



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.2.11

УДК 539.3

РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Ф.С. Хайруллин, О.М. Сахбиев

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 февраля 2017 г.

Принята: 21 июня 2017 г.

Опубликована: 30 июня 2017 г.

Ключевые слова:

трехмерные конструкции, вариационный метод, напряженное состояние, аппроксимация, расчет ортотропных конструкций.

АННОТАЦИЯ

В настоящее время для расчета сложных ортотропных тонкостенных конструкций, в том числе тонкостенных ортотропных оболочек, часто используется метод конечных элементов (МКЭ). Обычно при расчете этим методом применяется один из двух подходов: в первом подходе используется упрощающая гипотеза (например, гипотеза Тимошенко), в которой пренебрегают распределением напряжений вдоль толщины тонкостенной конструкции, что снижает размерность задачи; во втором подходе используются соотношения трехмерной теории упругости без использования упрощающих гипотез. В представляемом методе, который очень похож на МКЭ, при расчете также используются соотношения трехмерной теории упругости без упрощающих гипотез.

В более ранней работе авторов был представлен вариационный метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных упругих конструкций, основанный на использовании аппроксимирующих функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации. В данной работе предложенные трехмерные аппроксимирующие функции используются для расчета ортотропных конструкций. Аналогичные аппроксимирующие функции для расчета оболочек использовались в работах, в которых разрешающие уравнения получались на основании упрощающей гипотезы.

В общем виде метод основывается на использовании криволинейной системы координат, что делает его достаточно универсальным. Показано, что одни и те же аппроксимации могут быть использованы как для расчета трехмерных ортотропных конструкций, так и ортотропных оболочек. Отмечается, что расчет можно эффективно производить не за счет сгущения сетки, а за счет повышения порядка аппроксимирующих функций.

Достоверность предложенного метода подтверждается представленными численными результатами, которые хорошо согласуются с известными решениями.

© ПНИПУ

© Хайруллин Фарид Сагитович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: x_farid@mail.ru
Сахбиев Олег Миргасимович – учебный мастер, e-mail: somirg@yandex.ru

Farid S. Khayrullin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: x_farid@mail.ru
Oleg M. Sakhbiev – Educational Master, e-mail: somirg@yandex.ru



COMPUTING ORTHOTROPIC CONSTRUCTIONS USING THE VARIATION METHOD BASED ON THREE-DIMENSIONAL FUNCTIONS WITH FINAL CARRIERS

F.S. Khayrullin, O.M. Sakhbiev

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 February 2017
Accepted: 21 June 2017
Published: 30 June 2017

Keywords:

three-dimensional constructions, variation method, stressed state, approximation, computation of orthotropic constructions.

ABSTRACT

At the moment the finite element method (FEM) is often used to compute complex orthotropic thin-walled constructions including thin-walled orthotropic shells. As a rule, one of two approaches is used to make computations using this method. In the first approach the simplifying hypothesis (for example Timoshenko's hypothesis) is used in which the distribution of stress along the thickness of a thin-walled construction is neglected which reduces the dimension of a task. The second approach uses the ratio of the three-dimensional theory of elasticity without the use of the simplifying hypotheses. In this presented method which is very similar to the FEM, the ratio of the three-dimensional elasticity theory without the simplifying hypotheses is also used for the computations.

The paper presents the variation method aiming to determine the stress-strain state of three-dimensional elastic constructions based on the use of the approximating functions with final carriers having an arbitrary degree of approximation [1]. The three-dimensional approximating functions mentioned before are used to compute the orthotropic constructions in this paper. The same approximating functions are used in the papers [2, 3] for the computation of shells in which the resolving equations are obtained on the basis of the simplifying hypothesis.

In a general view, the method is based on the use of the curvilinear system of coordinates that does it quite universal. It is shown that the same approximations can be used to compute the three-dimensional autotrophic constructions and orthotropic shells. It is noted that the computation can be efficiently made not only by thickening the lattice but by increasing the order of the approximating functions.

The reliability of the suggested method is confirmed by the presented numerical results which fit well with the known solutions.

© PNRPU

Введение

В современной технике использование композиционных материалов является экономически и технологически обоснованным. Одной из важных задач в механике композитов является расчет на прочность ортотропных конструкций.

В решении этих задач широкое распространение получил численный метод конечных элементов (МКЭ), основанный на различных формулировках. Большинство авторов МКЭ формулируется в виде метода перемещений [1–11]. Решения МКЭ для изотропных тел достаточно легко модифицируются и используются для ортотропных тел [4].

Одним из преимуществ данной формулировки является простота и, соответственно, удобство реализации. Метод, представленный в данной работе, во многом похож на МКЭ в виде метода перемещений. Отличия состоят в том, что многие неизвестные коэффициенты в аппроксимации не имеют физического смысла, точность решения достигается не за счет сгущения сетки, а за счет повышения порядка аппроксимации.

МКЭ в смешанных формулировках [12–16] также интенсивно развивается, поскольку имеет свои преимущества. К числу таких преимуществ можно отнести непрерывное поле напряжений, снижение порядка аппроксимирующих функций и т.п. При смешанной формулировке МКЭ узловыми неизвестными конечных элементов являются перемещения, напряжения или усилия.

Объемные конечные элементы на основе соотношений теории упругости без дополнительных гипотез о деформировании нормали использованы в работах [17–19]. В мето-

де, который представлен в данной работе, также используются объемные конечные элементы трехмерной теории упругости.

Кроме того, можно отметить следующие методы расчета ортотропных конструкций. Например, в работе [20] предложен алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру, который позволяет исследовать напряженно-деформируемое состояние (НДС) оболочек из ортотропных материалов. В [21] предлагается специально разработанный метод конструктивной анизотропии, который также основан на методе Ритца. В работе [22] для расчета ортотропных оболочек предложен численно-аналитический метод, основанный на методе разделения переменных (Фурье) в уравнениях с частными производными. В работах [23–26] развиваются численно-аналитические методы расчета НДС ортотропных оболочек.

Ниже представлен новый численный метод решения пространственной задачи теории упругости для ортотропных конструкций с помощью конечно-элементных аппроксимаций произвольной степени. Основным преимуществом представленного метода по сравнению с традиционными вариантами МКЭ является то, что при повышении порядка аппроксимации не требуется увеличения количества узловых точек и использования в качестве узловых значений производных от искомых функций, тем более производных высоких порядков.

В данной работе результаты, полученные представленным методом, анализируются и сопоставляются с результатами других авторов [23, 27].

1. Методика моделирования

Вводятся глобальная система координат x, y, z и ортогональная криволинейная система координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (рис. 1), в которой задаются определяющие уравнения деформации упругого тела. Предполагается, что перемещения и деформации малы, справедлив закон Гука. В зависимости от формы рассматриваемой конструкции выбирается соответствующая система координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: декартова, цилиндрическая, сферическая и т.п.

В криволинейной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ деформации определяются через компоненты перемещения по формулам [28]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_{ij} u_j + k_{il} u_l, \\ \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - k_{ij} u_i - k_{ji} u_j, \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_1, u_2, u_3 – компоненты перемещения произвольной точки тела в системе координат a_1, a_2, a_3 ; A_i – коэффициенты Ляме; k_{ij} – кривизна кривой α_i в плоскости $\alpha_i \alpha_j$ (главные кривизны); $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ – углы сдвига; индексы j, l получают круговой перестановкой индексов i, j, l .

Физические соотношения для ортотропного материала записываются так:

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\}. \quad (2)$$

Пусть оси координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ совпадают с направлениями ортотропии (направления упругой симметрии). Матрица упругости в этом случае примет вид [29]

$$[E] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_{11}, & E_{12}, & E_{13}, & 0, & 0, & 0 \\ E_{21}, & E_{22}, & E_{23}, & 0, & 0, & 0 \\ E_{31}, & E_{32}, & E_{33}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \Delta \cdot G_{12}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \Delta \cdot G_{23}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \Delta \cdot G_{31} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $E_{11} = E_1(1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32})$; $E_{22} = E_2(1 - \nu_{31} \cdot \nu_{13})$; $E_{33} = E_3(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})$;

$$E_{12} = E_{21} = E_2(\nu_{12} + \nu_{13} \cdot \nu_{32}); E_{13} = E_{31} = E_2(\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23});$$

$$E_{23} = E_{32} = E_3(\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13});$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{12} \cdot \nu_{23} \cdot \nu_{31}.$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – модули упругости в соответствующих направлениях; G_{12}, G_{23}, G_{31} – модули сдвига соответственно в плоскостях $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_1)$; ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, для которых должны выполняться равенства

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}; \quad \nu_{32} = \frac{E_3}{E_2} \nu_{23}; \quad \nu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31}.$$

Исследуемая трехмерная конструкция разбивается на подобласти в виде криволинейных шестигранников V_k (рис. 1), грани которых являются кусочно-гладкими поверхностями и описываются в криволинейной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ уравнениями $\alpha_3 = F_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_3 = F_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_2 = F_3(\alpha_3, \alpha_1)$, $\alpha_2 = F_4(\alpha_3, \alpha_1)$, $\alpha_1 = F_5(\alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1 = F_6(\alpha_2, \alpha_3)$, где $F_i, i = \overline{1, 6}$ – однозначные функции класса C^1 .

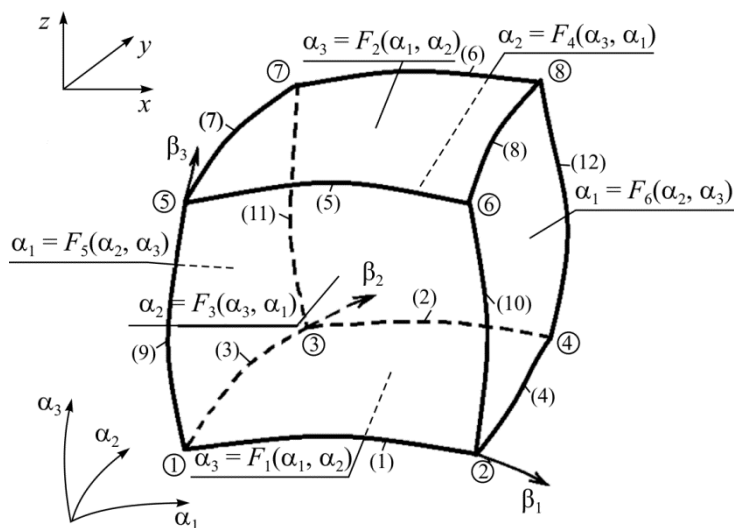


Рис. 1. Подобласть V_k в виде криволинейного шестигранника
Fig. 1. Subarea V_k in the form of a curvilinear hexagon

В подобласти V_k вводится дополнительная криволинейная система координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, которая связана с системой координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= F_5(\alpha_{25}, a_{35})(1 - \beta_1) + F_6(a_{26}, a_{36})\beta_1 + a_{10}, \\ \alpha_2 &= F_3(a_{33}, a_{13})(1 - \beta_2) + F_4(a_{34}, a_{14})\beta_2 + a_{20}, \\ \alpha_3 &= F_1(a_{11}, a_{21})(1 - \beta_3) + F_2(a_{12}, a_{22})\beta_3 + a_{30}, \end{aligned} \quad (4)$$

где функции $a_{25} = a_{25}(\beta_2, \beta_3)$, $a_{35} = a_{35}(\beta_2, \beta_3)$, $a_{10} = a_{10}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и т.д. подбираются таким образом [1], что на гранях $\Omega_i^k, i = \overline{1,6}$ подобласти V_k уравнения (3) переходят в уравнения этих граней, на граничных линиях $\lambda_j^k, j = \overline{1,12}$ – в уравнения этих линий; $0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 1$.

Для определения напряженно-деформированного состояния конструкции используется вариационный принцип Лагранжа [30], на основании которого должно выполняться условие

$$\delta E = \sum_{k=1}^K \delta E_k(U) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} (\delta \Pi_k - \delta W_k) d\Omega = 0, \quad (5)$$

где E – полная энергия конструкции; E_k – полная энергия подобласти V_k ; Π_k , δW_k – удельная потенциальная энергия деформации и вариация работы внешних сил единицы объема подобласти V_k ; K – количество подобластей.

В подобласти V_k компоненты перемещения $U = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ аппроксимируются функциями, заданными в локальной криволинейной системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, следующим образом:

$$u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{imnl}^k t_n(\beta_1) t_m(\beta_2) t_l(\beta_3), \quad (6)$$

здесь D_{imnl}^k – неизвестные постоянные; функции формы

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, t_2(\beta_1) = \beta_1, t_m(\beta_1) = t_1(\beta_1)[t_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}).$$

Аппроксимирующие функции (6) подставляются в соотношения (1), а затем в физические соотношения для ортотропного тела (2). Используя известные соотношения для потенциальной энергии деформации, на основании вариационного уравнения (5) получается система уравнений для определения неизвестных постоянных D_{imnl}^k .

2. Результаты расчетов

Для проверки предложенного метода была рассмотрена задача об изгибе трехслойной балки из углепластика под действием синусоидальной нагрузки (рис. 2). В качестве системы координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ была использована декартова система координат. В работе [27] для этой задачи приводится аналитическое решение теории упругости, решение задачи на основе теории оболочек типа Тимошенко, решение задачи

на основе классической теории оболочек и решение автора методом конечных элементов на основе смешанного функционала с независимой аппроксимацией напряжений и перемещений в каждом слое. Автор половину балки разбивал на восемь трехслойных конечных элементов, которые удовлетворяют гипотезе Тимошенко.

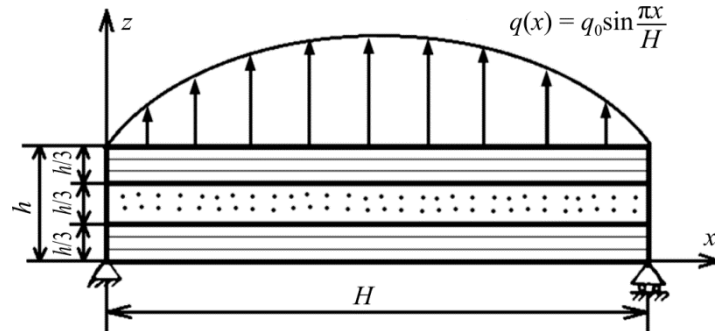


Рис. 2. Трехслойная балка из углепластика под действием синусоидальной нагрузки

Fig. 2. Three-layer beam made from a coal plastic under the influence of sinusoidal loading

Балка состоит из углепластиковых однонаправленно армированных монослоев со следующими характеристиками (ось 1 совпадает с направлением армирования): $E_{11} = 1,724 \cdot 10^5$ МПа, $E_{22} = 6895$ МПа, $G_{12} = G_{31} = 3448$ МПа, $G_{23} = 1379$ МПа, $\nu_{12} = 0,25$. Направления армирования 1-го и 3-го слоев совпадают с осью балки x , а направление армирования 2-го слоя перпендикулярно оси балки. Для первого и третьего слоев $E_{xx} = E_{11}$, $E_{yy} = E_{22}$, $G_{xy} = G_{xz} = G_{12}$, $G_{yz} = G_{23}$, для второго слоя $E_{xx} = E_{22}$, $E_{yy} = E_{11}$, $G_{xz} = G_{23}$. Приняты следующие численные параметры: $H = 24$ м, $b = 1$ м, $h = 2,4$ м, $q_0 = 0,6895$ МПа.

При расчете балка разбивалась на четыре конечных элемента: по одному элементу на верхний и нижний слой и два элемента по толщине среднего слоя. Порядок аппроксимации задавался следующими константами в выражении (6): $M = N = L = 7$.

Для сравнения результатов были введены следующие безразмерные величины:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{q_0}; \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{q_0}; \quad \bar{w} = \frac{100E_{22} \cdot h^3}{q_0 \cdot H^4} w.$$

В таблице приводятся безразмерный прогиб \bar{w} в сечении $x = H/2$ и погрешность ε в % по отношению к решению теории упругости.

Безразмерный прогиб \bar{w} в сечении $x = H/2$ и погрешность ε в % по отношению к решению теории упругости

Dimensionless deflection \bar{w} in the cross section $x = H/2$ and an error ε in % in relation to the solution of the theory of elasticity

Прогиб в центре балки	Аналитическое решение [27]			МКЭ [27]	Решение по представленной методике
	Теория уругости	Классическая теория	Теория Тимошенко		
\bar{w}	0,93164	0,50966	0,7631	0,9886	0,9441
ε	—	45,29	18,09	-6,11	-1,33

Из таблицы видно, что схема разбиения на четыре конечных элемента и использованный порядок аппроксимации оказались достаточными для получения решения с погрешностью 1,33 %.

На рис. 3 приводится безразмерное напряжение $\bar{\sigma}_{xx}$ в сечении $x = H/2$, на рис. 4 – безразмерное напряжение $\bar{\sigma}_{xz}$ в сечении $x = 0$. На этих рисунках сплошной линией приведены данные согласно представленной методике, остальные графики соответствуют данным работы [27].

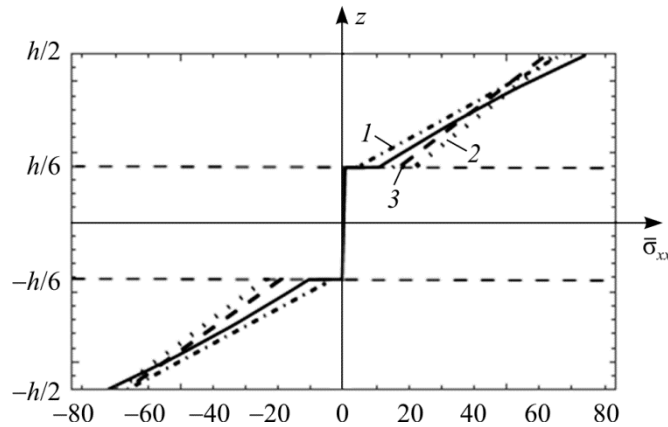


Рис. 3. Безразмерное напряжение $\bar{\sigma}_{xx}$ в сечении $x = H/2$: кривая 1 – решение теории упругости [27]; кривая 2 – решение МКЭ [27] и кривая 3 – решение по классической теории слоистых балок [27]

Fig. 3. The dimensionless stress $\bar{\sigma}_{xx}$ in the cross section $x = H/2$.

Curve (1) shows the solution based on the theory of elasticity [27], curve (2) shows the solution based on the FEM [27] and curve (3) shows the solution based on the classical theory of layered beams [27]

Как видно из таблицы и рисунков, полученное решение очень близко к решению теории упругости.

В следующем примере рассмотрена задача о расчете на прочность однослойной шарнирно-закрепленной ортотропной оболочки (рис. 5). В качестве системы координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ была использована цилиндрическая система координат, где глобальные координаты x, y, z связаны с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соотношениями $x = \alpha_1 \cdot \cos(\alpha_2) \equiv r \cdot \cos(\varphi)$, $y = \alpha_1 \cdot \sin(\alpha_2) \equiv r \cdot \sin(\varphi)$, $z = \alpha_3 \equiv z$.

Коэффициенты Ляме и кривизны $A_1 = 1$; $A_2 = a_1$; $A_3 = 1$, $k_{21} = \frac{1}{a_1}$, остальные $k_{ij} = 0$.

На оболочку, имеющую внешний радиус $R = 1,60$ м, длину $H = 2,24$ м, толщину $h = 0,006$ м, действует нагрузка $P = 1000$ Н, которая равномерно распределена на элементе размером $a_\varphi \times a_z$, где a_φ – длина дуги окружности, соответствующей углу $\Delta\varphi$. Упругие постоянные имеют следующие значения: $E_{zz} = 4,65 \cdot 10^4$ МПа; $E_{\varphi\varphi} = E_{rr} = 0,7 \cdot 10^4$ МПа; $G_{\varphi z} = G_{r\varphi} = G_{zr} = 0,7 \cdot 10^4$ МПа; $\nu_{zy} = 0,25$; $\nu_{r\varphi} = \nu_{zr} = 0$. Нагрузка приложена к элементу с размерами $0,0558 \times 0,24$ м, находящемуся на поверхности кольца, равноудаленного от торцов оболочки. В силу симметрии задачи рассматривалась одна четвертая часть оболочки ($0 \leq z \leq H/2$; $0 \leq \varphi \leq \pi$), которая разбивалась на шесть конечных элементов. Порядок аппроксимации задавался следующими константами в выражении (6): $M = N = L = 6$.

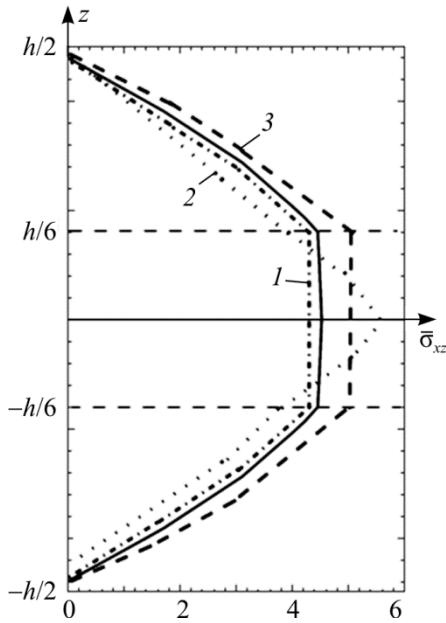


Рис. 4. Безразмерное напряжение $\bar{\sigma}_{xz}$ в сечении $x = 0$: кривая 1 – решение теории упругости [27]; кривая 2 – решение МКЭ [27] и кривая 3 – решение по классической теории слоистых балок [27]

Fig. 4. The dimension stress $\bar{\sigma}_{xz}$ in the cross section $x = 0$. Curve (1) shows the solution based on the theory of elasticity [27], curve (2) shows the solution based on the FEM [27] and curve (3) shows the solution based on the classical theory of layered beams [27]

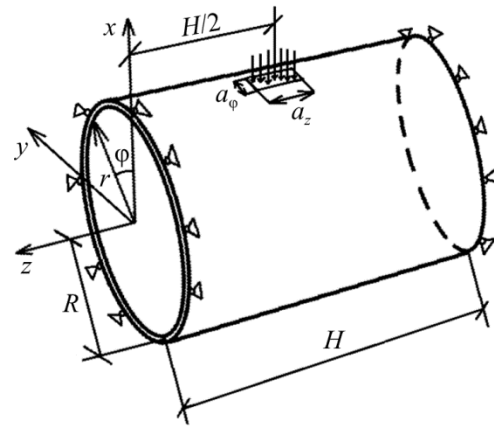


Рис. 5. Однослойная шарнирно-закрепленная (неподвижно) ортотропная оболочка под действием распределенной нагрузки
Fig. 5. Single layer hinged-fixed (motionless) orthotropic shell under distributed loading

В статье [23] имеются результаты расчета данной оболочки. Эти результаты представлены на рис. 6, а и рис. 7 с целью сравнения с результатами, полученными по представленной методике.

На рис. 6, а изображено радиальное перемещение u_r в сечении $z = H/2$ в зависимости от окружной координаты φ : кривая 1 – решение с использованием методики

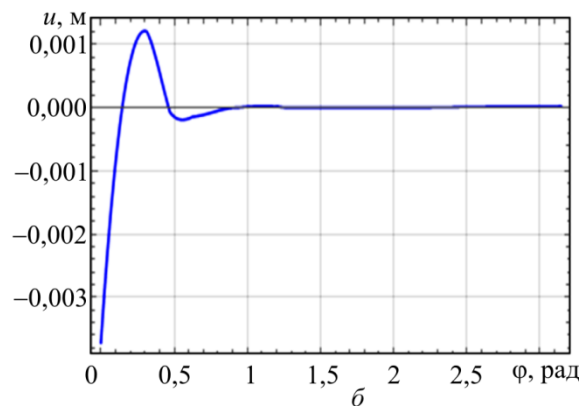
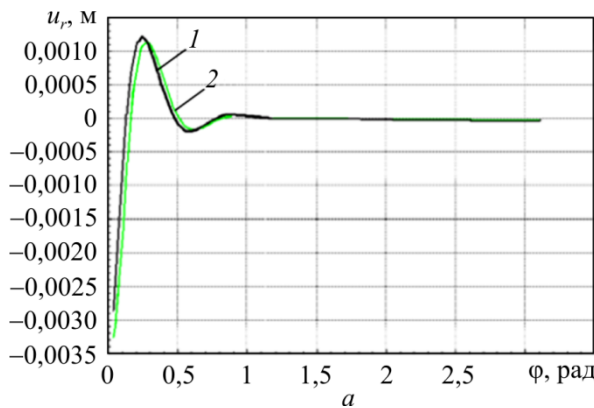


Рис. 6. Радиальное перемещение u_r в сечении $z = H/2$, в зависимости от окружной координаты φ : а – решение с использованием методики автора [23] – кривая 1, решение в пакете ANSYS – кривая 2, б – представленная методика

Fig. 6. Radial movement u_r in the cross section $z = H/2$ depending on the district coordinate φ , (a) is from the paper in [23], the solution with the use of the author's technique is shown in curve (1), the solution using ANSYS package is in curve (2), (b) is the presented technique

автора, в котором решение искалось с помощью рядов Фурье со 130 гармониками, кривая 2 – решение, полученное с использованием пакета ANSYS с сеткой 17900 конечных элементов, полученных на основе теории оболочек.

На рис. 6, б приведено решение, которое получено на основании методики, изложенной в данной статье.

На рис. 8 приведено аналогичное решение, которое получено на основании методики, изложенной в данной статье.

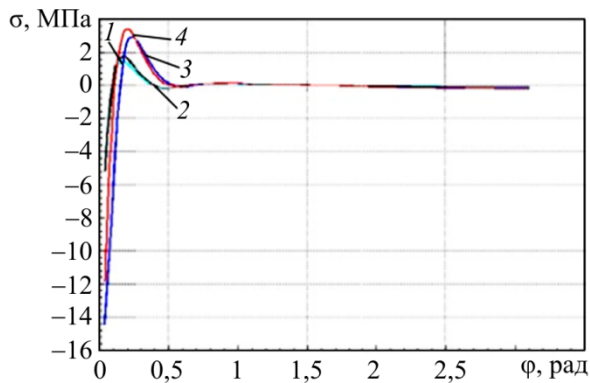


Рис. 7. Распределение продольного σ_{zz} (кривые 1, 3) и окружного $\sigma_{\varphi\varphi}$ (кривые 2, 4) напряжений в сечении $z = H/2$ на внешней поверхности оболочки в зависимости от угловой координаты φ ; кривые 1, 2 – решение с использованием методики автора; 3, 4 – решение с использованием ANSYS

Fig. 7. Distribution of the longitudinal σ_{zz} (curves 1, 3) and district $\sigma_{\varphi\varphi}$ (curves 2, 4) stresses in the cross section $z = H/2$ on the external surface of the shell depending on the angular coordinate φ , curves 1, 2 show the solution using the author's technique, 3, 4 show the solution using ANSYS

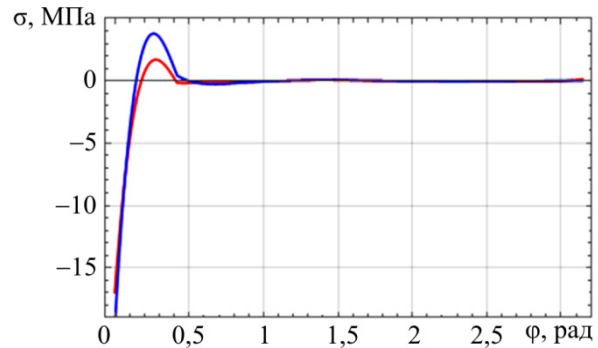


Рис. 8. Распределение продольного σ_{zz} (синий цвет) и окружного $\sigma_{\varphi\varphi}$ (красный цвет) напряжений в сечении $z = H/2$ на внешней поверхности оболочки в зависимости от угловой координаты φ

Fig. 8. Distribution of the longitudinal σ_{zz} (blue color) and district $\sigma_{\varphi\varphi}$ (red color) stresses in the cross section $z = H/2$ on the external surface of the shell depending on the angular coordinate φ

Как видно из рис. 6, 7, 8, характер распределения перемещений и напряжений и их величины даже при расчете на сетке из шести элементов вполне соответствуют данным работы [23], в которой приведено решение для 17900 конечных элементов. Общее число неизвестных в разрешающей системе уравнений по представленной методике составило 2552.

Заключение

Предложен метод определения напряженно-деформированного состояния ортотропных конструкций, основанный на объемном конечном элементе трехмерной теории упругости. Как показывают приведенные результаты представленный метод можно использовать для расчетов тонких ортотропных и многослойных оболочек без использования дополнительных гипотез о распределении напряжений по толщине оболочки. Данный метод может быть эффективно использован для расчета сложных ортотропных конструкций даже без использования густой сетки. Точность расчетов достигается высоким порядком аппроксимаций. Предложенный метод наиболее эффективен, когда сложная трехмерная конструкция может быть разбита на не очень большое количество шестигранников вида V_k . Если же для задания конструкции требуется большое количество подобных элементов или с помощью рассмотренных элементов описать данную конструкцию невозможно, то целесообразно использовать традиционные варианты МКЭ.

Библиографический список

1. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О методе расчета трехмерных конструкций сложной формы // Вестн. Казан. техн. ун-та. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 328–330.
2. Хайруллин Ф.С. Вариационные методы расчета тонкостенных конструкций сложной формы на основе аппроксимирующих функций произвольного порядка с конечными носителями: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та. – 2007. – 267 с.
3. Хайруллин Ф.С. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с вырождающейся областью // Изв. вузов. Авиационная техника. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева, 2009. – № 4. – С. 68–70.
4. Голованов А.П., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций – М.: Физматлит. 2006. – 392 с.
5. Якупов Н.М., Галявиев Ш.Ш., Хисамов Р.З. Метод исследования напряженно-деформированного состояния конструкций сложной геометрии // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2002. – № 1. – С. 27–31.
6. Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К. Трехмерный конечный элемент для расчета оболочек средней толщины // Вестн. Казан. техн. ун-та. – 2013. – Т. 16, № 9. – С. 256–261.
7. Джабраилов А.Ш., Клочков Ю.В., Николаев А.П. Конечно-элементный расчет оболочек вращения с ветвящимся меридианом // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2009. – № 1. – С. 15–19.
8. Giampieri A., Perego U. An interface finite element for the simulation of localized membrane-bending deformation in shells // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 2011. – Vol. 200. – № 29–32. – P. 2378–2396.
9. Серпик И.Н. Эффективный конечно-элементный анализ плит Тимошенко с исключением заклинивания изгибных деформаций // Изв. вузов. Строительство. – 2010. – № 10. – С. 8–17.
10. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. Исследование устойчивости упругих пластин и оболочек при помощи конечно-элементного моделирования // Строит. мех. инж. конструкций и сооруж. – 2011. – № 1. – С. 58–65.
11. Николаев А.П., Бандурин Н.Г. К расчету оболочек методом конечного элемента // Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. – Т. 5. – С. 21–25.
12. Определение напряжений в зонах сочленения пластин с использованием конечных элементов различных конфигураций / А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселева, В.В. Леонтьева // Инженерные системы – 2015: тр. VIII Междунар. науч.-практ. конф. / Рос. ун-т дружбы народов ; под общ. ред. Н.К. Пономарева. – М., 2015. – С. 84–88.
13. Гуреева Н.А. Анализ линейного и нелинейного деформирования тел в криволинейных координатах на основе смешанного метода конечных элементов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Волгоград, 2016. – С. 381.
14. Шайдуров В.В., Шуть С.В. Применение эрмитового биквадратного конечного элемента // Вестн. Сиб. гос. аэрокос. ун-та им. академика М.Ф. Решетнева. – 2014. – № 2 (54). – С. 80–85.
15. Шлычков С.В. Методика расчета корпусных элементов музыкальных инструментов: дис. ... канд. техн. наук – Йошкар-Ола, 2004. – 170 с.
16. Филиппович А.П. Расчет пологих оболочек при наличии концентраторов напряжений с помощью метода конечных элементов // Материалы Восьмой Всесоюз. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии. 20–21 сент. 1984 г. – Одесса, 1984. – С. 161.
17. Hall K.J., Potirniche G.P. A tree-dimensional edge-crack finite – element for fracture mechanics applications // Int. J. Solids and Struct. – 2012. – Vol. 49. – No. 2. – P. 328–337.
18. Composite delimitation modeling using a multi-layered solid element / I. Tawk, P. Navarro, J.-F. Ferrero, J.-J. Barrau, E. Abdullah // Compos. Sci. and Technol. Англ. – 2010. – Vol. 70. – No. 2. – P. 207–214.

19. Trach Y., Burdekin F.M. A three dimensional analysis of fracture mechanics test pieces of different geometries. Pt 1. Stress-state ahead of the crack tip // *Int. J. Pressure Vessels and Pip.* – 2012. – No. 93–94. – P. 42–50.
20. Семенов А.А. Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук. – СПб., 2014.
21. Каменев И.В., Семенов А.А. Обоснование использования метода конструктивной анизотропии при расчете пологих оболочек двойной кривизны, ослабленных вырезами // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2016. – № 2. – С. 54–68.
22. Виноградов Ю.И. Мультипликативный метод решения краевых задач теории оболочек // *Прикладная математика и механика.* – 2013. – Т. 77, № 4. – С. 620–628.
23. Емельянов И.Г., Кузнецов А.В. Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 245–252.
24. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния слоистых прямоугольных в плане пологих ортотропных оболочек в уточненной постановке // *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine.* – 2012. – № 2.
25. Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П. Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки // *МТТ.* – 2007. – № 3. – С. 115–124.
26. Григоренко Я.М. Решение краевых задач о напряженном состоянии упругих тел сложной геометрии и структуры с применением дискретных рядов Фурье // *Прикладная механика.* – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 3–52.
27. Рикардс Р.Б., Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
28. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
29. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
30. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.

References

1. Khairullin F.S., Sakhbiev O.M. O metode rascheta trekhmernykh konstruktssii slozhnoi formy [About the method of calculation of three-dimensional constructions of complex shape]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta*, 2014, vol. 17, no. 23, pp. 328-330.
2. Khairullin F.S. Variatsionnye metody rascheta tonkostennykh konstruktssii slozhnoi formy na osnove approksimiruiushchikh funktsii proizvol'nogo poriadka s konechnymi nositeliami [Variation methods of calculation of thin-walled designs of complex shape on the basis of the approximating functions of any order with final carriers]. *Kazan, Dissertation for the degree of doctor of physico-mathematical Sciences. The Kazan state University*, 2007, 267 p.
3. Khairullin F. S. Modelirovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia tonkikh obolochek s vyrozhdaiushcheisia oblast'iu [Modeling stress strain state of thin shells with a degenerating domain.]. *Kazan, Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev*, 2009 no. 4, pp. 68-70.
4. Golovanov A.P., Tiuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktssii [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled constructions]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2006, 392 p.
5. Iakupov N.M., Galiaviev Sh.Sh., Khisamov R.Z. Metod issledovaniia napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia konstruktssii slozhnoi geometrii [The method of studying the stress-strain state of structures of complex geometry]. *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Serii: Inzhenernye issledovaniia*, 2002, no. 1, pp. 27-31.

6. Berezhnoi D.V., Sagdatullin M.K. Trekhmernyi konechnyi element dlia rascheta obolochek srednei tolshchiny [Three-dimensional finite element for calculating shells of medium thickness]. *Vestnik Kazanskogo Tekhnologicheskogo Universiteta*. 2013, vol. 16. No. 9, pp. 256-261.
7. Dzhabrailov A.Sh., Klochkov Iu.V., Nikolaev A.P. Konechno-elementnyi raschet obolochek vrashcheniia s vetviashchimsia meridianom [Finite-element calculation of shells of revolution with a branching meridian]. *Izvestiia vuzov. Aviatsonnaia tekhnika*, 2009, no. 1, pp. 15-19.
8. Giamperi, A., Perego U. An interface finite element for the simulation of localized membrane-bending deformation in shells. *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng*, 2011, 200, no. 29-32, pp. 2378 – 2396.
9. Serpik I.N. Effektivnyi konechno-elementnyi analiz plit Timoshenko s isklucheniem zaklinivaniia izgibnykh deformatsii [Effective finite element analysis of Timoshenko plates with the exception of jamming of flexural deformations]. *Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo*, 2010, no. 10, pp. 8-17.
10. Manuilov G.A., Kositsyn S.B., Begichev M.M. Issledovanie ustoychivosti uprugikh plastin i obolochek pri pomoshchi konechno-elementnogo modelirovaniia [Investigation of the stability of elastic plates and shells using finite element modeling]. *Stroitel'nye mekhanicheskie inzhenernye konstruksii i sooruzheniia*, 2011, no. 1, pp. 58-65.
11. Nikolaev A.P., Bandurin N.G. K raschetu obolochek metodom konechnogo elementa [To the calculation of shells by the finite element method]. *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii*, 1980, vol. 5, pp. 21-25.
12. Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Leont'eva V.V. Opreделение napriazhenii v zonakh sochleneniia plastin s ispol'zovaniem konechnykh elementov razlichnykh konfiguratsii [Determination of stresses in the joint areas of plates using finite elements of various configurations]. *Rossiiskii Universitet Druzhby Narodov, V sbornike: Trudy VIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Inzhenernye sistemy – 2015»*, 2015, pp. 84-88.
13. Gureeva N.A. Analiz lineinogo i nelineinogo deformirovaniia tel v krivolineinykh koordinatakh na osnove smeshannogo metoda konechnykh elementov [Analysis of linear and nonlinear deformation of bodies in curvilinear coordinates on the basis of a mixed finite element method]. *Volgograd, Dissertatsiia na soiskanie uchenoi stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk*, 2016.
14. Shaidurov V.V., Shut S.V. Primenenie ermitovogo bikvadratnogo konechnogo elementa [The use of a hermitian biquadratic finite element]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M.F. Reshetneva*, 2014, no. 2 (54), pp. 80-85.
15. Shlychkov S.V. Metodika rascheta korpusnykh elementov muzykal'nykh instrumentov [Method for calculating the hull elements of musical instruments]. *Ioshkar-Ola, Dissertatsii na soiskanie uchenoi stepeni kandidata tekhnicheskikh nauk*, 2004.
16. Filippovich A.P. Raschet pologikh obolochek pri nalichii kontsentratorov napriazhenii s pomoshch'iu metoda konechnykh elementov [Calculation of gently sloping shells in the presence of stress concentrators using the finite element method]. *Odessa, V sb.: Vos'maia Vsesoiuznaia konferentsiia po sovremennym problemam differentsial'noi geometrii 20-21 sent. 1984. Tezisy dokladov*, 1984, p. 161
17. Hall K.J., Potirniche G.P. A tree-dimensional edge-crack finite – element for fracture mechanics applications. *Int.J.Solids and Struct.*, 2012, vol. 49, no. 2, pp. 328-337.
18. Tawk I., Navarro P., Ferrero J.F., Barrau J.J., Abdullah E. Composite delimitation modeling using a multi-layered solid element. *Compos.Sci. and Technol.*, 2010, vol. 70, no. 2, pp. 207-214.
19. Trach Y., Burdekin F.M. A tree dimensional analysis of fracture mechanics test pieces of different geometries. Pt 1. Stress-state ahead of the crack tip. *Int.J.Pressure Vessels and Pip.*, 2012, no. 93-94, pp. 42-50.
20. Semenov A.A. Geometricheski nelineinaia matematicheskaia model' rascheta prochnosti i ustoychivosti ortotropnykh obolocheknykh konstruksii [Geometrically nonlinear mathematical model for calculating the strength and stability of orthotropic shell structures]. *Saint Petersburg, Dissertatsiia na soiskanie uchenoi stepeni kandidata tekhnicheskikh nauk*, 2014.
21. Kamenev I.V., Semenov A.A. Rationale of the use of the constructive anisotropy method in the calculation of shallow shells of double curvature, weakened holes. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 2, pp. 54-68.
22. Vinogradov Iu.I. Mul'tiplikativnyi metod resheniia kraevykh zadach teorii obolochek [Multiplicative method for solving boundary value problems in shell theory]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 620-628.
23. Emel'yanov I.G., Kuznetsov A.V. Application of virtual elements for determination of stress state of rotational shell [The use of virtual elements in determining the stress state of shells of revolution]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 245-252.

24. Grigorenko A.Ia., Iaremchenko N.P., Iaremchenko S.N. Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia sloistykh priamougol'nykh v plane pologikh ortotropnykh obolochek v utochnennoi postanovke [Calculation of the stress-strain state of layered rectangular planar orthotropic shells in a refined formulation]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2012, no. 2, pp. 76-82.

25. Nerubailo B.V., Olshanskii V.P. Asimptoticheskii metod rascheta konicheskoi obolochki na deistvie lokal'noi nagruzki. *Mekhanika tverdogo tela*, 2007, no. 3, pp. 115-124.

26. Grigorenko Ia.M. Reshenie kraevykh zadach o napriazhennom sostoianii uprugikh tel slozhnoi geometrii i struktury s primeneniem diskretnykh riadov Fur'e [Solution of boundary value problems on the stressed state of elastic bodies of complex geometry and structure using discrete Fourier series]. *Prikladnaia mekhanika*, 2009, vol. 45, no 5, pp. 3-52.

27. Rikards R.B., Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin [The finite element method in the theory of shells and plates]. *Riga, ZINATNE*, 1988, 284 p.

28. Novozhilov V. V. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Leningrad, Sudpromgiz*, 1958, 371 p.

29. Alfutov N.A., Zinovev P.A., Popov B.G. Raschet mnogosloinykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Calculation of multi-layered plates and shells of composite materials]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1984, 264 p.

30. Abovskii N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. Variatsionnye printsipy teorii uprugosti i teorii obolochek [Variational principles of the theory of elasticity and the theory of shells]. *Moscow, Nauka*, 1978, 288 p.