



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.04

УДК 531.114

## ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ ГАЗА В ЦИЛИНДРЕ НАСОСА НА ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШТАНГОВОЙ КОЛОННЫ

И.Н. Вассерман, И.Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 30 сентября 2016 г.  
Принята: 08 марта 2017 г.  
Опубликована: 30 марта 2017 г.

#### Ключевые слова:

динамические задачи,  
насосные системы,  
закон Бойля, стержневые  
системы, вариационные  
неравенства.

### АННОТАЦИЯ

Разработана модель продольных колебаний штанговой колонны глубинно-насосной установки, учитывающая сжимаемость газожидкостной смеси в цилиндре насоса. Был применен подход, использующий формулировку задачи в виде квази-вариационного неравенства. Решение этой задачи может быть сведено к последовательности задач негладкой минимизации. Данный подход является достаточно универсальным и может быть использован для колонн в сильно искривленных скважинах.

В данной модели газовый компонент смеси подчиняется закону Бойля. Сжимаемость жидкостного компонента, растворение газа в жидкости и выделение газа из жидкости в этой модели не учитываются.

На базе предложенной модели рассмотрено влияние содержания газа в смеси, заполняющей цилиндр насоса, на динамограмму штанговой колонны в верхнем сечении. Кроме того, рассмотрено различие поведения штанговой колонны в двух случаях: когда газ равномерно распределен (но не растворен) в жидкости, заполняющей цилиндр насоса и когда газ в цилиндре насоса занимает локализованный объем.

Если газ распределен в откачиваемой смеси, то сегменты динамограмм, соответствующие фазе сжатия, имеют более слабый наклон, чем в фазе расширения. Это объясняется тем, что масса газа, а следовательно, и сжимаемость смеси в фазе сжатия больше, чем в фазе расширения. Этот факт также объясняет ослабление свободных колебаний, которое гораздо более значительно для той фазы, когда плунжер движется вниз, чем для фазы, когда плунжер движется вверх. Если газ занимает локализованный объем в цилиндре насоса, то в фазе сжатия имеет ту же форму, что и в фазе растяжения. Повышенного ослабления вибраций при движении плунжера вниз в этом случае не наблюдается.

© ПНИПУ

© **Вассерман Игорь Николаевич** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: igorw@icmm.ru  
**Шардаков Игорь Николаевич** – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, e-mail: shardakov@icmm.ru

**Igor N. Vasserman** – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: igorw@icmm.ru  
**Igor N. Shardakov** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory, e-mail: shardakov@icmm.ru

## INFLUENCE OF THE GAS COMPRESSIBILITY IN THE PUMP CYLINDER ON LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF THE ROD STRING

I.N. Vasserman, I.N. Shardakov

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 30 September 2016  
Accepted: 08 March 2017  
Published: 30 March 2017

#### Keywords:

dynamic problems, pumping systems, Boyle's law, bar systems, variational inequalities.

### ABSTRACT

The paper presents a model development related to the longitudinal oscillations of the rod string in the deep-well pumping unit taking into account the compressibility of the gas-liquid mixture in the cylinder of the pump. The approach which uses the problem formulation in the form of quasi-variational inequalities was applied to solve this problem. The solution of this problem can be reduced to a sequence of non-smooth minimization problems. This approach is quite versatile and can be used for columns in highly deviated wells.

In this model, the gas component of the mixture is subject to Boyle's law. This model does not consider the compressibility of the liquid components, the dilution of gas in a liquid and extraction of gas from the fluid.

On the basis of the proposed model, we considered the influence of the gas content in the mixture which fills the pump cylinder on the dynagraph of the rod string in the upper section. Besides, different behaviors of the rod string in two cases are considered. In the first case the gas is uniformly distributed (but not dissolved) in a liquid which fills the pump cylinder. In the second case the gas fills a localized volume in the pump cylinder.

If the gas is distributed in the pumped mixture, the dynagraph segments which correspond to the compression phase have a weaker inclination than the ones of the extension phase. It can be explained by the fact that the mass of the gas and, thus the compressibility of the mixture in the phase of compression is higher than the one in the extension phase. This fact also explains the weakening of free oscillations which is much more significant for that phase when the plunger moves down, rather than the phase when the plunger moves upward. If the gas occupies the localized volume in the pump cylinder, then it has the same shape both in the compression and extension phases. When the plunger moves downward, no excessive weakening of oscillations is found.

© PNRPU

---

Использование штанговых глубинных насосных установок является одним из самых распространенных способов добычи нефти. Выявление факторов, влияющих на динамическое поведение штанговой колонны и развитие методов расчета, способных эти факторы учесть, может помочь в повышении надежности этих установок. Модели, описывающие поведение штанговых колонн, начали разрабатываться с 50-х годов прошлого века [1–3]. Однако в этих моделях расчеты носят в основном квазистатический характер, не учитывается сильно нелинейная природа действующих на колонну сил.

Более полными являются подходы, основанные на решении волнового уравнения для штанги [4–7]. Они эффективны для скважин, близких к вертикальным, где на боковую поверхность насосных штанг действует только гидродинамическое трение, линейно зависящее от скорости, и штанговая колонна сама по себе (без насоса и привода) является линейной системой. В наклонных и особенно криволинейных скважинах в дело вступает кулоново трение, действующее на боковую поверхность штанг, и штанговая колонна становится сама по себе нелинейной системой. Для этого случая вышеупомянутый подход неприменим.

Работа клапанов насоса и кулоново трение между штангами и насосно-компрессорной трубой приводят к многозначным зависимостям силы от скорости. Возникающие при этом переключения типа механических связей с силового на кинематический и обратно вызывают довольно интенсивные вибрации с частотой собственных колебаний колонны.

Для систем, включающих многозначные нелинейные зависимости необходимы специальные методы расчета, например, такие, которые используют формулировку задачи в виде вариационного неравенства [8–10]. Этот подход часто используется при исследовании механических систем с кулоновым трением и динамических задач пластичности [10–13].

Силы, возникающие в насосных системах, в том что касается их зависимости от скорости, имеют некоторое сходство с силами кулонова трения, поэтому данный подход был использован авторами в более ранних работах [14–17]. В этих работах скорость нижнего конца колонны в фазе покоя (когда все клапаны закрыты) предполагается равной нулю. Это соответствует случаю, когда жидкость в цилиндре насоса несжимаема.

Однако в реальных условиях жидкость обладает некоторой сжимаемостью, обусловленной в основном наличием газа в газожидкостной смеси. Как следствие, имеет место некоторое движение нижнего конца штанги при закрытых клапанах насоса.

В настоящей работе разработана модель, являющаяся развитием моделей, предложенных в [14–17], и учитывающая сильную сжимаемость газожидкостной смеси в цилиндре насоса. В этой модели газовый компонент подчиняется закону Бойля, а сжимаемость жидкостного компонента, растворение газа в жидкости и выделение газа из жидкости, потери давления в клапанах и инерция срабатывания клапанов не учитываются.

На базе предложенной модели рассмотрено влияние содержания газа в смеси, заполняющей цилиндр насоса, на динамограмму штанговой колонны в верхнем сечении. Кроме того, рассмотрено различие поведения штанговой колонны в двух случаях: когда газ равномерно распределен (но не растворен) в цилиндре насоса и когда в результате недостаточного заполнения газ в цилиндре насоса занимает локализованный объем.

## 1. Постановка задачи и решение

С точки зрения механики деформируемого твердого тела штанговая колонна представляет собой упругий ступенчатый стержень, расположенный в упругой трубе. Верхний конец стержня совершает кинематически заданное приводом движение, а нижний находится под действием силы, зависящей от направления его движения относительно соответствующего конца трубы, давления на входе насоса  $p_{in}$  и давления на выходе насоса  $p_{out}$ . Величина этой силы

$$P_B = p_{out} (A_{pl} - A_{near}) - p_c A_{pl} - P_f \text{sign}(\dot{u}_B), \quad (1)$$

где  $p_{out}$  – давление на выходе насоса;  $p_c$  – давление в цилиндре насоса;  $A_{pl} = (\pi/4)d_{pl}^2$  – рабочая площадь плунжера;  $A_{near} = (\pi/4)d_{near}^2$  – площадь сечения штанги возле насоса;  $P_f$  – величина силы трения между плунжером и цилиндром насоса;  $\dot{u}_B$  – скорость перемещения нижнего конца стержня и связанного с ним плунжера насоса.

В качестве положительного направления перемещения взято направление, соответствующее движению штанговой колонны вниз.

Для того чтобы вычислить давление в цилиндре насоса, рассмотрим поведение газожидкостной смеси в насосе.

Рабочий цикл состоит из четырёх стадий, которые представлены на рис. 1 как сегменты кривой перемещение плунжера–давление в цилиндре насоса. Точки перехода от одной стадии к другой помечены цифрами от 1 до 4. Соответствующие позиции плунжера показаны на рис. 2.

Первая стадия (1–2). Впускной и выпускной клапаны закрыты. Масса газожидкостной смеси и объем жидкостного компонента не меняются. При движении плунжера вниз происходит сжатие газового компонента газожидкостной смеси. Давление в цилиндре насоса повышается от  $p_{in}$  до  $p_{out}$ .

Вторая стадия (2–3). Когда давление в насосе достигает  $p_{out}$ , выпускной клапан открывается и жидкость из насоса начинает поступать в насосно-компрессорную трубу. Плунжер движется вниз, впускной клапан остается закрытым. Давление в цилиндре насоса остается постоянным и равным  $p_{out}$ . Стадия длится до тех пор, пока плунжер не примет крайнее нижнее положение и не начнется его движение вверх.

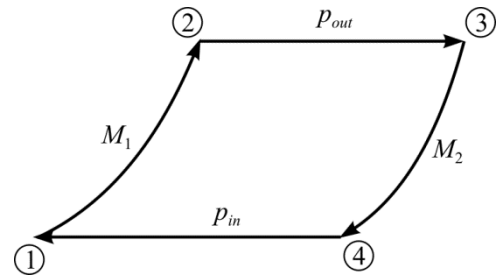


Рис. 1. Рабочий цикл насоса  
Fig. 1. Working cycle of the pump

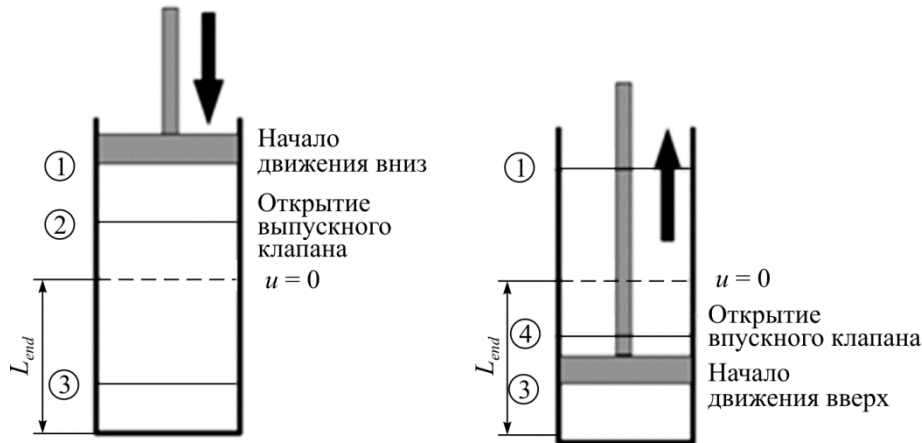


Рис. 2. Положение плунжера в ключевых точках рабочего цикла  
Fig. 2. Plunger position in the key points of the working cycle of the pump

Третья стадия (3–4). С началом движения плунжера вверх выпускной клапан закрывается. Как и на первой стадии, впускной и выпускной клапаны закрыты, а масса газожидкостной смеси и объем жидкостного компонента остаются постоянными. При движении плунжера вверх происходит расширение газового компонента газожидкостной смеси. Давление в цилиндре насоса понижается от  $p_{out}$  до  $p_{in}$ .

Четвертая стадия (4–1). Когда давление в насосе достигает  $p_{in}$ , впускной клапан открывается и жидкость из скважины поступает в цилиндр насоса. Плунжер движется вверх, выпускной клапан остается закрытым. Давление в цилиндре насоса остается постоянным и равным  $p_{in}$ . Стадия длится до тех пор, пока плунжер не примет крайнее верхнее положение и не начнется его движение вниз. Тогда впускной клапан закрывается и весь процесс повторяется с самого начала.

Рассматриваются два случая присутствия газа в цилиндре насоса: газ распределенный (но не растворенный) в жидкости, и газ, занимающий локализованный объем в цилиндре насоса в результате его недостаточного заполнения (рис. 3).

Начнем с ситуации, когда газ в насосе распределен в откачиваемой смеси. В этом случае масса газа неизменна только на тех стадиях, когда оба клапана закрыты. Когда

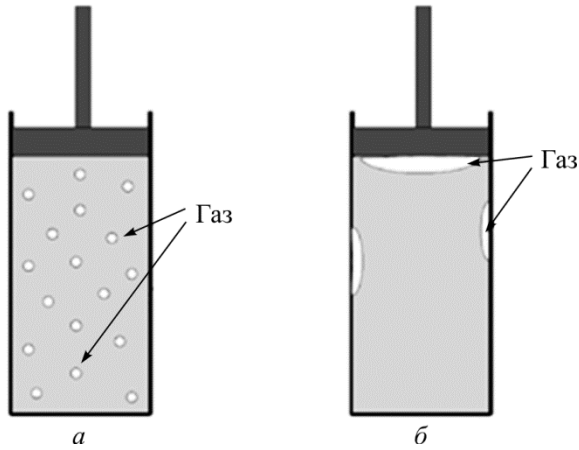


Рис. 3. Два типа присутствия газа в цилиндре насоса: *a* – газ распределен в смеси; *б* – газ занимает локализованный объем в цилиндре насоса

Fig. 3. Two types of the gas content in the pump: (*a*) the gas is distributed in the mixture; (*b*) the gas is localized in some parts of the pump

впускной (выпускной) клапан открыт, газ поступает (вытекает) в насос в составе газожидкостной смеси. Поэтому масса газа, а следовательно, и сжимаемость газожидкостной смеси различны на стадии сжатия и расширения.

Пусть задано  $\gamma_v(p_{in})$  – объемное содержание газа при  $p_{in}$ . При изменении давления благодаря сжатию или расширению газового компонента меняется и текущее объемное газосодержание. Если жидкостный компонент несжимаем, а газовый компонент подчиняется закону Бойля, то зависимость текущего объемного газосодержания от давления может быть записана как

$$\gamma_v(p) = \frac{\gamma_v(p_{in}) \left( \frac{p_{in}}{p} \right)}{\gamma_v(p_{in}) \left( \frac{p_{in}}{p} \right) + (1 - \gamma_v(p_{in}))}. \quad (2)$$

На первой и третьей стадии, когда впускной и выпускной клапаны закрыты, давление в цилиндре насоса изменяется согласно закону Бойля:

$$p_c V_g(u) = \bar{p} V_g(\bar{u}),$$

где

$$V_g = V - V_f = A_{pl} \cdot (-u + L_{end}) - V_f$$

– объем газа в цилиндре насоса;

$$V_f = A \cdot (-\bar{u} + L_{end}) (1 - \gamma_v(\bar{p}))$$

– объем жидкой составляющей в цилиндре насоса, остающийся постоянным на этих стадиях;  $\bar{u}$  и  $\bar{p}$  – перемещение плунжера и давление в цилиндре насоса в начале стадии процесса;  $L_{end}$  – расстояние между дном цилиндра и позицией плунжера, соответствующей  $u = 0$ , т.е. ненапряженному состоянию штанги.

Таким образом, получаем выражение для текущего давления в цилиндре насоса

$$p = p_L(u; \bar{u}, \bar{p}) = \bar{p} \frac{(-\bar{u} + L_{end}) \gamma_v(\bar{p})}{u_L(\bar{u}, \bar{p}) - u} \quad (3)$$

и производной давления по перемещению плунжера  $u$

$$\frac{dp}{du} = p'_L(u; \bar{u}, \bar{p}) = \bar{p} \frac{(-\bar{u} + L_{end}) \gamma_v(\bar{p})}{(u_L(\bar{u}, \bar{p}) - u)^2}, \quad (4)$$

где

$$u_L(\bar{u}, \bar{p}) = L_{end} - (-\bar{u} + L_{end}) (1 - \gamma_v(\bar{p})).$$

На первой стадии процесса  $\bar{p} = p_{in}, \bar{u} = u_1$ , а на третьей  $\bar{p} = p_{out}, \bar{u} = u_3$ .

Во второй ситуации, соответствующей неполному заполнению цилиндра, газ в цилиндре насоса занимает локализованный объем, и масса газа неизменна на всех стадиях процесса. В этом случае текущее давление в цилиндре насоса и производная давления по перемещению плунжера  $u$  вместо (3), (4) записываются, как

$$p = p_w \frac{v_{gw}}{v_{gc}} = p_w \frac{v_{gw}}{L_{end} - v_{fw} - u}, \quad (5)$$

$$\frac{dp}{du} = p_w \frac{v_{gw}}{v_{gc}^2}, \quad (6)$$

где  $p_w$  – давление в начале стадии процесса;  $v_{gw}, v_{fw}$  – объемы газа и жидкости в начале стадии процесса, отнесенные к единице площади плунжера.

Перемещение нижнего конца стержня относительно нижнего конца трубы  $u_b$  во всех фазах движения может быть представлено как сумма упругой составляющей и перемещения скольжения:

$$u_b = u_e + u_s. \quad (7)$$

При закрытых клапанах в цилиндре происходит упругая деформация газожидкостной смеси. Нижний конец колонны в этом случае совершает некоторое обратимое движение  $u_e$ . Давление в насосе

$$p_c = p(u_e). \quad (8)$$

Скорость скольжения равна нулю в этой фазе:

$$p_c = \begin{cases} p_{in} & \dot{u}_s < 0, \\ [p_{in}, p_{out}] & \dot{u}_s = 0, \\ p_{out} & \dot{u}_s > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Это условие может быть представлено в виде вариационного неравенства

$$j_p(v_b - v_e) - j_p(\dot{u}_b - \dot{u}_e) \geq p_c \cdot ((v_b - v_e) - (\dot{u}_b - \dot{u}_e)) \quad \forall v \in R^k. \quad (10)$$

Здесь  $j_p(\dot{u})$  – выпуклый суперпотенциал, определенный, как

$$j_p(\dot{u}) = \sup_{u^* \in K_p} u^* \dot{u},$$

где

$$K_p = [p_{in}, p_{out}].$$

Численный анализ рассматриваемой задачи выполняется на основе принципа возможных перемещений [14]:

$$\begin{aligned} & \int_L \rho \ddot{u} w A dx + \int_L N_{eq}(u) \varepsilon(w) dx + \int_L C i w dx = \\ & = \int_L q_t(\dot{u}) w dx + \int_L \left( \rho g \cos \alpha - \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) w A dx + P_{b,eq}(\dot{u}_b) w_b - p_A A_{n_s} w_A, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$P_{в,eq} = P_в + p_в A_в$$

– эквивалентная сила, учитывающая давление, действующее на боковую поверхность насосной штанги [14];  $\rho$  – плотность материала штанги;  $C$  – коэффициент гидродинамического сопротивления;  $w$  – пробная функция, равная нулю в точках, где перемещение задано.

Исходя из принципа возможных перемещений и субдифференциальных граничных условий, представляя пробную функцию  $w$  в виде

$$w = v - \dot{u},$$

можно сформулировать следующую задачу: найти поле перемещений  $u(t)$ , удовлетворяющее динамическому квазивариационному неравенству

$$\begin{aligned} & (\rho A \ddot{u}, v - \dot{u}) + (C \dot{u}, v - \dot{u}) + a(u, v - \dot{u}) + \\ & + \Phi_{t,q_n(u)}(v) - \Phi_{t,q_n(u)}(u) + p_c A_{pl} \cdot (v_e - \dot{u}_e) \geq l(v - \dot{u}) \quad \forall v \in U, \end{aligned} \quad (12)$$

начальным условиям для  $u$  и  $\dot{u}$  и такое, что  $\dot{u} \in U$ .

Здесь

$$\Phi_{t,q_n(u)}(v) = \int_L j_{t,q_n(u)}(v) dx + A_{pl} j_p(v_B - v_e),$$

где  $j_{t,q_n(u)}(v)$  – соответствует кулонову трению, действующему на боковую поверхность штанговой колонны.

Для дискретизации по времени мы используем схему Ньюмарка, где выражаем перемещения и ускорения в момент времени  $t_{n+1}$  через скорости в данный момент времени, а также через скорости перемещения и ускорения, вычисленные на предыдущем шаге. Учитывая свойства билинейной формы  $a(\cdot, \cdot)$ , скалярного произведения и линейность функционала  $l(\cdot)$ , малый размер временного шага, где давление можно считать изменяющимся линейно:

$$p_c^{(n+1)} = p_c^{(n)} + p' \cdot (u^{(n+1)} - u^{(n)}), \quad (13)$$

мы сводим решение динамического квазивариационного неравенства к решению на каждом временном шаге следующей задачи: найти  $\dot{u}^{(n+1)} \in U^{n+1}$ , удовлетворяющее квазивариационному неравенству

$$\hat{a}(\dot{u}^{(n+1)}, v - \dot{u}^{(n+1)}) + \Phi_{t,q_n(u)}(v) - \Phi_{t,q_n(u)}(u) \geq \hat{l}(v - \dot{u}^{(n+1)}) \quad \forall v \in U, \quad (14)$$

где

$$\hat{a}(u, v) = \frac{\rho}{\gamma \Delta t} \cdot (Au, v) + (Cu, v) + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} a(u, v) + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \cdot p'_c A_{pl} u_e v_e. \quad (15)$$

$$\hat{l}(v) = l(v) + \rho \cdot (\tilde{w}, v) - a(\tilde{u}, v) - p_c^{(n)} A_{pl} v_e - p'_c A_{pl} \tilde{u}_e v_e. \quad (16)$$

Здесь  $\tilde{u}$  и  $\tilde{w}$  – вспомогательные величины, зависящие от перемещений, скоростей и ускорений, вычисленных на предыдущем временном шаге;  $p_c^{(n)}$  и  $p'_c$  – вычисленные на предыдущем шаге значения давления в цилиндре и производной давления по перемещению.

В формулах (15), (16) по сравнению с аналогичными формулами, представленными в [14, 17], появляются дополнительные члены, содержащие  $p_c^{(n)}$  и  $p_c'$ , отвечающие за влияние сжимаемости газа в цилиндре насоса.

Как показано в работах [11–13], решение квазивариационного неравенства может быть найдено путем последовательного решения вариационных неравенств. Если размер временного шага мал, то для достижения необходимой точности достаточно одного шага. Решение вариационного неравенства эквивалентно нахождению минимума выпуклого негладкого функционала. С помощью метода конечных элементов [18] задача сводится к минимизации конечномерного выпуклого негладкого функционала, которая может быть реализована путем сведения к последовательности гладких задач нелинейного программирования с помощью метода множителей [19] или алгоритма Удзавы [9]. Детали конечноэлементной реализации и решения задачи с помощью метода множителей можно найти в [14].

Разработанный алгоритм был использован для исследования поведения колонны насосных штанг в условиях, близких к реальным.

## 2. Примеры решения

Рассматриваемая колонна состояла из трех частей (снизу вверх): 1 – диаметр 19 мм, длина 272 м; 2 – диаметр 22 мм, длина 392 м; 3 – диаметр 25 мм, длина 328 м. Максимальный зенитный угол 34 угловых градуса на глубине 560 м. Давление на входе насоса 4,815 МПа, давление на выходе насоса 8,563 МПа, диаметр плунжера 32 мм. Расстояние между дном цилиндра и нулевой позицией плунжера равно 2 м. Частота возмущения 6 ходов в минуту. Длина хода верхнего конца колонны равна 3 м.

В первом примере исследовано влияние газосодержания на динамическое поведение штанговой колонны. Представлен случай, когда газ распределен в откачиваемой смеси. Рассматривались три значения газосодержания. На рис. 4 показаны кривые перемещение–сила для верхнего и нижнего концов колонны.

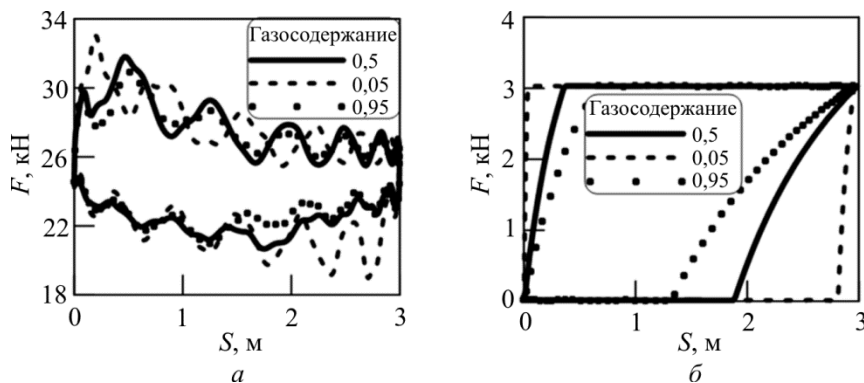


Рис. 4. Кривые перемещение–сила (динамограммы) в случае, когда газ распределен в смеси для: (а) верхнего конца колонны; (б) нижнего конца колонны  
 Fig. 4. Displacement-force curves (dynagraphs) for the case when the gas is distributed in the mixture (а) is for the upper end; (b) is for the lower end

Видно, что сегмент кривой в фазе сжатия имеет более слабый наклон, чем в фазе расширения. Это объясняется тем, что масса газа, а следовательно, и сжимаемость смеси в фазе сжатия больше, чем в фазе расширения. Этот факт также объясняет ослабление



свободных колебаний, которое гораздо более значительно для той фазы, когда плунжер движется вниз, чем для фазы, когда плунжер движется вверх. Чем выше газосодержание, тем меньше наклон сегмента кривой в фазе расширения и особенно в фазе сжатия, тем слабее свободные колебания.

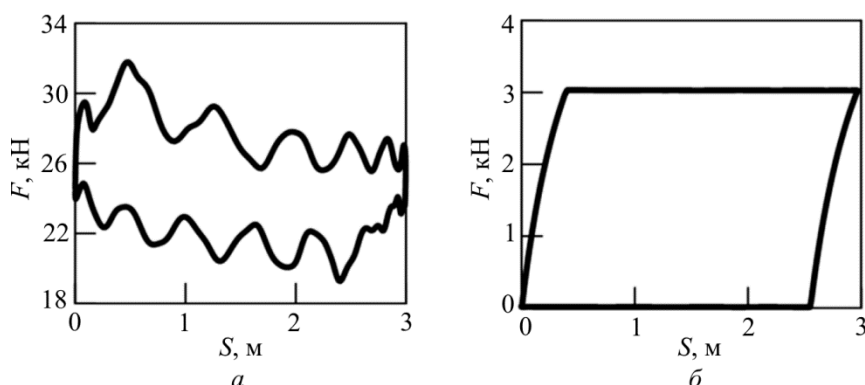


Рис. 5. Кривые перемещение–сила (динамограммы) в случае, когда газ занимает локализованный объем в цилиндре насоса для: (а) верхнего конца колонны; (б) нижнего конца колонны  
Fig. 5. Displacement-force curve (dynagraphs) for the case when the gas is localized in some parts of the pump cylinder (a) is for the upper end; (b) is for the lower end

Во втором примере рассматривается ситуация, когда газ занимает локализованный объем в цилиндре насоса. Газосодержание было взято равным 0,5. Результат показан на рис. 5. В этом случае масса газа постоянна во всех фазах процесса. Поэтому, как видно из рис. 5, фрагмент кривой в фазе сжатия имеет ту же форму, что и в фазе растяжения. Повышенного ослабления вибраций при движении плунжера вниз в этом случае не наблюдается.

## Заключение

Разработанная авторами модель продольных колебаний штанговой глубинной насосной установки была усовершенствована с целью учета сжимаемости газожидкостной смеси в цилиндре насоса.

Показано значительное влияние газосодержания в смеси, заполняющей насос, на динамическое поведение штанговой колонны. Рассмотрены различия в поведении штанговой колонны для случаев, когда газ распределен в смеси и когда он занимает локализованный объем в цилиндре насоса. В первом случае поведение штанговой колонны значительно различается в фазе сжатия и в фазе расширения, во втором случае этих различий не наблюдается.

## Библиографический список

1. Вирновский А.С. Способ вычисления величин, характеризующих работу глубиннонасосной установки по данным наземных измерений // Нефтяное хозяйство.– 1952. – № 5. – С. 30–36.
2. S.G.Gibbs. Predicting the behaviour of sucker rod systems // Journal of Petroleum Technology – 1963. – Vol. 6. – P. 769–778.
3. Doty D.R., Schmidt Z. An improved model for sucker rod pumping // Society of Petroleum Engineers Journal (US). – 1983. – Vol. 23. – P. 33–41
4. Romero O.J, Almeida P. Numerical simulation of the sucker-rod pumping system // Ingenieria e Investigacion. – 2014. – Vol. 34. – No. 3. – P. 4–11.

5. Gibbs S. Rod Pumping. Modern Methods of Design // *Diagnosis and Surveillance*, 2012. – 212 p.
6. A uniform and reduced mathematical model for sucker rod pumping / Leiming Liu, ChaonangTong, Jianqin Wang, Ranbing Liu // *Computational Science – ICCS 2004*, 2004. – P. 372–379.
7. Hojjati H., Lukasiewicz S.A. Modelling of sucker rod strings // *Journal of Canadian Petroleum Technology*. – 2005. – Vol. 44. – No. 12. – P. 55–58.
8. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 198 с.
9. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979.
10. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функционалы энергии. – М.: Мир, 1989.
11. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // *Прикладная математика и механика*. – 1980. – Т. 44. – Вып. 1. – С. 122–129.
12. Вовкушевский А.В. Вариационная постановка и методы решения контактной задачи с трением при учете шероховатости поверхности // *Механика твердого тела*. – 1991. – № 3. – С. 56–62.
13. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J., Lovisek J. Solution of variational inequalities in mechanics. – New York: Springer-Verlag, 1988.
14. Вассерман И.Н., Шардаков И.Н. Постановка и решение упругих динамических задач для стержневых систем с граничными условиями, описываемыми многозначными соотношениями // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 124–135.
15. Вассерман И.Н., Шардаков И.Н., Вассерман Н.Н. Влияние режима работы глубинной насосной установки на долговечность штанговой колонны // *Химическое и нефтегазовое машиностроение*. – 2004. – № 5. – С. 7–9.
16. Вассерман И.Н., Шардаков И.Н., Вассерман Н.Н. Динамика стеклопластиковых и комбинированных штанговых колонн // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2009. – № 1. – С. 35–39.
17. Shardakov I.N., Wasserman I.N. Numerical modelling of longitudinal vibrations of a sucker rod string // *Journal of Sound and Vibration*. – 2010. – Vol. 329. – Iss. 3. – P. 317–327.
18. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
19. Бертсекас Д. Условная оптимизация и метод множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987.

## References

1. Virmovskii A.S. Sposob vychisleniia velichin, kharakterizuiushchikh rabotu glubinnonasosnoi ustanovki po dannym nazemnykh izmerenii [A way of calculation of values describing the work of the deep pump set according to ground measurements]. *Neftianoe khoziaistvo*, 1952, no. 5, pp. 30-36.
2. Gibbs S.G. Predicting the behaviour of sucker rod systems. *Journal of Petroleum Technology*. 1963, vol. 6, pp. 769-778.
3. Doty D.R., Schmidt Z. An improved model for sucker rod pumping. *Society of Petroleum Engineers Journal(US)*, 1983, vol. 23, pp. 33-41.
4. Romero O.J, Almeida P. Numerical simulation of the sucker-rod pumping system. *Ingenieria e Investigacion*, 2014, vol. 34, no. 3, pp. 4-11
5. Gibbs S. Rod pumping. Modern methods of design, *Diagnosis and Surveillance*, 2012, 212 p.
6. Leiming Liu, ChaonangTong, Jianqin Wang, Ranbing Liu. A uniform and reduced mathematical model for sucker rod pumping. *Computational Science – ICCS 2004*, 2004, pp. 372-379.
7. Hojjati H., Lukasiewicz S.A. Modelling of sucker rod strings. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 2005, vol. 44, no 12, pp. 55-58.
8. Duvaut G., Lions J.L. Les inéquations en Mécanique et en Physique. *Dunod, Paris*, 1972, 198 p.
9. Glowinski R., Lions J.L., Trémolieres R. Analyse numérique des inéquations variationnelles. *Dunod, Paris*, 1976.
10. Panagiotopoulos P.D. Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions. *Birkhäuser, Boston*, 1985.

11. Kravchuk A.S. On the theory of contact problems taking account of friction on the contact surface. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 1980, vol. 44, iss. 1, pp 83-88.
12. Vovkushevskii A.V. Variatsionnaia postanovka i metody resheniia kontaktnoi zadachi s treniem pri uchete sherokhovatosti poverkhnosti [The variational formulation and methods of solution of the contact problem with friction, taking into account the surface roughness]. *Mekhanika tverdogo tela. – Mechanics of Solids*, 1991, no. 3, pp. 56-62.
13. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J., Lovisek J. Solution of variational inequalities in mechanics. *New York, Springer-Verlag*, 1988.
14. Vasserman I.N., Shardakov I.N. Formulation and solution of dynamic problems of elastic rod systems subjected to boundary conditions described by multivalued Relations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 404-414.
15. Vasserman I.N., Shardakov I.N., Vasserman N.N. Effect of operating conditions of a deep pumping plant on rod-column longevity. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2004, vol. 40, no. 5-6, pp. 264-268.
16. Vasserman I.N., Shardakov I.N., Vasserman N.N. Dynamics of glass-reinforced plastic and combined rod columns. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2009, vol. 38, no. 1, pp. 27-30.
17. Shardakov I.N., Vasserman I.N. Numerical modelling of longitudinal vibrations of a sucker rod string. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, vol. 329, iss. 3, pp. 317-327.
18. Zienkiewich O.C. The finite element method in engineering science. *McGraw-Hill-London*, 1971.
19. Bertsekas D.P. Constrained optimization and Lagrange multiplier methods. *Academic Press*, 1982.