Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.03

Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of a physically nonlinear problem of longitudinal bending of sandwich plate with transversal-soft core. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017. No. 1. Pp. 39-51. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.03

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.03

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

И.Б. Бадриев[1], М.В. Макаров[1,2], В.Н. Паймушин[1,2]

[1]Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия
[2]Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 14 февраля 2017 г.
Принята: 15 марта 2017 г.
Опубликована: 30 марта 2017 г.

Ключевые слова:
математическое моделирование, трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель, физически нелинейная задача, обобщенная постановка, теорема разрешимости, теорема сходимости, итерационный метод, численный эксперимент.

АННОТАЦИЯ

В работе проведено численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе бесконечно длинной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Предполагается, что в правом торцевом сечении несущие слои жестко защемлены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, в левом торцевом сечении несущие слои шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенной с торцевым сечением заполнителя. Задача рассматривается в одномерной геометрически нелинейной постановке. Предполагается, что зависимость между касательным напряжением и деформацией поперечного сдвига соответствует идеальной упругопластической модели, т.е. модули касательных напряжений в заполнителе не превосходят некоторого предельного значения. Это условие означает недопущение разрушения конструкции и соответствует учету физической нелинейности в заполнителе по модели идеальной упругопластической модели. Обобщенная постановка сформулирована в виде задачи поиска седловой точки некоторого обобщенного функционала Лагранжа. Исследованы свойства функционала. Доказана выпуклость, полунепрерывность снизу и коэрцитивность по основным переменным (перемещениям точек срединных поверхностей несущих слоев), вогнутость, полунепрерывность сверху и антикоэрцитивность по множителям Лагранжа (касательным напряжениям в заполнителе). Это дало возможность при доказательстве теоремы существования и единственности использовать общую теорию существования седловых точек. Для решения задачи предложен двухслойный итерационный метод типа Удзавы, каждый шаг которого сводится к решению линейной задачи

© **Бадриев Ильдар Бурханович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: ildar.badriev1@mail.ru
Макаров Максим Викторович – младший научный сотрудник, e-mail: makarovmaksim@mail.ru
Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: vpajmushin@mail.ru

Ildar B. Badriev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: ildar.badriev1@mail.ru
Maksim V. Makarov – Junior Researcher, e-mail: makarovmaksim@mail.ru
Vitaly N. Paimushin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vpajmushin@mail.ru

теории упругости и нахождению проекции на выпуклое замкнутое множество. Установлена сходимость метода. С помощью разработанного в среде MatLab комплекса программ проведены численные эксперименты для модельной задачи. Проведен анализ полученных результатов. Результаты численных экспериментов соответствуют физической картине.

NUMERICAL INVESTIGATION OF A PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEM OF THE LONGITUDINAL BENDING OF THE SANDWICH PLATE WITH A TRANSVERSAL-SOFT CORE

I.B. Badriev[1], M.V. Makarov[1,2], V.N. Paimushin[1,2]

[1]Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation
[2]Kazan National Research Technical University, Kazan, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 14 February 2017
Accepted: 15 March 2017
Published: 30 March 2017

Keywords:
mathematical simulation, sandwich plate, transversely soft core, physically nonlinear problem, generalized statement, solvability theorem, convergence theorem, iterative method, numerical experiment.

ABSTRACT

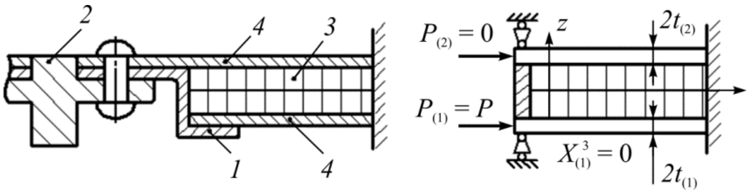
In this paper, a numerical investigation of a physically nonlinear problem of the longitudinal bending of an infinitely long sandwich plate with a transversal-soft core is carried out. We assume that in the right face section the edges of the carrier layers are clamped and there is no adhesive joint of the core with the support element, in the left face section the edges of the carrier layers of the plates are hinge supported on a completely rigid in the transverse direction diaphragms, glued with the end section of the core. The problem is considered in the one-dimensional geometrically nonlinear statement. It is assumed that the relationship between the tangential stress and strain shear corresponds to the ideal elastic-plastic models, i.e., the tangential stress modules in the core do not exceed a certain limiting value. This condition means the prevention of the structural failure and corresponds to an account of the physical nonlinearity in the core material by the ideal elastic-plastic model. The generalized statement is formulated as a problem of finding a saddle point of the Lagrange generalized functional. Lagrange functional properties are investigated. Its convexity, lower semicontinuity and coercivity on the basic variables (displacements of the points of the middle surface of the carrier layers), the concavity, upper semicontinuity and anti-coercivity on the Lagrange multipliers (tangential stresses in the core) are established. It made it possible to use the general theory of the existence of saddle points to prove the existence and uniqueness theorem. To solve the problem the two-layer iterative Uzawa method is proposed, each step of which is reduced to the solving of the linear elasticity problem and finding the projection onto the convex closed set. We have established the convergence of the method. By using the software package developed in Matlab environment, the numerical experiments for a model problem have been carried out. The analysis of the results is made. The numerical results correspond to the physical picture.

Введение

Повышение эффективности современной аэрокосмической техники неразрывно связано с поиском и реализацией новых конструктивно-технологических решений. В значительной степени эти решения связаны с применением композиционных материалов [1–6]. Одним из важных направлений в конструкциях оболочечного типа (корпуса ракет, кораблей, фюзеляжи и крылья самолетов и вертолетов и других изделий) является создание и все более широкое применение многослойных [7–12], трехслойных конструкций, элементы которых состоят из двух несущих обшивок и легкого заполнителя между ними [13–21].

Эффективность трехслойных конструкций связана в первую очередь с их высокой относительной жесткостью и прочностью. Несущие слои, подкрепляемые заполнителем, воспринимают высокие напряжения сжатия. Благодаря большой местной и общей жесткости на изгиб и кручение требуется меньшее количество нервюр, шпангоутов и других опорных элементов. Большая жесткость таких конструкций обеспечивает сохранение аэродинамических характеристик. Благодаря равномерному подкреплению несущих слоев заполнителем и отсутствию концентраторов напряжений увеличивается долговечность таких конструкций. Однако они хуже приспособлены к передаче усилий (особенно сосредоточенных) с одного элемента на другой. В связи с этим при проектировании трехслойных конструкций одним из основных вопросов является рациональный выбор соединений с другими элементами.

В настоящей работе изучается геометрически линейная и физически нелинейная задача о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем (рис. 1, *а*). Термин трансверсально-мягкий заполнитель в механике трехслойных и многослойных конструкций используется давно. В соответствии с классификацией В.В. Болотина [22] к классу трансверсально-мягких относятся заполнители, в которых малыми являются тангенциальные компоненты тензора напряжений в сравнении с другими компонентами. Схема нагружения и закрепления пластины, рассматриваемой в настоящей работе, показана на рис. 1, *б*.



а *б*

Рис. 1. Трехслойная пластина с трансверсально-мягким заполнителем: *1* – подкрепляющая несущие слои диафрагма; *2* – жесткий опорный элемент; *3* – заполнитель; *4* – внешние несущие слои

Fig. 1. Sandwich plate with transversely soft core: *1* – reinforcing the carrying layers diaphragm; *2* – rigid support element; *3* – core; *4* – external carrying layers

Обобщенная постановка сформулирована в виде задачи поиска седловой точки некоторого функционала Лагранжа. Основными переменными при этом являются перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев, множителями Лагранжа – касательные напряжения в заполнителе, постоянные по его толщине. Установлены свойства этого функционала (выпуклость, полунепрерывность снизу и коэрцитивность [23, 24] по основным переменным (перемещениям точек срединных поверхностей несущих слоев), вогнутость, полунепрерывность сверху и анти-коэрцитивность по множителям Лагранжа. На основе указанных свойств с использованием общих результатов [23, 25, 26] доказана теорема существования и единственности. Для решения задачи предложен двухслойный итерационный метод типа Удзавы [27–33], каждый шаг которого сводится к решению линейной задачи теории упругости и нахождению проекции на выпуклое замкнутое множество. Приведена теорема сходимости метода. На основе разработанного комплекса программ в среде MatLab проведены численные эксперименты для модельной задачи. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ полученных результатов.

Ранее изучалась задача о поперечном изгибе трехслойной пластины с заполнителем, являющимся трансверсально-мягким [22], в случае жесткого закрепления несущих слоев при отсутствии диафрагм [34–36]. Отметим, что физически нелинейные задачи теории оболочек изучены в [37–43], в том числе задачи теории мягких сетчатых оболочек – в [44, 45]. Численное решение геометрически нелинейных задач и физически линейных задач об изгибе трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем проводилось в [46–48].

1. Постановка задачи

Пусть a – длина пластины, $2t$, $2t_{(k)}$ – толщины заполнителя и k-го несущего слоя (всюду в дальнейшем предполагаем, что k = 1,2), $X^1_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k-го слоя, $M^1_{(k)}$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k-го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k-го слоя, $T^{11}_{(k)}$, $M^{11}_{(k)}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k-м слое соответственно, $H_{(k)} = t + t_{(k)}$. Пусть q^1 – контактные реактивные усилия взаимодействия (касательные напряжения) в заполнителе, постоянные по его толщине. Предполагаем, что в правом торцевом сечении края несущих слоев жестко защемлены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, на левом торцевом сечении края несущих слоев пластины шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенной с торцевым сечением заполнителя, к срединной поверхности первого несущего слоя с левого торца приложена нагрузка P, так что выполнены граничные условия: $T^{11}_{(1)}(0) = -P$, $T^{11}_{(2)}(0) = 0$, $w^{(k)}(0) = d^2 w^{(k)}(0)/dx^2 = 0$, $k = 1,2$, $dq^1(0)/dx = 0$, $w^{(k)}(a) = dw^{(k)}(a)/dx = 0$, $u^{(k)}(a) = 0$, $k = 1,2$, $q^1(a) = 0$. Рассматривается геометрически линейная постановка: $M^{11}_{(k)} = -D_{(k)}\, d^2 w^{(k)}/d x^2$, $D_{(k)} = B_{(k)} t^2_{(k)}/3$ – изгибная жесткость k-го слоя; $T^{11}_{(k)} = B_{(k)}\, d u^{(k)}/dx$, $B_{(k)} = 2t_{(k)} E^{(k)}/(1 - \nu^{(k)}_{12}\nu^{(k)}_{21})$ – жесткость k-го слоя на растяжение-сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu^{(k)}_{12}$, $\nu^{(k)}_{21}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k-го слоя. Пусть $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединных поверхностей несущих слоев. Следуя [49], рассмотрим функционал $L(U, q^1) = \Pi(U, q^1) - A(U, q^1) - A_q(U, q^1)$, где

$$\Pi(U,q^1) = \frac{1}{2}\int_0^a \Big\{ \sum_{k=1}^{2} \big[B_{(k)} (du^{(k)}/dx)^2 + D_{(k)} (d^2 w^{(k)}/dx^2)^2 \big] + c_1 (q^1)^2 + c_2 (dq^1/dx)^2 + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \Big\} dx -$$

потенциальная энергия деформации, $c_1 = 2t/G_{13}$, $c_2 = t^3/(3E_3)$, $c_3 = E_3/(2t)$, G_{13} и E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $A(U,q^1) = \int_0^a \sum_{k=1}^{2} \big[X^1_{(k)} u^{(k)} + X^3_{(k)} w^{(k)} +$ $+ M^1_{(k)}\, d w^{(k)}/dx \big] dx + P u^{(1)}(0)$ – работа внешних сил и моментов, $A_q(U,q^1) =$ $= \int_0^a \big[(u^{(1)} - u^{(2)}) - \sum_{k=1}^{2} H_{(k)} d w^{(k)}/dx + c_1 q^1 - c_2 d^2 q^1/dx^2 \big] q^1 dx$ – работа неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. Считая, что зависимость между касательным напряжением и деформацией поперечного сдвига соответствует идеальной упругопластической модели, задачу рассмотрим при ограничении $|q^1| \le q^1_*$, где q^1_* – заданное предельное значение напряжения в заполнителе. Это условие означает недопущение разрушения конструкции и соответствует учету физической нелинейности в заполнителе по модели идеальной упругопластической модели.

2. Обобщенная постановка задачи

Представим функционал L в виде $L(U,q^1)=\Phi_0(U)-\Phi_1(U,q^1)-\Phi_2(q^1)$, где

$$\Phi_0(U)=\frac{1}{2}\int_0^a\sum_{k=1}^{2}B_{(k)}(du^{(k)}/dx)^2dx+\frac{1}{2}\int_0^a\sum_{k=1}^{2}D_{(k)}(d^2w^{(k)}/dx^2)^2dx+\frac{c_3}{2}\int_0^a(w^{(2)}-w^{(1)})^2\,dx,$$

$$\Phi_1(U,q^1)=\int_0^a\Big[(u^{(1)}-u^{(2)})-\sum_{k=1}^{2}H_{(k)}\,dw^{(k)}/dx\Big]q^1dx+P\,u^{(1)}(0),$$

$$\Phi_2(q^1)=\frac{1}{2}\int_0^a(c_1(q^1)^2+c_2(d\,q^1/dx)^2)\,dx.$$

Введем следующие пространства Соболева [25, 50]: $V_1=\{\eta\in W_2^{(1)}(0,a):\eta(a)=0\}$, $V_2=\{z\in W_2^{(2)}(0,a):z(0)=0,z(a)=0,dz(a)/dx=0\}$ со скалярными произведениями $(u,\eta)_k=\int_0^a d^k\,u/dx^k\,d^k\,\eta/dx^k dx$, k = 1,2, обозначим $V=V_2\times V_2\times V_1\times V_1$. Введем также в рассмотрение множество $K=\{y\in V_1:|\,y(x)\,|\le q_*^1,\ 0\le x\le a\}$. Под решением задачи понимаем вектор-функцию $(\hat{U},\hat{q}^1)\in V\times K$, являющуюся решением седловой задачи

$$L(\hat{U},\hat{q}^1)=\inf_{U\in V}\sup_{q^1\in K}L(U,q^1). \qquad (1)$$

Напомним, что функционал $F:W\to R^1$ называется коэрцитивным (или антикоэрцитивным) [23, 24], если $F(z)\to+\infty$ (или $F(z)\to-\infty$) при $\|\,z\,\|_W\to+\infty$.

Имеют место следующие результаты.

Лемма 1. Функционалы Φ_0, Φ_2 являются строго выпуклыми, непрерывными и коэрцитивными.

Доказательство. В определении функционала Φ_0 первые два слагаемых являются квадратичными, откуда и следует их строгая выпуклость, непрерывность и коэрцитивнось, причем $\Phi_0(U)\ge\alpha\,\|\,U\,\|_V^2$, α зависит от a, $B_{(k)}$, $D_{(k)}$. Третье слагаемое непрерывно и неотрицательно, его выпуклость следует из очевидного алгебраического неравенства $b^2-d^2\ge 2d(b-d)$. Из вышесказанного и вытекает утверждение леммы относительно функционала Φ_0. Функционал Φ_2 также является квадратичным, а значит, строго выпуклым и непрерывным. Из теоремы вложения Соболева [25, 30] следует неравенство $\Phi_2(y)\ge\beta\,\|\,y\,\|_{V_1}^2$, β зависит от a, c_1, c_2, т.е. для функционала Φ_2 утверждение леммы также справедливо.

Лемма 2. Функционал Φ_1 линеен и непрерывен по обоим аргументам. Оператор $C:V\to V_1$, определяемый по формуле $(CU,q^1)=\Phi_1(U,q^1)$ для всех $U\in V$, $q^1\in V_1$, липшиц-непрерывнен с постоянной $\gamma>0$, зависящей от входных параметров задачи.

Доказательство. Линейность функционала Φ_1 по обоим аргументам непосредственно следует из определения. Снова используя теоремы вложения Соболева [25, 30], нетрудно проверить, что $\left|\Phi_1(U,q^1)\right|\le\gamma\,\|\,U\,\|_V\|\,q^1\,\|_{V_1}$, где постоянная $\gamma>0$ зависит от a, $H_{(k)}$.

Отсюда, во-первых, в силу теоремы Рисса-Фишера следует существование линейного непрерывного оператора *C*, определяемого соотношением $(CU, q^1) = \Phi_1(U, q^1)$ для всех $U \in V$, $q^1 \in V_1$, а во-вторых, выполнение неравенства $|(C(U-Y), q^1)| \le \gamma \| U \|_V \| q^1 \|_{V_1}$, из которого и вытекает липшиц-непрерывность оператора *C* с постоянной γ.

Теорема 1. Задача (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Функционал $L(U, q^1) = \Phi_0(U) - \Phi_1(U, q^1) - \Phi_2(q^1)$ в силу леммы 1 является строго выпуклым и полунепрерывным снизу по *U* и строго вогнутым и полунепрерывным сверху по q^1. Далее, для любого фиксированного $q^1 = \tilde{q}^1$ выполнено неравенство $L(U, \tilde{q}^1) \ge \alpha \| U \|_V^2 - \gamma \| U \|_V \| \tilde{q}^1 \|_{V_1} - \Phi_2(\tilde{q}^1)$, откуда вытекает коэрцитивность *L* по *U*. Наконец, для любого фиксированного $U = \tilde{U}$ имеет место неравенство $L(\tilde{U}, q^1) \le \Phi_0(\tilde{U}) + \gamma \| \tilde{U} \|_V \| q^1 \|_{V_1} - \beta \| q^1 \|_{V_1}^2$, откуда следует анти-коэрцитивность *L* по q^1. Из теоремы вложения Соболева [25, 30] имеем, что множество *K* выпукло и замкнуто. Но тогда, применяя результаты [23, 25, 26], получаем существование единственного решения $(\hat{U}, \hat{q}^1) \in V \times K$ задачи (1).

3. Итерационный метод и численные эксперименты

Для построения приближенного метода решения задачи вычислим производную Гато [23, 26] функционала Φ_0. Имеем

$$
\begin{gathered}
(\Phi_0'(U), Z)_V = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\
+ c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)})\, dx, U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}), Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Справедлива.

Лемма 3. Функционал Φ_0 дифференцируем по Гато, его градиент Φ_0' является сильно монотонным оператором с постоянной $\sigma > 0$, зависящей от входных параметров задачи.

Доказательство. Учитывая (2), имеем

$$
\begin{gathered}
(\Phi_0'(U) - \Phi_0'(Z), U - Z)_V = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} (d(u^{(k)} - \eta^{(k)}) / dx)^2 dx + \\
+ \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} (d^2 (w^{(k)} - z^{(k)}) / dx^2)^2 dx + c_3 \int_0^a ((w^{(2)} - z^{(2)}) - (w^{(1)} - z^{(1)}))^2\, dx .
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Из соотношения (3) и следует утверждение леммы.

Для решения задачи (1) рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть $q_0^1 \in K$ – произвольный элемент. Для $n = 0, 1, \ldots$ найдем U_n как решение линейной задачи теории упругости $\Phi_0'(U_n) + C^* q_n^1 = 0$, $C^* : V_1 \to V$ – сопряженный к C оператор. Полагаем затем $q_{n+1}^1 = P_K(q_n^1 - \tau(q_n^1 - CU_n))$, где P_K – оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество *K*, $\tau > 0$ – итерационный параметр. Таким образом, каждый шаг метода сводится к решению линейной задачи теории упругости и нахождению проекции на выпуклое замкнутое множество *K*.

Теорема 2. Пусть $0 < \tau < 2\sigma / (2\sigma + \gamma)$. Тогда $\{U_n\}_{n=0}^{+\infty}$ сходится сильно к $\hat{U}$ при $n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $(\hat{U}, \hat{q}^1) \in V \times K$ – решение задачи (1). Используя технику, изложенную в [28, 51, 52], свойство жесткой нерастягиваемости [53] оператора проектирования на выпуклое замкнутое множество, получаем, что справедливо неравенство

$$\| q_{n+1}^1 - \hat{q}^1 \|_{V_1}^2 \le \| q_{n+1}^1 - \hat{q}^1 \|_{V_1}^2 + \rho \| U_n - \hat{U} \|_V^2 \le \| q_n^1 - \hat{q}^1 \|_{V_1}^2, \quad \rho = \tau(2(1-\tau)\sigma - \tau\gamma). \qquad (4)$$

По условию теоремы $\rho > 0$. Из (4) следует, что ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\left\{ \| q_n^1 - \hat{q}^1 \|_{V_1}^2 \right\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к некоторому пределу, а значит, $\| U_n - \hat{U} \|_V \to 0$ при $n \to +\infty$.

Предложенные методы решения задачи были реализованы численно. Построена конечно-разностная аппроксимация задачи. Был разработан комплекс программ в среде MatLab, проведены расчеты для модельных задач как с учетом, так и без учета физической нелинейности. Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: a = 20 см, $2t$ = 2 см, $2t_{(k)}$ = 0,05 см, $E^{(k)} = 133 \cdot 10^3$ МПа, $X_{(k)}^1$ = 0, $X_{(k)}^3$ = 0, $M_{(k)}^1$ = 0, $\nu_{12}^{(k)} = \nu_{21}^{(k)}$ = 0,3, k = 1,2, G_{13} = 25 МПа, P = –100 кгс/см, q_*^1 = 1,5 кг/см^2, τ = 0,01, число точек сетки N = 128, начальное приближение $U^{(0)}$ задавалось нулевым. Результаты расчетов приведены на рис. 2–5 (физически линейный случай) и рис. 6–9 (физически нелинейный случай).

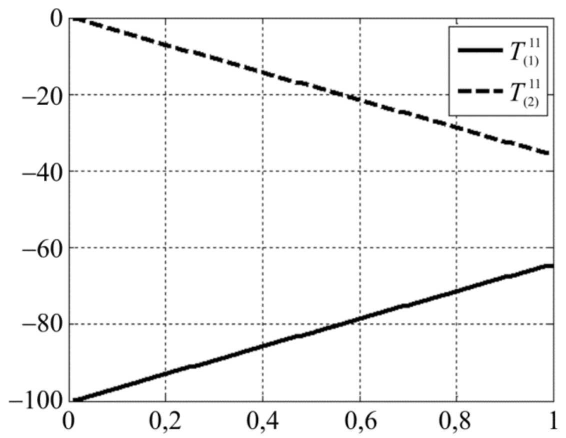


Рис. 2. Мембранные усилия в несущих слоях
Fig. 2. Membrane forces in carrying layers

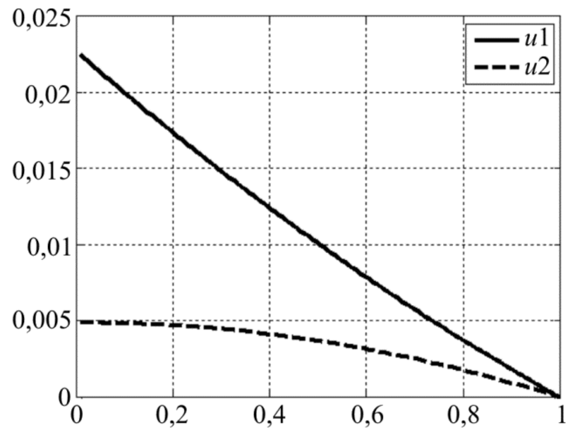


Рис. 3. Осевые перемещения несущих слоев
Fig. 3. Axial displacements in carrying layers

Заметим, что сформулированные для функции q^1 граничные условия $dq^1(0)/dx = 0$, $q^1(a) = 0$ соответствуют наличию в левом торцевом сечении пластины абсолютно жесткой в поперечном направлении диафрагмы, имеющей адгезионное соединение с заполнителем, а в правом торцевом сечении – отсутствию адгезионного соединения. Из рис. 5, 9 видно, что наличие диафрагмы обеспечивает передачу формирующейся в левом торцевом сечении перерезывающей силы (реакции опоры) заполнителю практически без концентрации напряжений (в физически линейном приближении задачи (см. рис. 5), полное отсутствие концентрации касательного напряжения в заполнителе при его достижении предельного значения q_*^1 = 1,5 кг/см^2 (см. рис. 9), а отсутствие в правом торцевом сечении адгезионного соединения приводит к полной передаче перерезывающей силы на внешние слои конструкции.

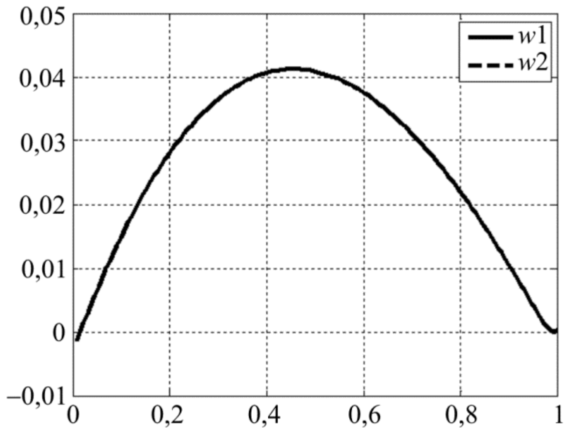


Рис. 4. Прогибы в несущих слоях
Fig. 4. Bending of carrying layers

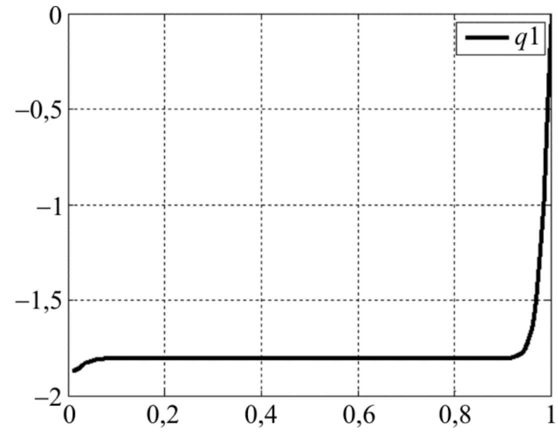


Рис. 5. Касательные напряжения в заполнителе
Fig. 5. Tangential stresses in core

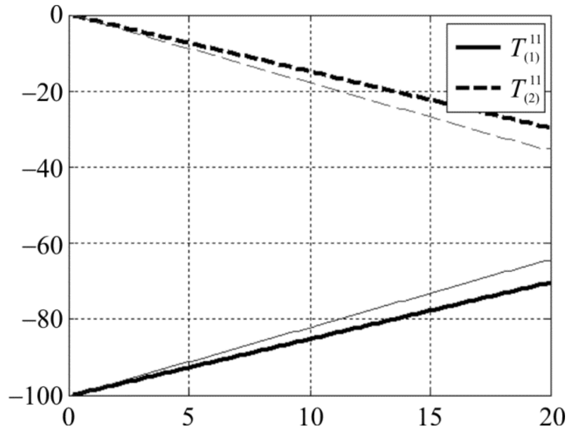


Рис. 6. Мембранные усилия в несущих слоях
Fig. 6. Membrane forces in carrying layers

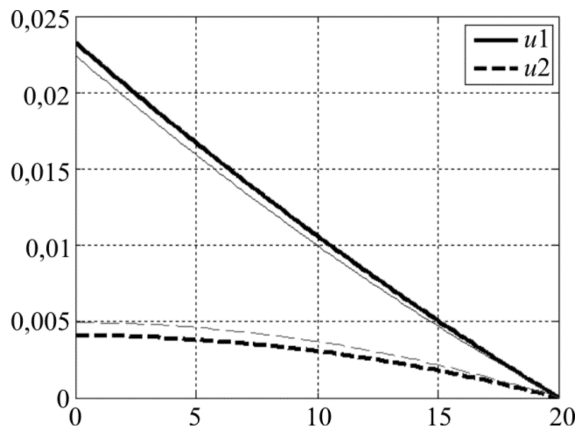


Рис. 7. Осевые перемещения несущих слоев
Fig. 7. Axial displacements in carrying layers

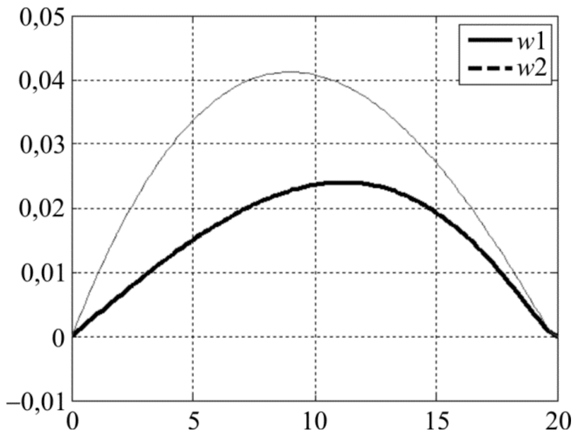


Рис. 8. Прогибы в несущих слоях
Fig. 8. Bending of carrying layers

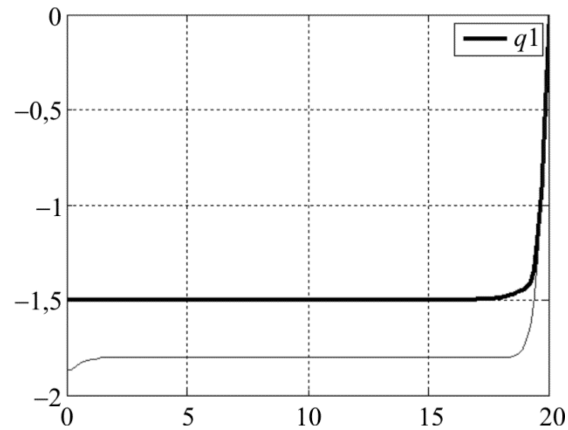


Рис. 9. Касательные напряжения в заполнителе
Fig. 9. Tangential stresses in core

Публикация осуществлена при поддержке РНФ (проект 16-11-10299).

Библиографический список

1. Композиционные материалы: справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин [и др.]; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

2. Öchsner A., Da Silva L.F.M., Altenbach H. Mechanics and Properties of Composed Materials and Structures. – Berlin: Springer-Verlag, 2012. – 195 p.

3. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. – Elsevier, 2013. – 816 p.

4. Advanced Materials: Physics, Mechanics and Applications / Eds. S-H. Chang, I. Parinov, V.Y. Topolov. – Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2014. – XVIII. – 380 p.

5. Gibson R.F. Principles of Composite Material Mechanics. – Taylor&Francis Group, LLC, 2015. – 815 p.

6. Sause M.G.R. In Situ Monitoring of Fiber-Reinforced Composites. Theory, Basic Concepts, Methods, and Applications. – Springer International Publishing, 2016. – 633 p.

7. Reissner E. Finite deflections of sandwich plates // Journal of Aeronautical Science. – 1948. – Vol. 15. – No. 7. – P. 435–440.

8. Крысин В.Н. Слоистые клееные конструкции в самолётостроении. – М.: Машиностроение, 1980. – 232 с.

9. Старовойтов Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Белорус. гос. ун-т. – Гомель, 2002. – 343 с.

10. Frostig Y. Elastica of sandwich panels with a transversely flexible core – A high-order theory approach // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46. – P. 2043–2059. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.007

11. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. – М.: Физматлит, 2010. – 248 с.

12. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория многослойных упругих пластин – М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2014. – 32 с.

13. Прохоров Б.Ф., Кобелев В.Н. Трехслойные конструкции в судостроении. – Л.: Судостроение, 1972. – 344 с.

14. Plantema F.J. Sandwich Construction. – New York: John Wiley, 1966.

15. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение, 1973. – 172 с.

16. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells // Applied Mechanics Reviews. – 1996. – Vol. 49. – No. 13. – P. 155–199.

17. Hohe J., Librescu L. A Nonlinear Sandwich Shell Theory Accounting for Transverse Core Compressibility // PAMM, the Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2003. – Vol. 2. – P. 158–159. DOI: org/10.1002/pamm.200310064

18. Rahmani O., Lashkari M.J. Bending analysis of sandwich plates with composite face sheets and compliance functionally graded syntactic foam core // Journal of Mechanical Engineering Science. – 2015. – Vol. 1. – No. 1. – P. 1–24. DOI: 10.1177/0954406215616417

19. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave // Russian Mathematics. – 2015. – Vol. 59. – No. 3. – P. 66–71. DOI: 10.3103/S1066369X1503007X

20. Liang Y., Izzuddin B.A. Large displacement analysis of sandwich plates and shells with symmetric/asymmetric lamination // Computers & Structures. – 2016. – No. 1. – P. 11–32.

21. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact Statement of Mechanical Problems of Reinforced on a Contour Sandwich Plates with Transversally-Soft Core // Russian Mathematics. – 2017. – Vol. 61. – No. 1. – P. 69–75. DOI: 10.3103/S1066369X1701008X

22. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

23. Ekeland I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. – Amsterdam: North-Holland, 1976. – 402 p.

24. Lions J.L. Quelque problèmes méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. – Paris: Dunod, 1969. – 554 p

25. Gajewskii H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator differential gleichungen. – Berlin: Akademie-Verlag, 1974. – 281 p.

26. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М: Наука, 1972. – 416 с.

27. Bank R.E., Welfert B.D., Yserentant H. A class of iterative methods for solving saddle point problems // Numerische Mathematik. – 1989. – Vol. 56. – No. 7. – P. 645–666. DOI: 10.1007/BF01405194

28. Badriev, I.B., Karchevskii, M.M. Convergence of the iterative Uzawa method for the solution of the stationary problem of seepage theory with a limit gradient // Journal of Soviet Mathematics. – 1989. – Vol. 45. – No. 4. – P. 1302–1309. DOI: 10.1007/bf01097083

29. Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1997. – Vol. 34. – No. 3. – P. 1072–1092.

30. Zulehner W. Analysis of iterative methods for saddle point problems: A unified approach // Mathematics of Computation. – 2002. – Vol. 71. – No. 238. – P. 479–505. DOI: 10.1090/S0025-5718-01-01324-2

31. Gräser C., Kornhuber R. On Preconditioned Uzawa-type Iterations for a Saddle Point Problem with Inequality Constraints // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – 2007. – Vol. 55. – P. 91–102.

32. Lapin A.V. Preconditioned Uzawa-Type Methods for Finite-Dimensional Constrained Saddle Point problems // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2010. – Vol. 31. – No. 4. – P. 309–322. DOI 10.1134/s1995080210040013

33. Muravleva L. Uzawa-like methods for numerical modeling of unsteady viscoplastic Bingham medium flows // Applied Numerical Mathematics. – 2015. – Vol. 93. – P. 140–149. DOI: 10.1016/j.apnum.2014.06.001

34. Solving Physically Nonlinear Equilibrium Problems for Sandwich Plates with a Transversally Soft Core / I.B. Badriev, G.Z. Garipova, M.V. Makarov, V.N. Paimushin, R.F. Khabibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36. – No. 4. – P. 474–481. DOI: 10.1134/S1995080215040216

35. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory / I.B. Badriev, V.V. Banderov, G.Z. Garipova, M.V. Makarov, R.R. Shagidullin // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9. – No. 81–84. – P. 4095–4102.

36. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical Investigation of Physically Nonlinear Problem of Sandwich Plate Bending // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 150. – P. 1050–1055. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.213

37. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Approximate solution of a three-dimensional problem of elastic diffusion in an orthotropic layer // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2014. – Vol. 203. – No. 2. – P. 221–238. DOI: 10.1007/s10958-014-2103-9

38. Berezhnoi D.V., Sachenkov A.A., Sagdatullin M.K. Geometrically nonlinear deformation elastoplastic soil // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8. – No. 125–128. – P. 6341–6348. DOI: 10.12988/ams.2014.48672

39. Berezhnoi D.V., Sachenkov A.A., Sagdatullin M.K. Research of interaction of the deformable designs located in the soil // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8. – No. 141–144. – P. 7107–7115. DOI: 10.12988/ams.2014.49706

40. Investigation of Strain of Solids for Incompressible Materials / A.I. Abdrakhmanova, I.R.Gariffulin, R.L. Davydov, L.U. Sultanov, L.R. Fakhrutdinov // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9. – No. 118. – P. 5907–5914. DOI: 10.12988/ams.2015.57507

41. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical Algorithm for Investigating Large Elasto-Plastic Deformations // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88. – No. 5. – P. 1280–1288. DOI: 10.1007/s10891-015-1310-7

42. Davydov R.L., Sultanov L.U., Kharzhavina V.S. Elastoplastic model of deformation of three-dimensional bodies in terms of large strains // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 11. – No. 6. – P. 5099–5108.

43. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 26. – No. 1. – P. 30–32.

44. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the Equilibrium Problem of a Soft Network Shell in the Presence of Several Point Loads // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Vol. 392. – P. 188–190. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.188

45. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2013. – No. 3. – P. 17–35.

46. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate / I.B. Badriev, V.V. Banderov, M.V. Makarov, V.N. Paimushin // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9. – No. 77–80. – P. 3887–3895.

47. Numerical Solution of the Issue about Geometrically Nonlinear Behavior of Sandwich Plate with Transversal Soft Filler / I.B. Badriev, G.Z. Garipova, M.V. Makarov, V.N. Paymushin // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – Vol. 10. – No. 8. – P. 428–435. DOI: 10.3923/rjasci.2015.428.435

48. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical Simulation of Nonlinear Problem of Three-point Composite Sample Bending Test // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 150. – P. 1056–1062. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.214

49. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mechanics of Composite Materials. – 2000. – Vol. 36. – No. 1. – P. 59–66.

50. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.

51. Glowinski R., Lions J.-L., Tremolieres R. Analyse nume'rique des ine'quations variationnelles. – Paris: Dunod, 1976.

52. Fortin M., Glowinski R. Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems. – Amsterdam: North-Holland, 1983. – 340 p.

53. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1967. – Vol. 73. – No. 4. – P. 591–597.

54. Kinderlehrer D., Stampaccia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. – New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco: Academic Press, 1980.

References

1. Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. et al. Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite Materials: A Guide]. Ed. V.V. Vasiliev, Y.M. Tarnopolsky. *Moscow, Mashinostroenie*, 512 p.

2. Öchsner A., Da Silva L.F.M., Altenbach H. Mechanics and properties of composed materials and structures, *Berlin*, *Springer-Verlag*, 2012, 195 p.

3. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. *Elsevier*, 2013, 816 p.

4. Chang S-H., Parinov I., Topolov V.Y. (Eds.) Advanced materials: physics, mechanics and applications, *Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London*, 2014, XVIII, 380 p.

5. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics. *Taylor&Francis Group, LLC*, 2015, 815 p.

6. Sause M.G.R. In situ monitoring of fiber-reinforced composites. Theory, basic concepts, methods, and applications. *Springer International Publishing*, 2016, 633 p.

7. Reissner E. Finite deflections of sandwich plates. *Journal of Aeronautical Science*, 1948, vol. 15, no. 7, pp. 435-440.

8. Krysin V.N. Sloistye kleenye konstruktsii v samoletostroenii [Layered laminated structure in aircraft]. *Moscow: Mashinostroenie*, 1980, 232 p.

9. Starovoytov E.I. Viazkouprugoplasticheskie sloistye plastiny i obolochki [Viscoelasticoplastic layered plates and shells]. *Gomel Belarusian State University*, 2002, 343 p.

10. Frostig Y. Elastica of sandwich panels with a transversely flexible core – A high-order theory approach. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46, pp. 2043-2059. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.007

11. Sukhinin S.N. Prikladnye zadachi ustoichivosti mnogosloinykh kompozitnykh obolochek [Applied problems of stability of multilayered composite shells]. *Moscow, Fizmatlit*, 2010, 248 p.

12. Dimitrienko Yu.I., Gubarev E.A. Yakovlev D.O. Asimptoticheskaia teoriia mnogosloinykh uprugikh plastin [The asymptotic theory of multilayer elastic plates]. *Moscow: Publishing Bauman MSTU – Izdatel'stvo MGTU im.N.E.Baumana*, 2014, 32 p.

13. Prokhorov B.F., Kobelev V.N. Trekhsloinye konstruktsii v sudostroenii [Three-layer construction in shipbuilding]. *Leningrad, Shipbuilding – Sudostroenie*, 1972, 344 p.

14. Plantema F.J. Sandwich Construction, *New York, John Wiley*, 1966.

15. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P Ustojchivost i kolebaniya trekhslojnyh obolochek [Stability and Vibrations of Sandwich Shells]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1973, 172 p.

16. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, vol. 49, no. 13, pp. 155-199.

17. Hohe J., Librescu L.A Nonlinear sandwich shell theory accounting for transverse core compressibility. *PAMM, the Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 2, pp. 158-159. DOI: org/10.1002/pamm.200310064

18. Rahmani O., Lashkari M.J. Bending analysis of sandwich plates with composite face sheets and compliance functionally graded syntactic foam core. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2015, vol. 1, no. 1. pp. 1-24. DOI: 10.1177/0954406215616417

19. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave. *Russian Mathematics,* 2015, vol. 59, no. 3, pp. 66-71. DOI: 10.3103/S1066369X1503007X

20. Liang Y., Izzuddin B.A. Large displacement analysis of sandwich plates and shells with symmetric/asymmetric lamination. *Computers & Structures*, 2016, no. 1, pp. 11-32.

21. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core. *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 69-75. DOI: 10.3103/S1066369X1701008X

22. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayered structures. *Moscow, Mashinostroenie*, 1980, 375 p.

23. Ekeland I., Temam R. Convex analysis and variational problems. *Amsterdam, North-Holland*, 1976, 402 p.

24. Lions J.L. Quelque problèmes méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. *Paris, Dunod*, 1969, 554 p

25. Gajewskii H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator differential gleichungen. Berlin, *Akademie-Verlag*, 1974, 281 p.

26. Vainberg M.M. Variatsionnyi metod i metod monotonnykh operatorov [Variational method and method of monotone operators]. *Moscow, Nauka*, 1972, 416 p.

27. Bank R.E., Welfert B.D., Yserentant H. A class of iterative methods for solving saddle point problems. *Numerische Mathematik*, 1989, vol. 56, no. 7, pp. 645-666. DOI: 10.1007/BF01405194

28. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of the iterative Uzawa method for the solution of the stationary problem of seepage theory with a limit gradient. *Journal of Soviet Mathematics*, 1989, vol. 45, no. 4, pp. 1302-1309. DOI: 10.1007/bf01097083

29. Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1997, vol. 34, no. 3, pp. 1072-1092.

30. Zulehner W. Analysis of iterative methods for saddle point problems: A unified approach. *Mathematics of Computation*, 2002, vol. 71, no. 238, pp. 479-505. DOI: 10.1090/S0025-5718-01-01324-2

31. Gräser C., Kornhuber R. On Preconditioned Uzawa-type Iterations for a Saddle Point Problem with Inequality Constraints. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering,* 2007, vol. 55, pp. 91-102.

32. Lapin A.V. Preconditioned Uzawa-Type Methods for Finite-Dimensional Constrained Saddle Point problems. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2010, vol. 31, no. 4, pp. 309-322. DOI 10.1134/s1995080210040013

33. Muravleva L. Uzawa-like methods for numerical modeling of unsteady viscoplastic Bingham medium flows. *Applied Numerical Mathematics*, 2015, vol. 93, July 2015, pp. 140-149. DOI: 10.1016/j.apnum.2014.06.001

34. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving Physically Nonlinear Equilibrium Problems for Sandwich Plates with a Transversally Soft Core. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 474-481. DOI: 10.1134/S1995080215040216

35. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 81-84, pp. 4095-4102.

36. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical Investigation of Physically Nonlinear Problem of Sandwich Plate Bending. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 150, pp. 1050-1055. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.213

37. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Approximate solution of a three- dimensional problem of elastic diffusion in an orthotropic layer. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2014, vol. 203, no. 2, pp. 221-238. DOI: 10.1007/s10958-014-2103-9

38. Berezhnoi D.V., Sachenkov A.A., Sagdatullin M.K. Geometrically nonlinear deformation elastoplastic soil. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 8, no. 125-128, pp. 6341-6348. DOI: 10.12988/ams.2014.48672.

39. Berezhnoi D.V., Sachenkov A.A., Sagdatullin M.K. Research of interaction of the deformable designs located in the soil. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 8, no. 141-144, pp. 7107-7115. DOI: 10.12988/ams.2014.49706.

40. Abdrakhmanova A.I., Gariffulin I.R., Davydov R.L., Sultanov L.U., Fakhrutdinov L.R. Investigation of Strain of Solids for Incompressible Materials. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 118, pp. 5907-5914. DOI: 10.12988/ams.2015.57507

41. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical Algorithm for Investigating Large Elasto-Plastic Deformations. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, no. 5, pp. 1280-1288. DOI: 10.1007/s10891-015-1310-7

42. Davydov R.L., Sultanov L.U., Kharzhavina V.S. Elastoplastic model of deformation of three-dimensional bodies in terms of large strains. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2015, vol. 11, no. 6, pp. 5099-5108.

43. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids. *Materials Physics and Mechanics*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 30-32.

44. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the Equilibrium Problem of a Soft Network Shell in the Presence of Several Point Loads. *Applied Mechanics and Materials*, 2013, vol. 392, pp. 188-190. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.188

45. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no.3, pp. 17-35.

46. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, No. 77-80, pp. 3887-3895.

47. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paymushin V.N. Numerical Solution of the Issue about Geometrically Nonlinear Behavior of Sandwich Plate with Transversal Soft Filler. *Research Journal of Applied Sciences*, 2015, vol. 10, no. 8, pp. 428-435. DOI: 10.3923/rjasci.2015.428.435

48. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical Simulation of Nonlinear Problem of Three-point Composite Sample Bending Test. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 150, pp. 1056-1062. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.214

49. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms. *Mechanics of Composite Materials*, 2000, vol. 36, no. 1, pp. 59-66.

50. Adams R.A. Sobolev Spaces. *New York, San Francisco, London: Academic Press*, 1975, 286 p.

51. Glowinski R., Lions J.-L., Tremolieres R. Analyse nume'rique des ine'quations variationnelles. *Paris: Dunod*, 1976.

52. Fortin M., Glowinski R. Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems. *Amsterdam: North-Holland*, 1983, 340 p.

53. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, vol. 73, no. 4, pp. 591-597.

54. Kinderlehrer D., Stampaccia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. *New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco: Academic Press*, 1980.