].

Условие пластичности преобразуется к виду $2S_r = -\tau_0 + 2\mu p$, поэтому можно выразить все компоненты тензора напряжений в пластической области через давление

$$\sigma_r = (1 + \mu)p - \frac{\tau_0}{2}, \quad \sigma_\theta = (1 - \mu)p + \frac{\tau_0}{2}. \quad (14)$$

Полагая, что τ_0 и μ – постоянные величины, преобразуем уравнение (5) к виду

$$x \frac{\partial p}{\partial r} + 2 \frac{\mu}{1 + \mu} p \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\tau_0}{1 + \mu} \frac{\partial x}{\partial r} = 0. \quad (15)$$

Обозначим $\mu^* = \frac{\mu}{1 + \mu}$, умножим уравнение (15) на $x^{2\mu^* - 1}$ и проинтегрируем по лагранжевой координате от R_0 до r с учетом граничных условий $p(R_0) = -p_0$ и $x(R_0) = R$. Получим выражение для распределения давления в пластической области при $R_0 \leq r \leq r_*$ (или $R \leq x \leq x_*$)

$$p = \frac{\tau_0}{2\mu} - \left(p_0 + \frac{\tau_0}{2\mu} \right) \left(\frac{R}{x} \right)^{2\mu^*}, \quad (16)$$

где $x_* = x(r_*)$ – внешняя граница пластической области.

Получим решение во внешней (упругой) области при $r > r_*$ (или $x > x_*$), полагая упругие деформации малыми. В этом случае уравнение неразрывности (2) удовлетворяется автоматически $\rho \approx \rho_0$, а уравнение равновесия принимает вид $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$. Общее решение упругой задачи, следуя [35],

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B, \quad u = -\frac{3}{2E} \frac{A}{r} + \frac{B}{2E} r, \quad (17)$$

где A, B – неизвестные постоянные. Поскольку при $r \rightarrow \infty$ отсутствуют напряжения и перемещения, примем $B = 0$.

На границе упругой и пластической областей требуем [35] непрерывности напряжений σ_r, σ_θ и радиального перемещения u , откуда получим окончательно

$$p(x) = \frac{\tau_0}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{x_*} \right)^{-2\mu^*} \right], \quad \sigma_0 = \frac{\tau_0}{2\mu} \left[1 - (1 + \mu) \left(\frac{R}{x_*} \right)^{-2\mu^*} \right], \quad x_* = r_* \left(1 + \frac{3\tau_0}{4E} \right), \quad (18)$$

где σ_0 – нормальное напряжение на границе полости (внешнее воздействие).

Чтобы получить аналогичные (18) выражения для металлов, осуществим предельный переход при $\mu \rightarrow 0$. Воспользовавшись правилом Лопиталья, получим

$$p(x) = \tau_0 \ln(x/x_*), \quad \sigma_0 = -\tau_0/2 + \tau_0 \ln(R/x_*), \quad x_* = r_*(1 + 0,75\tau_0/E). \quad (18')$$

Из зависимости (13), выразив ρ_0/ρ и подставив в уравнение неразрывности, получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{r}{x} \left[1 + \frac{3\varepsilon_p p(x)}{p(x) + 3K\varepsilon_p} \right]$. Интегрируя последнее уравнение по r на сегменте $[R_0, r_*]$ и по x на сегменте $[R, x_*]$, получим окончательное нелинейное уравнение для определения радиуса цилиндрической полости R в пористой среде с заданными характеристиками под действием внутреннего давления σ_0

$$\int_R^{x_*} \exp\left(-\frac{3\varepsilon_p \cdot p(x)}{p(x) + 3K\varepsilon_p}\right) x dx = \frac{1}{2}(r_*^2 - R_0^2). \quad (19)$$

Проводя аналогичные выкладки, получим нелинейное уравнение для определения радиуса цилиндрической полости в металле

$$\int_R^{x_*} \frac{Kx dx}{p(x) + K} = \frac{1}{2}(r_*^2 - R_0^2). \quad (19')$$

3. Анализ решения

Введем безразмерные переменные $\xi = x/x_*$, $\bar{R}_0 = R_0/x_*$, $\bar{R} = R/x_*$, $\bar{r}_* = r_*/x_*$, $\bar{p} = p/\tau_0$, $\bar{K} = K/\tau_0$, $\bar{E} = E/\tau_0$ и параметр, обратный степени расширения $\lambda = R_0/R$. Все линейные размеры отнесены к эйлеровой координате границы пластической зоны x_* .

Соотношение (19) в безразмерном виде

$$\int_{\bar{R}}^1 \exp\left(-\frac{3\varepsilon_p \cdot \bar{p}(\xi)}{\bar{p}(\xi) + 3\bar{K}\varepsilon_p}\right) \xi d\xi = \frac{1}{2}\left((\bar{r}_*)^2 - \lambda^2(\bar{R})^2\right). \quad (20)$$

Приведем некоторые качественные результаты, вытекающие из (20). С увеличением давления на границе σ_0 увеличивается степень расширения $\lambda^{-1} = R/R_0$, растет и относительная толщина уплотненной зоны x_*/R , однако этот рост ограничен. Даже если $\lambda \rightarrow 0$ (очень сильное расширение, или конечное расширение из нулевого радиуса) все равно величина x_*/R остается конечной.

При малых значениях сцепления (идеально-сыпучая среда) τ_0 уравнение (20) преобразуется к виду $1 - (\bar{R})^2 = \left((\bar{r}_*)^2 - \lambda^2(\bar{R})^2\right)$, откуда $\bar{R} = \sqrt{\frac{1 - (\bar{r}_*)^2}{1 - \lambda^2}}$, что приводит к аномально большой зоне пластической деформации.

Решая численно уравнение (20) относительно параметра $\bar{R} = R/x_*$, можно найти неизвестный радиус расширения полости R при заданных относительных характеристиках грунта и нагрузке на поверхности полости σ_0 .

Рассмотрим уравнение (19'), отражающее поведение металлических материалов. По уровню механических свойств металлы подразделяются на сплавы малой прочности (МП), средней прочности (СП), высокопрочные (В), суперпрочные СРП. По результатам анализа механических свойств большого числа сплавов [36–43] построена таблица классификации сплавов по прочностным характеристикам (табл. 1).

Таблица 1

Сопоставление уровня прочности сталей, титановых и алюминиевых сплавов [36–43]
(ГОСТ 2856-79, ГОСТ 535–2005)

Table 1

Strength comparisons for steels, titanium and aluminum alloys [36–43],
(GOST 2856-79, GOST 535–2005)

Класс сплавов		σ_B , МПа	ρ , г/см ³	σ_B/ρ , МПа · см ³ /г	σ_T , МПа	σ_T/ρ , МПа · см ³ /г
Титановые сплавы	МП	400–700	4,5–4,55	88–155	250–600	56–132
	СП	700–1000	4,4–4,5	157–225	600–900	136–200
	В	> 1000	4,65–4,75	> 213	900–1045	194–220
Алюминиевые сплавы	МП	130–300	2,7	48–114	40–230	15–85
	СП	350–500	2,85	123–175	270–370	95–130
	В	> 500	2,85	> 175	470–560	165–196
	СРП	–	–	–	640–670	225–235
Стали	Углеродистые	300–700	7,8	39–90	165–590	21–76
	МП	400–850	7,8	90–109	380–1000	49–128
	СП	850–1500	7,8	109–192	1000–2000	128–256
	В	> 1500	7,8	> 192		

В качестве примера на рис. 2 показаны расчетные зависимости относительного радиуса цилиндрической полости от степени расширения λ и относительной величины давления на границе полости от относительного радиуса \bar{R} для следующих механических характеристик алюминиевого сплава: $\nu = 0,33$, $E = 70$ ГПа и предела текучести, который равен границам соответствующего диапазона из табл. 1.

Уравнение (19') в безразмерной форме может быть приведено к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$\int_{\bar{R}}^1 \frac{\bar{K}\xi}{\ln \xi + \bar{K}} d\xi = \frac{1}{2} \left((\bar{r}_*)^2 - \lambda^2 (\bar{R})^2 \right). \quad (21)$$

Далее анализ решений будет проведен на основании следующих соображений. Величины искомого безразмерного радиуса \bar{R} и относительной распределенной нагрузки на границе полости $\bar{\sigma}_0$ в общем случае зависят от параметра λ и параметров материала \bar{K} (для металлов), \bar{K} и ε_p (для грунтов). Влияние коэффициента Пуассона ν менее значительно.

Нас интересует приложение данных результатов к проблеме проникания остроконечных ударников в различные среды. В этом случае в рамках модели радиального расширения отверстия происходит расширение цилиндрической полости от нуля до некоторого конечного радиуса R , поэтому $\lambda = 0$.

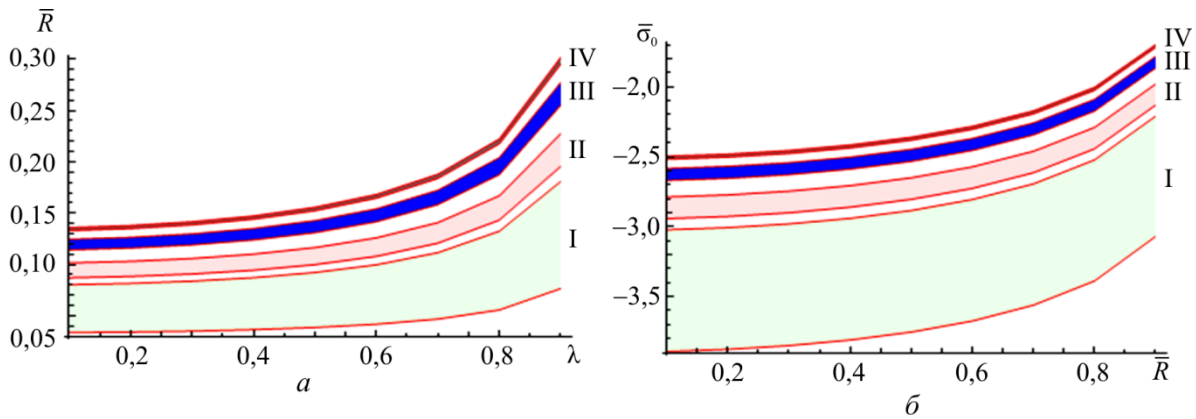


Рис. 2. Зависимости относительного радиуса полости \bar{R} от параметра λ (a) и относительной нагрузки $\bar{\sigma}_0$ на границе полости от \bar{R} (b) для алюминиевых сплавов: I – малопрочные; II – среднепрочные; III – высокопрочные; IV – суперпрочные
 Fig. 2. Dependences between the relative radius of cavity \bar{R} and parameter λ (a); and between the relative load $\bar{\sigma}_0$ at the cavity boundary and \bar{R} (b) for aluminum alloys: I – Low-strength; II – Medium-strength; III – High-strength; IV – Extra-strength

Примем в качестве аппроксимирующей зависимости для решения (21) следующую форму:

$$\bar{R} = \frac{C}{\sqrt{K}} \tag{22}$$

Были проделаны комплекс вычислительных экспериментов для всех групп сплавов, представленных в табл. 1. Показано, что менее прочные материалы имеют большую зону пластической деформации, а с увеличением прочности радиус пластической зоны уменьшается.

Получены следующие параметры аппроксимирующей зависимости (22): $C = 1,300$ (магниевого сплавы); $C = 1,435$ (алюминиевые сплавы); $C = 1,359$ (титановые сплавы); $C = 1,283$ (стали).

Относительная ошибка аппроксимации для всех зависимостей не превышает 1 %. На рис. 3 представлены зависимости $\bar{R}(\bar{K})$ для некоторых групп металлов и сплавов.

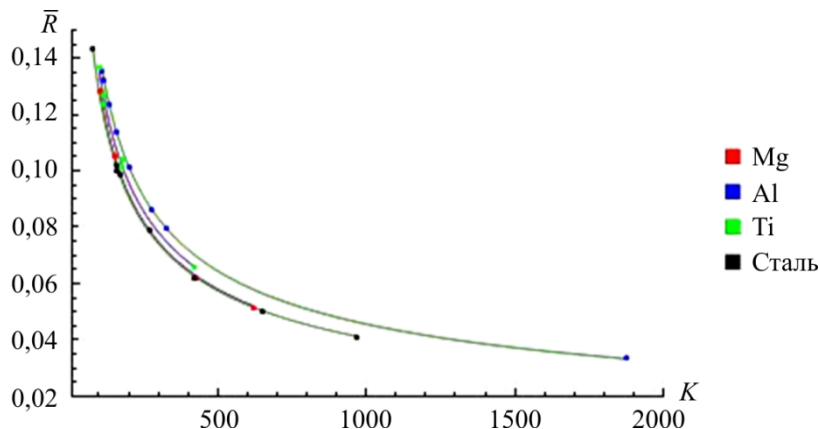


Рис. 3. Зависимости безразмерного радиуса \bar{R} от модуля \bar{K} для групп различных сплавов
 Fig. 3. Dependences between the dimensionless radius \bar{R} and modulus \bar{K} for groups of different alloys

Оценка относительной распределенной нагрузки на границе полости $\bar{\sigma}_0$ (при условии $\lambda = 0$) дает выражение

$$\bar{\sigma}_0 = -1/2 + \ln \bar{K} \quad (23)$$

или с учетом выражения (22)

$$\bar{\sigma}_0 = -0,170238 - 0,505739 \ln \bar{K}. \quad (24)$$

Выражение (24) дает ошибку аппроксимации, не превышающую 1,5 %, соответствующие зависимости представлены на рис. 4.

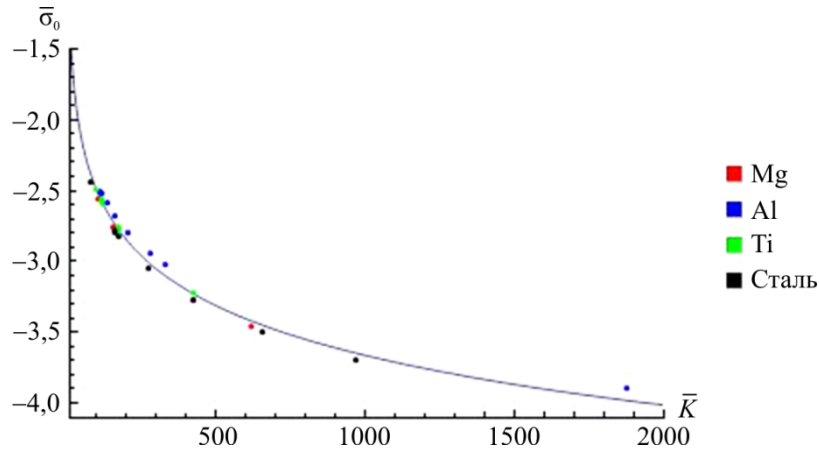


Рис. 4. Зависимость относительного удельного сопротивления для групп сплавов от безразмерного объемного модуля
 Fig. 4. Dependences between the relative resistivity (for groups of alloys) and dimensionless bulk modulus

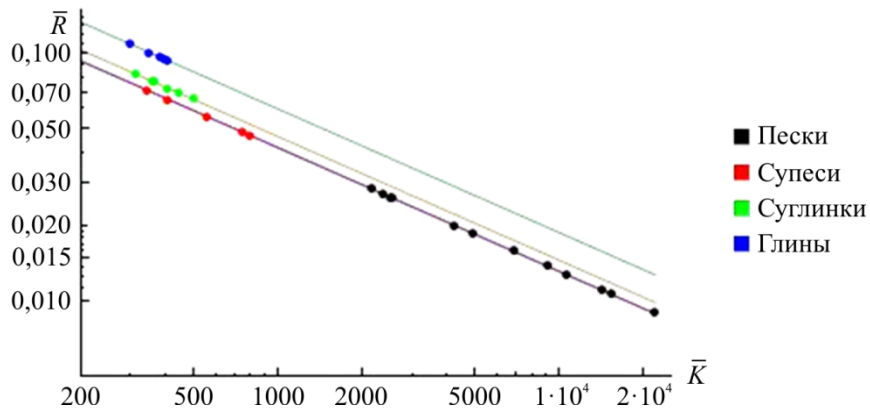


Рис. 5. Зависимости безразмерного радиуса \bar{R} от модуля \bar{K} для грунтов в логарифмическом масштабе
 Fig. 5. Dependences between the dimensionless radius \bar{R} and modulus \bar{K} for soils on a logarithmic scale

Анализ решения полного уравнения (20) для грунтов дает следующие результаты:
 – получены следующие параметры аппроксимирующей зависимости (22): $C = 1,319$ (пески); $C = 1,313$ (супеси); $C = 1,460$ (суглинки); $C = 1,888$ (глины);
 – ошибка аппроксимации не превышает 1 %;

– поскольку параметр \bar{K} варьируется в большом диапазоне, в частности $\bar{K} \sim 300 \dots 800$ для глинистых грунтов и $\bar{K} \sim 2 \cdot 10^3 \dots 2 \cdot 10^4$ для песков, то естественнее представить зависимость, иллюстрирующую поведение грунтов в логарифмическом масштабе (рис. 5).

Зависимость относительного удельного сопротивления $\bar{\sigma}_0$ для грунтов определяется в общем случае из выражения (18). Анализ показывает, что величина $\bar{\sigma}_0$ растет (по абсолютной величине) с увеличением как безразмерного модуля \bar{K} , так и угла внутреннего трения φ .

Если воспользоваться выражением (22) для аппроксимации безразмерного радиуса \bar{R} , то из (18) можно получить

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2\mu} \left[1 - (1 + \mu) C^{-2\mu} \bar{K}^{\mu} \right]. \quad (25)$$

На рис. 6 показаны зависимости $\bar{\sigma}_0(\varphi)$ при фиксированном \bar{K} , а на рис. 7 зависимости $\bar{\sigma}_0(\bar{K})$ при фиксированном φ для различных песков. Аналогичные зависимости для различных глинистых грунтов (супеси, суглинки, глины) показаны на рис. 8, 9.

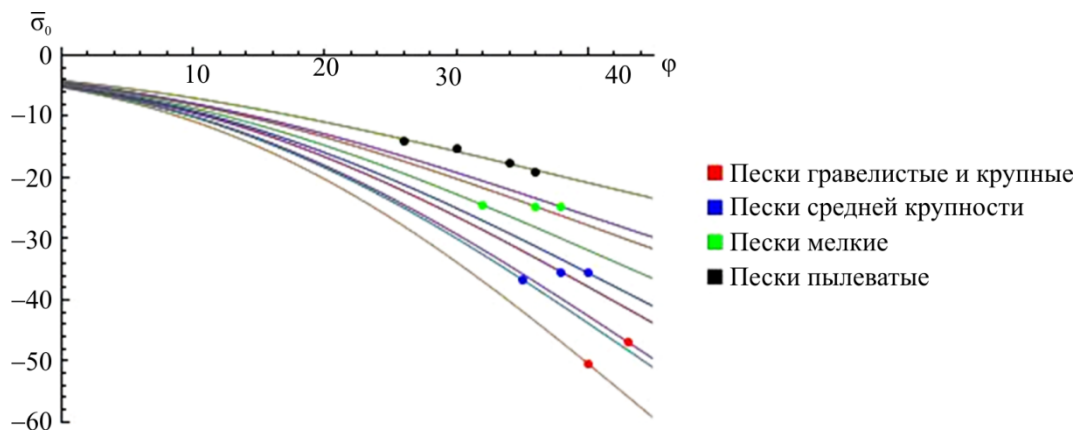


Рис. 6. Зависимость относительного удельного сопротивления для песков от угла внутреннего трения

Fig. 6. Dependence between the relative resistivity (for sands) and the friction angle

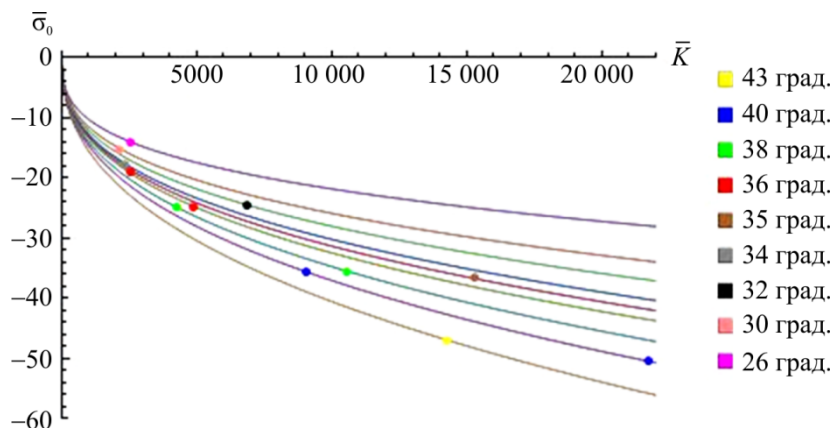


Рис. 7. Зависимость относительного удельного сопротивления для песков от безразмерного объемного модуля

Fig. 7. Dependence between the relative resistivity (for sands) and the dimensionless bulk modulus

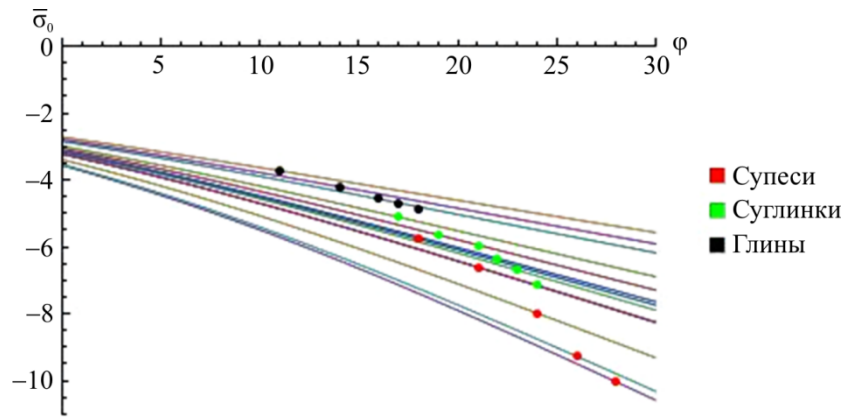


Рис. 8. Зависимость относительного удельного сопротивления для глинистых грунтов от угла внутреннего трения
 Fig. 8. Dependence between the relative resistivity (for clay soils) and the friction angle

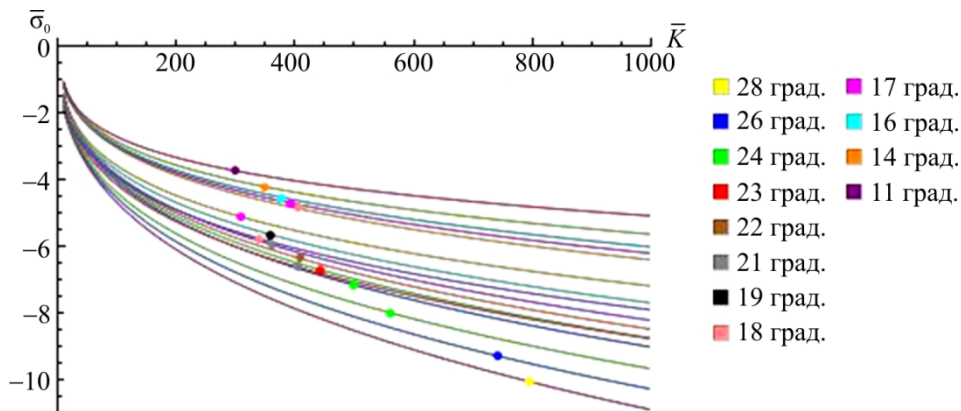


Рис. 9. Зависимость относительного удельного сопротивления для глинистых грунтов от безразмерного объемного модуля
 Fig. 9. Dependence between the relative resistivity (for clay soils) and the dimensionless bulk modulus

В табл. 2, 3 представлены механические характеристики песчаных и глинистых грунтов (СНиП П-15-74), на основе которых проведены численные расчеты, результаты которых отражены на рис. 5–9.

Средние значения коэффициента Пуассона: песок и супесь – $\nu = 0,3$; суглинок – $\nu = 0,35$; глина – $\nu = 0,42$.

Результаты расчетов показывают падение уровня сопротивления песков с ростом пористости в материале, причем по аналогии с металлами менее прочные грунты имеют большую зону пластической деформации. Однако для песков радиус зоны пластической деформации на два порядка больше радиуса полости R , что объясняется небольшой величиной сцепления в песчаных грунтах (аномально большая зона пластической деформации).

В глинистых грунтах наблюдается прямая зависимость между ростом нагрузки на границе и областью пластической деформации. Такое поведение можно объяснить различной величиной пористости материалов: в более пористом глинистом грунте расширение полости достигается за счет «схлопывания» пор в пластической области, что приводит к быстрому падению давления с увеличением радиуса и образованию небольшой зо-

ны пластической деформации. В случае более пористого материала для расширения полости требуется приложить меньшую нагрузку σ_0 .

Таблица 2

Нормативные значения удельного сцепления c (кгс/см²), угла внутреннего трения φ (град), и модуля деформации E (кгс/см²) песчаных грунтов

Table 2

Standard values of the specific cohesion c (kgf/cm²), friction angle φ (degrees) and stress-strain modulus E (kgf/cm²) for sandy soils

Вид грунтов	Обозначения характеристик	Характеристики грунтов при коэффициенте пористости e , равном			
		0,45	0,55	0,65	0,75
Пески гравелистые и крупные	c	0,02	0,01	–	–
	φ	43	40	38	–
	E	500	400	300	–
Пески средней крупности	c	0,03	0,02	0,01	–
	φ	40	38	35	–
	E	500	400	300	–
Пески мелкие	c	0,06	0,04	0,02	–
	φ	38	36	32	28
	E	480	380	280	180
Пески пылеватые	c	0,08	0,06	0,04	0,02
	φ	36	34	30	26
	E	390	280	180	110

Таблица 3

Нормативные значения удельного сцепления c (кгс/см²), угла внутреннего трения φ (град), и модуля деформации E (кгс/см²) пылевато-глинистых грунтов четвертичных отложений

Table 3

Standard values of the specific cohesion c (kgf/cm²), friction angle φ (degrees) and stress-strain modulus E (kgf/cm²) for silt-loam soils of quaternary deposits

Вид грунтов	Обозначения характеристик	Характеристики грунтов при коэффициенте пористости e , равном						
		0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95	1,05
Супесь	c	0,19	0,15	0,13	0,11	0,9	–	–
	φ	28	26	24	21	18	–	–
	E	320	240	160	100	70	–	–
Суглинок	c	0,39	0,34	0,28	0,23	0,18	0,15	–
	φ	24	23	22	21	19	17	–
	E	320	250	190	140	110	80	–
Глина	c	–	–	0,57	0,5	0,43	0,37	0,32
	φ	–	–	18	17	16	14	11
	E	–	–	210	180	150	120	90

Эти зависимости иллюстрируются на рис. 10, где показано ослабляющее влияние пористости на относительное удельное сопротивление.

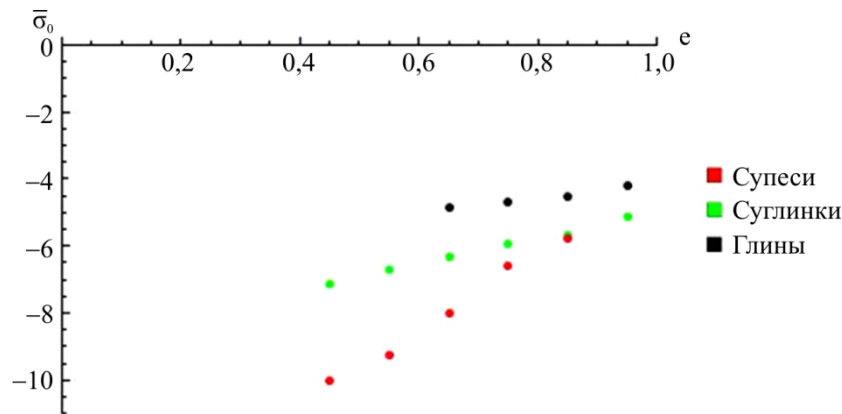


Рис. 10. Зависимость относительного удельного сопротивления для глинистых грунтов от коэффициента пористости
 Fig. 10. Dependence between the relative resistivity (for clay soils) and porosity coefficient

Данный эффект проявляется у глинистых грунтов, но не наблюдается у песчаных, поскольку глины обладают большим сцеплением в отличие от песков, что приводит к более значительному влиянию пористости грунта на его прочностные характеристики.

Выводы

Представлена новая постановка задачи о статическом расширении цилиндрической полости в упругопластической сжимаемой среде с учетом нелинейной сжимаемости, конечных деформаций и условия текучести Мизеса–Шлейхера.

Приведено разрешающее выражение в виде интегрального уравнения, определяющего сопротивление расширению полости и размер пластической зоны для различных материалов.

На основе численного анализа получены значения удельного сопротивления и относительного радиуса полости металлов, сплавов и мягких грунтов в зависимости от механических параметров материала: относительного объемного модуля \bar{K} и угла внутреннего трения φ . Получены аппроксимирующие зависимости.

Проведен сравнительный анализ величины радиуса зоны уплотнения в окрестности полости. Показано, что в глинистых грунтах рост пористости ведет к уменьшению зоны пластической деформации и удельного сопротивления расширению полости. В песчаных грунтах рост пористости для песков средней и мелкой крупности ведет к увеличению удельного сопротивления.

Приведенные оценки сопротивления различных материалов расширению цилиндрической полости могут быть полезны при уточнении прикладных соотношений теории динамического проникания.

Библиографический список

1. Bishop R.F., Hill R., Mott N.F. The theory of indentation and hardness tests // Proceedings of the Physics Society. – 1945. – Vol. 57. – No. 3. – P. 147–159.

2. Витман Ф.Ф., Златин Н.А., Иоффе Б.С. Сопротивление деформированию металлов при скоростях 10^{-6} – 10^2 м/с // Журнал технической физики. – 1949. – Т. XIX. – Вып. 3. – С. 123–128.
3. Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. – М.: Изд-во МГУ, 1964. – 237 с.
4. Сагомоян А.Я. Проникание. – М.: Изд-во МГУ, 1974.
5. Сагомоян А.Я. Динамика пробивания преград. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
6. Forrestal M.J. Penetration into dry porous rock // *Int. Journal of Solids and Structures*. – 1986. – Vol. 22(12). – P. 1485–1500.
7. Luk V.K., Forrestal M.J. Penetration into semi-infinite reinforced concrete targets with spherical and ogival nose projectiles // *Int. Journal Impact Engineering*. – 1987. – Vol. 6. – P. 291–301.
8. Forrestal M.J., Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets // *Int. Journal of Impact Engineering*. – 1997. – Vol. 34(31–32). – P. 4127–4146.
9. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets // *Int. Journal Impact Engineering*. – 1992. – Vol. 12. – P. 427–444.
10. Perforation of aluminum plates with conical-nosed rods / M.J. Forrestal, Z. Rosenberg, V.K. Luk, S.J. Bless // *Journal of Applied Mechanics*. – 1987. – Vol. 54(1). – P. 230–232.
11. Forrestal M.J., Okajima K., Luk V.K. Penetration of 6061-T651 aluminum target with rigid long rods // *Journal of Applied Mechanics*. – 1988. – Vol. 55(4). – P. 755–760.
12. Forrestal M.J., Luk V.K., Brar N.S. Perforation of aluminum armor plates with conical-nose projectiles // *Mechanics of Materials*. – 1990. – Vol. 10(1–2). – P. 97–105.
13. Penetration into ductile metal targets with rigid sphericalnose rods / M.J. Forrestal, D.Y. Tzou, E. Askari, D.B. Longcope // *Int. Journal Impact Eng.* – 1995. – Vol. 16. – No. 5/6. – P. 699–710.
14. Forrestal M.J., Longcope D.B. Target strength of ceramic materials for high-speed velocity penetration // *J. Appl. Phys.* – 1990. – Vol. 67. – P. 3669–3672.
15. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // *Journal of Applied Mechanics*. – 1988. – Vol. 55(2). – P. 275–279.
16. Luk V.K., Forrestal M.J., Amos D.E. Dynamic spherical cavity expansion of strain-hardening materials // *ASME J. Appl. Mech.* – 1991. – Vol. 58(1). – P. 1–6.
17. Satapathy S. Application of cavity expansion analysis to penetration problems // *The Univ. of Texas at Austin, Inst. Adv. Technol.*, 1997, Report No. IAT.R-0136.
18. Yu, H.S. *Cavity Expansion Methods in Geomechanics* // Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. – 2000.
19. Котов В.Л. Исследование применимости автомодельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта «ударник-грунт» // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 2008. – Вып. 70. – С. 123–131.
20. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде / В.Л. Котов [и др.] // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2011. – Вып. 73. – С. 58–63.
21. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны / Е.Ю. Линник [и др.] // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2012. – Вып. 74. – С. 49–57.
22. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. Определение параметров квадратичной модели локального взаимодействия при внедрении сферического ударника в мягкий грунт // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2013. – Вып. 75(1). – С. 47–55.
23. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // *Прикладная математика и механика*. – 1960. – Т. 244, № 6. – С. 1057–1072.
24. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical Solution for Penetration by Rigid Conical Impactors Using Cavity Expansion Models // *Mech. Res. Commun.* – 2000. – Vol. 27(2). – P. 185–189.
25. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analysis of Ballistic Properties of Layered Targets Using Cavity Expansion Model // *Int J. Fract.* – 1998e. – Vol. 90(4). – P. 63–67.

26. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical engineering models of high speed normal impact by hard projectiles on metal shields // *Cent. Eur. J. Eng.* – 2013. – Vol. 3(3). – P. 349–373.
27. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic Impact: Recent Advances in Analytical Modeling of Plate Penetration Dynamics – A Review // *Appl. Mech. Rev.* – 2005. – Vol. 58(6). – P. 355–371.
28. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields // *Cent. Eur. J. Eng.* – 2013. – Vol. 4(1). – P. 1–19.
29. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Applied High-Speed Plate Penetration Dynamics.* – Dordrecht. Springer, 2006.
30. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *High-Speed Penetration Dynamics // Engineering Models and Methods.* – 2013.
31. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 1. Влияние механических характеристик, свободной поверхности, слоистости // *Проблемы прочности.* – 1991. – № 12. – С. 1262–1268.
32. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 2. Влияние инерционных характеристик. Температурные эффекты // *Проблемы прочности.* – 1991. – № 12. – С. 1269–1274.
33. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. *Прикладная теория проникания.* – М: Наука, 1992.
34. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред. Ч. 1.* – М.: Наука, 1987. – 464 с.
35. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности.* – М.: Наука, 1969. – 420 с.
36. Ильин А.А., Колачев Б.А., Польшкин И.С. *Титановые сплавы. Состав, структура, свойства.* – М.: ВИЛС-МАТИ, 2009. – 520 с.
37. Колачев Б.А., Польшкин И.С., Талалаев В.Д. *Титановые сплавы разных стран.* – М.: ВИЛС, 2000. – 316 с.
38. Колачев Б.А., Елагин В.И., Ливанов В.А. *Металловедение и термическая обработка цветных металлов и сплавов.* – 3-е издание – М.: Изд-во МИСИС, 2005 – 432 с.
39. Марочник стали и сплавов [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.splav-kharkov.com/main.php>.
40. Марочник металлов [Электронный ресурс]. – URL: http://metallischekiy-portal.ru/marki_metallov.
41. Алюминиевые, титановые, магниевые и бериллиевые сплавы / Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов [Электронный ресурс]. – URL: http://viam.ru/viam_offers4.
42. On-line справочник свойств сталей [Электронный ресурс]. – URL: http://www.stresscalc.ru/stress_npp/prop_npp.php?mat=30&get=1.
43. Алюминий и его сплавы / сост. А.Р.Луц, А.А. Суслина. – Самара: Изд-во Самар. гос. техн. ун-та, 2013. – 81 с.

References

1. Bishop R.F., Hill R., Mott N.F. The theory of indentation and hardness tests. *Proceedings of the Physics Society*, 1945, vol. 57, no. 3, pp. 147-159.
2. Vitman F.F., Zlatin N.A., Ioffe B.S. Soprotivlenie deformirovaniyu metallov pri skorostyah udara 10^6 – 10^2 m/s [The resistance of metals to deformation at impact velocities of 10^6 – 10^2 m/s]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki – Journal of Technical Physics.*, 1949, T. XIX., V. 3., pp. 123-128.
3. Rakhmatulin K.A., Sagomonyan A.Ya., Alekseev N.A. Voprosy dinamiki gruntov [Soils Dynamics]. *Moscow, Moscow State University Press*, 1964, 237 p.
4. Sagomonyan A.Ya. Pronikanie [Penetration]. *Moscow, Moscow State University Press*, 1974.
5. Sagomonyan A.Ya. Dinamika probivaniia pregrad [Dynamics of Barriers Perforation]. *Moscow, Moscow State University Press*, 1988.

6. Forrestal M.J. Penetration into dry porous rock. *Int. Journal of Solids and Structures*, 1986, vol. 22(12), pp. 1485-1500.
7. Luk V.K., Forrestal M.J. Penetration into semi-infinite reinforced concrete targets with spherical and ogival nose projectiles. *Int. Journal Impact Engineering*, 1987, vol. 6, pp. 291-301.
8. Forrestal M.J., Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets. *Int. Journal of Impact Engineering*, 1997, vol. 34(31-32), pp. 4127-4146.
9. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *Int. Journal Impact Engineering*, 1992, vol. 12, pp. 427-444.
10. Forrestal M.J., Rosenberg Z., Luk V.K., Bless S.J. Perforation of aluminum plates with conical-nosed rods. *Journal of Applied Mechanics*, 1987, vol. 54(1), pp. 230-232.
11. Forrestal M.J., Okajima K., Luk V.K. Penetration of 6061-T651 aluminum target with rigid long rods. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, vol. 55(4), pp. 755-760.
12. Forrestal M.J., Luk V.K., Brar N.S. Perforation of aluminum armor plates with conical-nose projectiles. *Mechanics of Materials*, 1990, vol. 10(1-2), pp. 97-105.
13. Forrestal M.J., Tzou D.Y., Askari E., Longcope D.B. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods. *Int. Journal Impact Eng.*, 1995, vol. 16, no. 5/6, pp. 699-710.
14. Forrestal M.J., Longcope D.B. Target strength of ceramic materials for high-speed velocity penetration. *J. Appl. Phys.*, 1990, vol. 67, pp. 3669-3672.
15. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, vol. 55(2), pp. 275-279.
16. Luk V.K., Forrestal M.J., Amos D.E. Dynamic spherical cavity expansion of strain-hardening materials. *ASME J. Appl. Mech.*, 1991, vol. 58(1), pp. 1-6.
17. Satapathy S. Application of cavity expansion analysis to penetration problems. *The Univ. of Texas at Austin, Inst. Adv. Technol.*, 1997, Report No. IAT.R-0136.
18. Yu H.S. *Cavity Expansion Methods in Geomechanics*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
19. Kotov V.L. Issledovanie primenimosti avtomodel'nogo resheniia zadachi o rasshirenii sfericheskoi polosti v szhimaemoi srede dlia opredeleniia davleniia na poverkhnosti kontakta «udarnik-grunt» [Investigation of applicability of self-similarity analysis to problem of expansion of a spherical cavity in a compressible medium for determining pressure on striker-soil contact surface]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of strength and plasticity*, 2008, vol. 70, pp. 123-131.
20. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Makarova A.A., Tarasova A.A. Analiz priblizhennykh reshenii zadachi o rasshirenii sfericheskoi polosti v gruntovoi srede [The analysis of approximate solutions of a spherical cavity expansion in a soil medium problem] *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of strength and plasticity*, 2011, vol. 73, pp. 58-63.
21. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. Reshenie zadachi o rasshirenii sfericheskoi polosti v gruntovoi srede v predpolozhenii neszhimaemosti za frontom udarnoi volny [The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of strength and plasticity*, 2012, vol. 74, pp. 49-57.
22. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Tarasova A.A. Opredelenie parametrov kvadrachnoi modeli lokal'nogo vzaimodeistviia pri vnedrenii sfericheskogo udarnika v miagkii grunt [Determining the parameters of a quadratic model of local interaction for a spherical striker penetrating into soft soil]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of strength and plasticity*, 2013, vol. 75(1), pp. 47-55.
23. Grigoryan S.S. Ob osnovnykh predstavleniakh dinamiki gruntov [On the basic notions of soil dynamics]. *Prikladnaia matematika i mekhanika – Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, T. 244, no. 6, pp. 1057-1072.
24. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical solution for penetration by rigid conical impactors using cavity expansion models. *Mech. Res. Commun.*, 2000, vol. 27(2), pp. 185-189.
25. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analysis of ballistic properties of layered targets using cavity expansion model. *Int J. Fract.*, 1998e, vol. 90(4), pp. 63-67.
26. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical engineering models of high speed normal impact by hard projectiles on metal shields. *Cent. Eur. J. Eng.*, 2013, vol. 3(3), pp. 349-373.
27. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics – A review. *Appl. Mech. Rev.*, 2005, vol. 58(6), pp. 355-371.
28. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Cent. Eur. J. Eng.*, 2013, vol. 4(1), pp. 1-19.

29. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Applied High-Speed Plate Penetration Dynamics. Springer. Dordrecht, 2006.
30. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-Speed Penetration Dynamics. *Engineering Models and Methods*, 2013.
31. Aptukov V.N. Rasshirenie sfericheskoi polosti v uprugoplasticheskoi srede pri konechnykh deformatsiyakh. Soobshchenie 1. Vliianie mekhanicheskikh kharakteristik, svobodnoi poverkhnosti, sloinosti [Expansion of a spherical cavity in a compressible elasto-plastic medium. I. The influence of mechanical characteristics, free surface, and lamination]. *Problemy prochnosti – Strength of Materials*, 1991, no. 12, pp. 1262-1268.
32. Aptukov V.N. Rasshirenie sfericheskoi polosti v uprugoplasticheskoi srede pri konechnykh deformatsiyakh. Soobshchenie 2. Vliianie inertsiionnykh kharakteristik. Temperaturnye efekty [Expansion of a spherical cavity in a compressible elasto-plastic medium. II. Effect of inertial forces. Temperature effects]. *Problemy prochnosti – Strength of Materials*, 1991, no. 12, pp. 1269-1274.
33. Aptukov V.N., Murzakaev, R.T., Fonarev, A.V. Prikladnaia teoriia pronikaniia [Applied Theory of Penetration]. *Moscow, Nauka*, 1992.
34. Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred. Chast' 1 [Dynamics of Multiphase Media. Part 1]. *Moscow, Nauka*, 1992, 464 p.
35. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the theory of plasticity]. *Moscow, Nauka*, 1969, 420 p.
36. Il'in A.A., Kolachev B.A., Pol'kin I.S. Titanovye splavy. Sostav, struktura, svoistva [Titanium alloys. The composition, structure, properties]. *Moscow, VILS-MATI*, 2009, 520 p.
37. Kolachev B.A., Pol'kin I.S., Talalaev V.D. Titanovye splavy raznykh stran [Titanium alloys of different countries]. *Moscow, VILS*, 2000, 316 p.
38. Kolachev B.A., Elagin V.I., Livanov V.A. Metallovedenie i termicheskaya obrabotka tsvetnykh metallov i splavov [Metallurgy and heat treatment of non-ferrous metals and alloys]. *Moscow, MISIS*, 2005, 432 p.
39. Database of Steel and Alloy (Marochnik), available at: <http://www.splav-kharkov.com/main.php>
40. Steels and Alloys (Marochnik), available at: http://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov
41. Aluminium, titanium, magnesium and beryllium alloys. All-Russian Scientific-Research Institute of Aviation Materials, available at: http://viam.ru/viam_offers4
42. On-line handbook of properties of steel, available at: http://www.stresscalc.ru/stress_npp/prop_npp.php?mat=30&get=1
43. Luts A.R., Suslina A.A. Aliuminii i ego splavy [Aluminium and its alloys], *Samara, Samara State Technical University Press*, 2013, 81 p.