

Бакусов П.А., Семенов А.А. Анализ устойчивости вычислительного алгоритма к изменению геометрических параметров цилиндрических оболочечных конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. С. 12–21. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.02

Bakusov P.A., Semenov A.A. Analysis of the stability of the computational algorithm to a change in the geometric parameters of cylindrical shell structures. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 1, pp. 12-21. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.02



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.02

УДК 539.3

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА К ИЗМЕНЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

П.А. Бакусов, А.А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 июня 2020 г.
Принята: 30 декабря 2020 г.
Опубликована: 15 апреля 2021 г.

Ключевые слова:

оболочечные конструкции, цилиндрические оболочки, модель Тимошенко, устойчивость численных методов, устойчивость строительных конструкций, вычислительный эксперимент.

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена проверке устойчивости вычислительного алгоритма к изменению геометрических параметров цилиндрических оболочечных конструкций. Изменение геометрии подразумевает под собой замену одного вида цилиндрической поверхности (эллиптической, гиперболической, параболической) на другую таким образом, чтобы количественное изменение (разность высотных отметок) на рассматриваемой области было минимально. Данная проверка, с одной стороны, позволяет оценить корректность самого алгоритма (что актуально для алгоритмов, использующих как численные методы, так и символьные вычисления), а с другой – оценить возможность упрощения вычислений посредством аппроксимации сложной поверхности более простой (как в понимании самого задания поверхности, так и выражении ее основных характеристик: коэффициентов Ляме и главных кривизн).

В работе использована математическая модель деформирования оболочечных конструкций, основанная на гипотезах Тимошенко (Миндлина – Рейснера). Модель учитывает поперечные сдвиги, геометрическую нелинейность и ортотропию материала и записана в форме функционала полной потенциальной энергии деформации. Расчетный алгоритм строится на основе метода Рунге для сведения вариационной задачи о минимуме функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений и на методе продолжения решения по наилучшему параметру для ее решения. Все вычисления осуществлялись в безразмерных параметрах.

Проведены расчеты цилиндрических панелей трех типов, получены значения критических нагрузок потери устойчивости, поля прогибов в докритический и закритический момент. Показано, что для рассматриваемого класса задач предложенная ранее математическая модель и вычислительный алгоритм устойчивы к изменению геометрии конструкции.

© ПНИПУ

© Бакусов Павел Анатольевич – асп., e-mail: bakusovpavel@gmail.com, ID: 0000-0003-1215-1183

Семенов Алексей Александрович – к.т.н., доц., зав. каф., e-mail: sw.semenov@gmail.com, ID: 0000-0001-9490-7364

Pavel A. Bakusov – PhD student, e-mail: bakusovpavel@gmail.com, ID: 0000-0003-1215-1183

Alexey A. Semenov – CSc in Technical Sciences., Associate Professor, Head of Department,

e-mail: sw.semenov@gmail.com, ID: 0000-0001-9490-7364



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ANALYSIS OF THE STABILITY OF THE COMPUTATIONAL ALGORITHM TO A CHANGE IN THE GEOMETRIC PARAMETERS OF CYLINDRICAL SHELL STRUCTURES

P.A. Bakusov, A.A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 June 2020
Accepted: 30 December 2020
Published: 15 April 2021

Keywords:

shell structures, cylindrical shells, Tymoshenko's model, stability of numerical methods, buckling of building structures, numerical experiment.

ABSTRACT

This study deals with testing sustainability of a computational algorithm to a change in geometric parameters of cylindrical shell structures. A change in geometry implies the replacement of one type of a cylindrical shell (elliptic, hyperbolic, parabolic) with another so that the quantitative change (the difference in elevations) in the area under consideration is minimal. On the one hand, this test allows to assessing the correctness of the algorithm itself and is relevant for algorithms that use both numerical methods and symbolic calculations. On the other hand, it allows to evaluating the possibility of simplifying calculations by approximating a complex surface with a simpler one both in understanding the surface definition itself and in expressing its basic characteristics such as Lamé coefficients and main curvatures.

A mathematical model of deformations of shell structures based on the hypotheses of Timoshenko (Mindlin – Reissner) are used in the work. The model takes into account transverse shifts, geometric nonlinearity and orthotropy of the material, and its written in the form of a functional of the total potential strain energy.

The calculation algorithm is built on the basis of the Ritz method to reduce the variational problem of the minimum functional to the solution of a system of nonlinear algebraic equations, and on the method of continuing the solution with the best parameter for its solution. All calculations were carried out in dimensionless parameters.

Three types of cylindrical panels are calculated, and critical loads of buckling and deflection fields at subcritical and supercritical moments are obtained. It is shown that for the considered class of problems the previously proposed mathematical model and computational algorithm are resistant to changes in the geometry of the structure.

© PNRPU

Введение

Область применения тонкостенных оболочечных конструкций достаточно широка – они используются в авиастроении [1, 2], судостроении, гражданском и промышленном строительстве [3–5], а также при решении других инженерных задач. При эксплуатации такие конструкции подвергаются различным воздействиям, что может привести к потере устойчивости, колебаниям или вызвать необратимые изменения в материале. В связи с этим возникает необходимость проведения вычислительного эксперимента по исследованию процесса деформирования тонкостенных оболочечных конструкций.

В ряде работ [6–15] показано, что для рассматриваемого класса задач наиболее оправданным является использование математической модели, основанной на гипотезах Тимошенко (Миндлина – Рейснера). Данная модель позволяет учесть поперечные сдвиги и инерцию вращения (для задач динамики), что особенно важно при расчете конструкций, подкрепленных ребрами жесткости. Также модель должна учитывать ортотропию материала и геометрическую нелинейность. Но даже эта модель, как и многие другие, содержит ряд допущений, корректность и погрешность которых следует проверять.

Использование сложных математических моделей требует применения численных методов, точность

и особенности применения которых также могут оказывать влияние на получаемые результаты [16, 17].

В связи с этим при оценке корректности математической модели и вычислительного алгоритма достаточно важно проводить оценку их устойчивости к тому или иному входному параметру, особенно если алгоритм использует численные методы. Под устойчивостью здесь понимается малое изменение решения при малом изменении того или иного входного параметра или их совокупности.

В качестве входного параметра может рассматриваться не просто переменная, а некоторая характеристика, выраженная в виде математической формулы. Тогда малое изменение этой характеристики может представлять собой ее аппроксимацию. В этом случае происходит замена одной формулы на другую, более простую, и при этом мало отличающуюся от первой на рассматриваемой области. Таким образом, производится качественное изменение (обе формулы не могут быть получены друг из друга простейшими арифметическими операциями или заменой переменных) при малом изменении количественного выражения (результаты использования формул мало отличаются друг от друга на рассматриваемой области). В качестве примера такой характеристики можно назвать геометрию поверхности. Например, в работе [18], на которую ссылается Пособие по проектированию железобетонных пространственных

конструкций покрытий и перекрытий¹ (относящиеся к СП 52-117-2008²), вместо пологой поверхности (считающейся сектором сферической) рассматривается сектор кругового параболоида, т.е. происходит замена (аппроксимация) более сложного выражения геометрии более простым.

Данная работа направлена на оценку устойчивости вычислительного алгоритма по расчету значений критических нагрузок, соответствующих потери локальной и глобальной устойчивости оболочечных конструкций к геометрии самих оболочек (здесь под потерей устойчивости понимается «прохлопывание» конструкции, когда малому изменению нагрузки соответствует большое изменение ее прогиба).

Для оценки влияния вида геометрии на значения критических нагрузок и оценки устойчивости соотношений модели к виду геометрии конструкции предлагается провести следующее исследование. В качестве малого измерения входного параметра рассмотрим три вида цилиндров (цилиндрических поверхностей): эллиптический, гиперболический и параболический. Этот выбор был сделан не случайно. Во-первых, для данных поверхностей достаточно легко подобрать такие коэффициенты, что качественно они будут отличаться мало (в нашем случае наибольшее отклонение сечений составило $1,92 \cdot 10^{-2}$ мм). Во-вторых, специфика геометрии (нулевая гауссова кривизна) позволяет несколько упростить и ускорить расчет. В-третьих, цилиндрические поверхности являются одними из самых распространенных, из-за чего исследование их поведения на данный момент крайне актуально [19–29].

Представленные в статье материалы не претендуют на фундаментальность в отношении механики оболочек, однако затрагивают важные вопросы устойчивости расчетного алгоритма, что может иметь значение в вычислительной механике рассматриваемых конструкций.

1. Теория и методы

1.1. Исследуемые поверхности

Для предотвращения возможной путаницы в обозначениях приведем краткие выкладки по построению рассматриваемых поверхностей.

Пусть задана прямоугольная система координат $Oxyz$, положительные направления осей которой описываются левой тройкой векторов (ось z направлена вверх). Тогда цилиндры будут представлять собой параллельный перенос кривой, заданной в плоскости yoz вдоль оси Ox .

¹ Пособие по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий (к СП 52-117-2008). М.: ОАО «НИЦ «Строительство», 2010. 159 с.

² СП 52-117-2008*. Железобетонные пространственные конструкции покрытий и перекрытий. Методы расчета и конструирование. М.: ОАО «НИЦ «Строительство», 2010. 143 с.

Первой поверхностью рассмотрим эллиптический цилиндр, поперечное сечение которого представлено на рис. 1, а. Эта поверхность может быть задана в явном виде:

$$z = \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{R_1^2}\right) R_2^2},$$

где R_1 и R_2 – радиусы (или проекции) вдоль осей Oy и Oz соответственно.

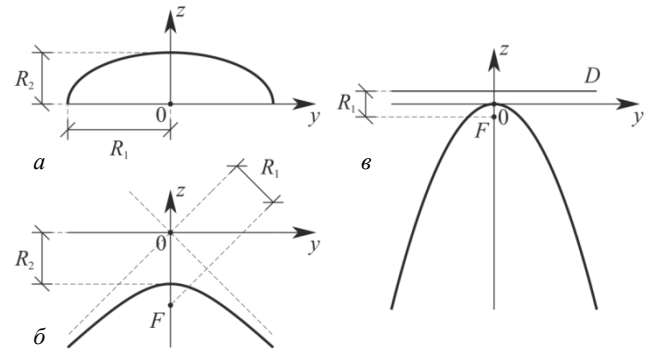


Рис. 1. Схемы сечений цилиндров: а – эллиптического; б – гиперболического; в – параболического

Fig. 1. Schemes of cross-section for some types of cylinders: а – elliptic; б – hyperbolic; в – parabolic

Для расчета оболочечных конструкций необходимо знать коэффициенты Ляме и главные кривизны. Для их поиска необходимо обратиться к теории дифференциальной геометрии (например, [30]).

Для эллиптического цилиндра коэффициенты Ляме

$$A = 1, \quad B = \sqrt{\frac{R_1^4 + (R_2^2 - R_1^2)y^2}{(R_1^2 - y^2)R_1^2}},$$

а главные кривизны

$$\kappa_x = 0, \quad \kappa_y = \frac{R_1^4 R_2}{(R_1^4 + (R_2^2 - R_1^2)y^2)^{3/2}}.$$

Второй рассматриваемой поверхностью является гиперболический цилиндр, поперечное сечение которого изображено на рис. 1, б. Явная форма задания этой поверхности имеет вид

$$z = -\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{R_1^2}\right) R_2^2}.$$

Здесь R_1 – это расстояние от фокуса гиперболоида F до асимптоты, а R_2 – расстояние от вершины гиперболоида до оси Oy .

Коэффициенты Ляме и главные кривизны гиперболического цилиндра:

$$A = 1, \quad B = \sqrt{\frac{R_1^4 + (R_2^2 + R_1^2)y^2}{(R_1^2 + y^2)R_1^2}};$$

$$\kappa_x = 0, \quad \kappa_y = \frac{R_1^4 R_2}{(R_1^4 + (R_2^2 + R_1^2)y^2)^{3/2}}.$$

Третья рассматриваемая поверхность – параболический цилиндр. Его поперечное сечение приведено на рис. 1, в.

В явном виде данная поверхность может быть представлена как

$$z = -\frac{1}{2R_1}y^2,$$

где R_1 – это расстояние от фокуса параболы F до директрисы D , или двойное расстояние от фокуса до оси Oy .

Коэффициенты Ляме и главные кривизны этой поверхности имеют следующее выражение:

$$A = 1, \quad B = \sqrt{\frac{y^2}{R_1^2} + 1};$$

$$\kappa_x = 0, \quad \kappa_y = \frac{1}{R_1 \left(\frac{y^2}{R_1^2} + 1 \right)^{3/2}}.$$

1.2. Математическая модель

Будем рассматривать классическую теорию оболочек нулевой гауссовой кривизны, учитывающую поперечные сдвиги. Срединная поверхность оболочки принимается за координатную. Используемой моделью является модель деформирования оболочки типа Тимошенко (Миндлина – Рейснера), тогда перемещения в слое на расстоянии z (толщина оболочки h) от срединной поверхности составят:

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W,$$

где $U = U(x, y)$, $V = V(x, y)$, $W = W(x, y)$ представляют собой неизвестные функции перемещений вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно, а $\Psi_x = \Psi_x(x, y)$, $\Psi_y = \Psi_y(x, y)$ – неизвестные функции углов поворота нормали в плоскостях xOz и yOz .

Математическая модель деформирования оболочечной конструкции может строиться или на основе уравнений равновесия, или на основе функционала полной потенциальной энергии деформации. Будем рассматривать модель на основе функционала, поскольку в ней порядок производных в два раза ниже, чем в уравнениях равновесия, что упрощает вычислительный процесс.

При учете геометрической нелинейности и поперечных сдвигов геометрические соотношения (связь компонент деформаций и перемещений) в срединной поверхности оболочки будут иметь вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - \kappa_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - \kappa_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2,$$

$$\gamma_{xz} = k f(z) [\Psi_x - \theta_1], \quad \gamma_{yz} = k f(z) [\Psi_y - \theta_2],$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + \kappa_x U \right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + \kappa_y V \right),$$

а функции изменения кривизн и кручения

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x,$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x \right),$$

где ε_x , ε_y – деформации удлинения вдоль осей Ox , Oy срединной поверхности; γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} – деформации сдвига в плоскостях xOy , xOz , yOz соответственно; $f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} по толщине обшивки; $k = 5/6$.

Для слоя обшивки, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности, деформации составят:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}.$$

Физические соотношения (связь напряжений и деформаций) для ортотропного материала при линейно-упругом деформировании запишутся следующим образом [31]:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right],$$

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right],$$

$$\tau_{xy} = G_{12} [\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}],$$

$$\tau_{xz} = G_{13} \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G_{23} \gamma_{yz}.$$

Здесь E_1 , E_2 , μ_{12} , μ_{21} , G_{12} , G_{13} , G_{23} – механические характеристики материала. В случае изотропного материала необходимо принять $E_1 = E_2 = E$, $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$.

Выражения для усилий и моментов находятся путем интегрирования напряжений по переменной z в пределах от $-h/2$ до $h/2$.

Площадь поперечного сечения, приходящаяся на единицу длины сечения, будет одинаковой в направлении осей Ox и Oy ,

$$F = \int_{-h/2}^{h/2} dz = h,$$

статический момент сечения, приходящийся на единицу длины сечения,

$$S = \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0,$$

момент инерции сечения, приходящийся на единицу длины сечения,

$$J = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}.$$

Поэтому составляющие усилий и моментов будут иметь вид [31]

$$N_x = G_1 h (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \quad N_y = G_2 h (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x);$$

$$M_x = G_1 \frac{h^3}{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \quad M_y = G_2 \frac{h^3}{12} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1);$$

$$N_{xy} = G_{12} h \gamma_{xy}, \quad M_{xy} = G_{12} 2 \frac{h^3}{12} \chi_{12};$$

$$Q_x = k G_{13} h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = k G_{23} h (\Psi_y - \theta_2),$$

где

$$G_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}, \quad G_2 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}.$$

Функционал полной потенциальной энергии деформации оболочечной конструкции можно представить в виде [33]

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2qW \right] AB dx dy. \quad (1)$$

1.3. Алгоритм расчета

В данной работе для исследования оболочечных конструкций предлагается использовать алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру [32]. Верификация данного алгоритма для рассматриваемого класса задач описывалась ранее в работе [33].

Согласно этому алгоритму, к функционалу применяется метод Ритца для сведения вариационной задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для этого искомые функции представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} U &= U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l, \\ V &= V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l, \\ W &= W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l, \\ \Psi_x &= \Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} P S_{kl} X_4^k Y_4^l, \\ \Psi_y &= \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} P N_{kl} X_5^k Y_5^l, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $U_{kl} - P N_{kl}$ – искомые коэффициенты разложения. Подставив функции (2) в функционал (1), находим производные по неизвестным числовым параметрам $U_{kl} - P N_{kl}$. Таким образом, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений.

Все расчеты проводятся в безразмерных параметрах, однако все рассуждения приводятся в размерном виде, чтобы не загромождать изложение. Подробно используемые безразмерные параметры и их обоснование приведены в работе [34].

2. Расчеты

Для проведения вычислительного эксперимента необходимо определить параметры цилиндров. Поскольку площадь поверхности цилиндра может быть выражена как произведение длины дуги, полученной поперечным сечением этого цилиндра плоскостью, на длину цилиндра a , далее рассмотрим только сами сечения.

Зафиксируем два параметра: длину проекции сечения на ось Oy (ширина покрытия b) и на ось Oz (высота покрытия d) (рис. 2). Пусть первая $b = 6$ м, а вторая $d = 1$ м. Таким образом, было зафиксировано три точки: две у основания покрытия и одна на его высоте.

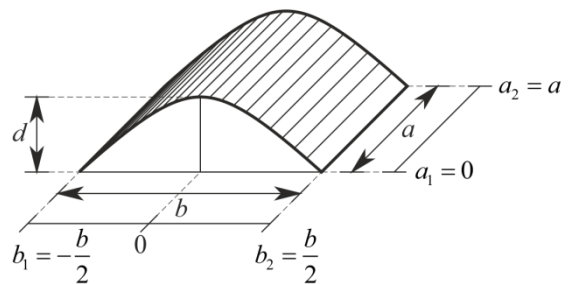


Рис. 2. Схема размеров цилиндров

Fig. 2. Scheme of sizes of cylinders

Для начала определим значение параметра R_1 у параболического цилиндра. Как известно, через три точки, не лежащих на одной прямой, можно единственным образом задать параболу. Из этого получаем, что параметр $R_1 = 9/2$. Используя формулу для расчета длины дуги [30, с. 53]

Таблица 1

Геометрические характеристики оболочек

Table 1

Geometric characteristics of shells

| Характеристика | Тип цилиндра | | |
|----------------------------|---|---|--|
| | эллиптический | гиперболический | параболический |
| A | 1 | 1 | 1 |
| B | $\frac{\sqrt{R_1^4 + (R_2 - R_1^2)y^2}}{\sqrt{(R_1^2 - y^2)R_1^2}}$ | $\frac{\sqrt{R_1^4 + (R_2^2 + R_1^2)y^2}}{\sqrt{(R_1^2 + y^2)R_1^2}}$ | $\sqrt{\frac{y^2}{R_1^2} + 1}$ |
| $\kappa_x, \text{ м}^{-1}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\kappa_y, \text{ м}^{-1}$ | $\frac{R_1^4 R_2}{(R_1^4 + (R_2 - R_1^2)y^2)^{3/2}}$ | $\frac{R_1^4 R_2}{(R_1^4 + (R_2^2 + R_1^2)y^2)^{3/2}}$ | $\frac{1}{R_1 \left(\frac{y^2}{R_1^2} + 1\right)^{3/2}}$ |
| $R_1, \text{ м}$ | 38 883/161 | 51 336/185 | 9/2 |
| $R_2, \text{ м}$ | 12 961 | 17 112 | – |
| $h, \text{ м}$ | 0,03 | | |
| $a, \text{ м}$ | 6 | | |
| $b, \text{ м}$ | 6 | | |
| $a_1, \text{ м}$ | 0 | | |
| $a_2, \text{ м}$ | 6 | | |
| $b_1, \text{ м}$ | –3 | | |
| $b_2, \text{ м}$ | 3 | | |

$$l = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy,$$

находим

$$l = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{y^2}{R_1^2}} dy = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{4}{81} y^2} dy \approx 6,41870 \text{ м.}$$

Теперь, фиксируя значение длины дуги, определим параметры R_1 и R_2 эллиптического цилиндра. Для этого выразим один параметр через другой, используя зафиксированную высоту d :

$$R_2 - \sqrt{\left(1 - \frac{(b/2)^2}{R_1^2}\right) R_2^2} = d \Rightarrow R_1 = \frac{bR_2}{2\sqrt{d(2R_2 - d)}}.$$

Методом подбора был определен параметр R_2 так, чтобы длина дуги эллипса была равна длине дуги параболы с точностью до пятого знака после запятой (до 0,01 мм): $R_1 = 38883/161$, $R_2 = 12961$,

$$l = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{y^2 R_2^2}{(R_1^2 - y^2) R_1^2}} dy = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{y^2 12961^2}{\left(\frac{38883^2}{161^2} - y^2\right) \frac{38883^2}{161^2}}} dy \approx 6,41870.$$

Аналогичным образом были подобраны параметры R_1 и R_2 для гиперболического цилиндра, формула выражения которых друг через друга при фиксированной высоте имеет вид

$$\sqrt{\left(1 + \frac{(b/2)^2}{R_1^2}\right) R_2^2} - R_2 = d \Rightarrow R_1 = \frac{bR_2}{2\sqrt{d(2R_2 + d)}}.$$

В итоге, параметры $R_1 = 51336/185$, $R_2 = 17112$, а длина дуги

$$l = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{y^2 R_2^2}{(R_1^2 + y^2) R_1^2}} dy = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{y^2 17112^2}{\left(\frac{51336^2}{185^2} + y^2\right) \frac{51336^2}{185^2}}} dy \approx 6,41870.$$

Все полученные геометрические характеристики рассматриваемых оболочек приведены в табл. 1.

Рассматривался вариант, когда граница оболочек закреплена шарнирно-неподвижно. Материал конструкции – сталь ($E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0,3$).

На рис. 3 представлены рассматриваемые оболочечные конструкции. Как видно, количественно они практически неотличимы друг от друга.

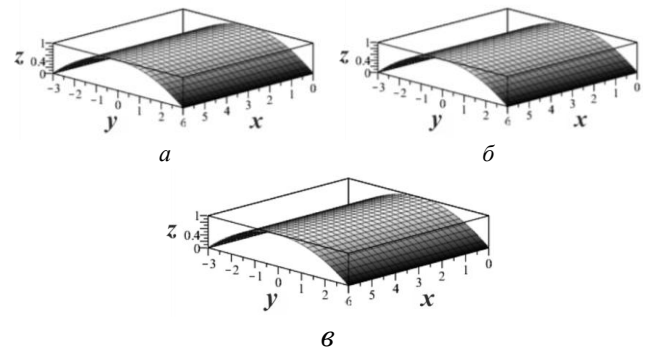


Рис. 3. Рассматриваемые виды оболочек: а – эллиптический цилиндр; б – гиперболический цилиндр; в – параболический цилиндр

Fig. 3. The types of shells considered: а – elliptic cylinder; б – hyperbolic cylinder; в – parabolic cylinder

Их отличия представлены в виде графиков абсолютного отклонения сечений друг от друга на рис. 4. Как видно, наибольшее отклонение соответствует координатам $y \approx \pm 2,1213$.

В ходе вычислительного эксперимента были получены графики нагрузка q – прогиб W , представленные на рис. 5, а также сами значения нагрузки (табл. 2), при которой оболочка теряет устойчивость (на графике этой нагрузке соответствует точка первого экстремума). Поля прогибов, отложенные от поверхности оболочки, представлены на рис. 6–8 (на рис. 7, 8 представлены проекции полей рис. 6 на плоскости xOy , xOz и yOz).

Как видно по графикам рис. 5, характер деформирования у всех трех видов оболочек один и тот же.

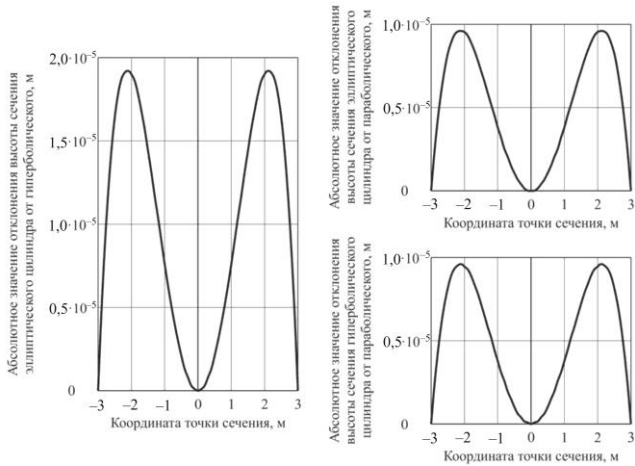


Рис. 4. Графики абсолютных отклонений высотных отметок сечений цилиндров различных видов

Fig. 4. Graphs of absolute deviations of elevation of cross-sections for different types of cylinders

Таблица 2

Значения критической нагрузки q_{cr} цилиндрических оболочек

Table 2

Values of the critical load q_{cr} of cylindrical shells

| Тип цилиндра | Значение нагрузки |
|-------------------------|-------------------|
| Эллиптический цилиндр | 0,742655 кПа |
| Гиперболический цилиндр | 0,742323 кПа |
| Параболический цилиндр | 0,742466 кПа |

Графики неотличимы друг от друга. По значениям табл. 2 полученные данные отличаются друг от друга лишь в четвертой значащей цифре. Оба этих факта говорят о том, что исследуемый алгоритм устойчив к качественному изменению геометрии при сохранении ее количественного выражения.

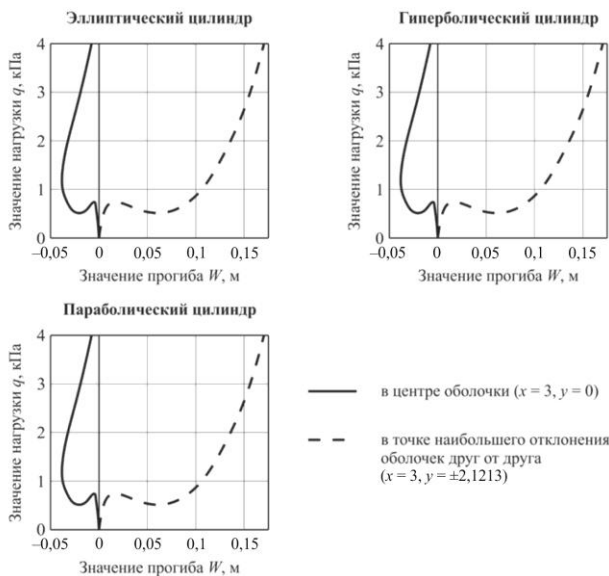


Рис. 5. Графики нагрузка q – прогиб W для трех видов цилиндров

Fig. 5. Load q versus deflection W for three types of cylinders

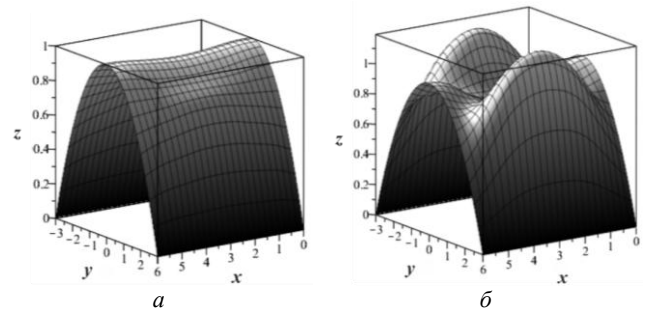


Рис. 6. Поля прогибов W до (а) и после (б) критической нагрузки q_{cr} , отложенные на поверхности (для наглядности значения прогибов увеличены в 3 раза)

Fig. 6. The fields of deflections W before (a) and after (b) the critical load q_{cr} , deposited on the surface (for clarity, the values of the deflections are tripled)

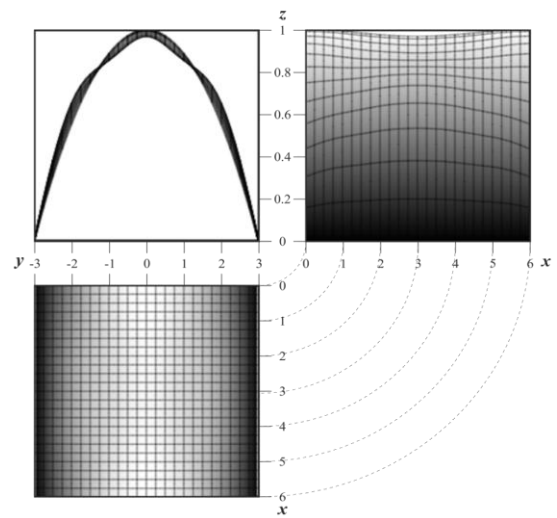


Рис. 7. Проекция прогибов W до критической нагрузки (для наглядности значения прогибов увеличены в 3 раза)

Fig. 7. The projections of deflections W before the critical load (for clarity, the values of deflections are tripled)

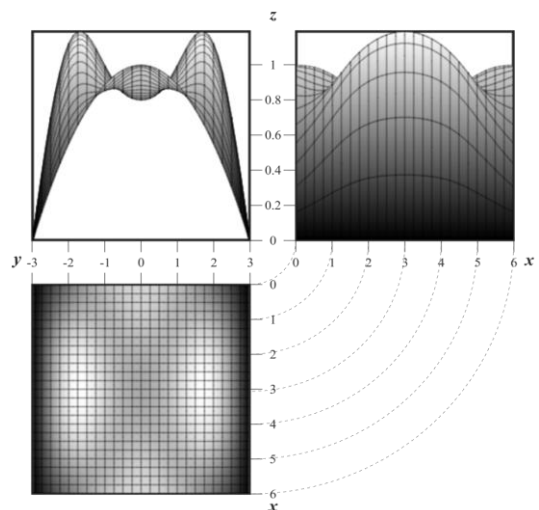


Рис. 8. Проекция прогибов W после критической нагрузки (для наглядности значения прогибов увеличены в 3 раза)

Fig. 8. The projections of deflections W after the critical load (for clarity, the values of the deflections are tripled)

Выводы

Таким образом, можно сделать вывод, что для рассматриваемого класса задач предложенная ранее математическая модель и вычислительный алгоритм устойчивы к изменению геометрии конструкции. Схожие в количественном плане поверхности (координаты точек поверхности), но различные в качественном (разное задание поверхности), при проведении расчетов дают схожие результаты. Данный результат для рассматри-

ваемого алгоритма позволяет упростить расчеты эллиптических и гиперболических цилиндров, используя вместо их геометрических параметров параметры параболического цилиндра.

Предложенная математическая модель и вычислительный алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру, могут быть использованы для дальнейших исследований устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций.

Библиографический список

1. Totaro G. Flexural, torsional, and axial global stiffness properties of anisogrid lattice conical shells in composite material // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 153. – P. 738–745. DOI:10.1016/j.compstruct.2016.06.072
2. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – Vol. 327, № 1–2. – P. 41–54. DOI:10.1016/j.jsv.2009.05.021
3. Sun Y., Qiu Y., Wu Y. Modeling of Wind Pressure Spectra on Spherical Domes // *International Journal of Space Structures*. – 2013. – Vol. 28, no. 2. – P. 87–100. DOI:10.1260/0266-3511.28.2.87
4. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2013. – № 1 (1). – С. 51–56.
5. Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells // *Engineering Structures*. – 2010. – Vol. 32, no. 6. – P. 1650–1658. DOI:10.1016/j.engstruct.2010.02.013.
6. Watts G., Singha M.K., Pradyumna S. Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method // *Thin-Walled Structures*. – 2018. – Vol. 122. – P. 452–462. DOI:10.1016/j.tws.2017.10.027
7. Frikha A., Dammak F. Geometrically non-linear static analysis of functionally graded material shells with a discrete double directors shell element // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2017. – Vol. 315. – P. 1–24. DOI:10.1016/j.cma.2016.10.017
8. Timergaliev S.N., Uglov A.N., Kharasova L.S. Solvability of geometrically nonlinear boundary-value problems for shallow shells of Timoshenko type with pivotally supported edges // *Russian Mathematics*. – 2015. – Vol. 59, no. 5. – P. 41–51. DOI:10.3103/S1066369X15050060
9. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // *International Applied Mechanics*. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 613–687. DOI:10.1007/s10778-012-0544-8
10. Awrejcewicz J., Krysko V.A. 3-D theory versus 2-D approximate theory of free orthotropic (isotropic) plate and shell vibrations, part 2: Numerical algorithms and analysis // *Journal of Sound and Vibration*. – 1999. – Vol. 226, no. 5. – P. 831–871. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2320
11. Timergaliev S.N. A method of integral equations in nonlinear boundary-value problems for flat shells of the Timoshenko type with free edges // *Russ Math*. – 2017. – Vol. 61, no. 4. – P. 49–64. DOI: 10.3103/S1066369X17040089
12. Savula Y.H., Jarmai K., Mukha I.S. Analysis of shells reinforced by massive stiffening ribs // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, no. 11. – P. 1309–1318. DOI: 10.1007/s10778-009-0137-3
13. Dung D.V., Chan D.Q. Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 159. – P. 827–841. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.006
14. Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H. Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels // *Thin-Walled Structures*. – 2006. – Vol. 44, no. 3. – P. 321–333. DOI: 10.1016/j.tws.2006.03.004.
15. Buckling of intermediate ring supported cylindrical shells under axial compression / Y. Xiang [et al.] // *Thin-Walled Structures*. – 2005. – Vol. 43, no. 3. – P. 427–443. DOI: 10.1016/j.tws.2004.07.019
16. Kumar Y. The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review // *Journal of Vibration and Control*. – 2017. – P. 107754631769472. DOI:10.1177/1077546317694724
17. Trushin S. Numerical algorithm for solving of nonlinear problems of structural mechanics based on the continuation method in combination with the dynamic relaxation method // *MATEC Web of Conferences* / ed. V. Andreev. – 2016. – Vol. 86. – P. 01006. DOI:10.1051/mateconf/20168601006
18. Дикович В.В. Пологие прямоугольные в плане оболочки вращения. – Л.: М.: Госстройиздат, 1960. – 143 с.
19. Тупикова Е.М. Выбор оптимальной оболочки покрытия на квадратном плане в виде поверхности переноса // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2019. – Vol. 15, № 5. – С. 367–373. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-5-367-373
20. Giloulbé M., Qbaily J. Геометрическое моделирование и линейный статический расчет тонких оболочек в форме цилиндров // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2018. – Vol. 14, № 6. – С. 502–508. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-502-508
21. Фирсанов В.В. Локальное напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки на основе трёхмерных уравнений теории упругости // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2013. – № 2. – С. 10–19.
22. Li D., Qing G., Liu Y. A layerwise/solid-element method for the composite stiffened laminated cylindrical shell structures // *Composite Structures*. – 2013. – Vol. 98. – P. 215–227. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.11.013
23. Sobhaniaragh B., Nejati M., Mansur W.J. Buckling modelling of ring and stringer stiffened cylindrical shells aggregated by graded CNTs // *Composites Part B: Engineering*. – 2017. – Vol. 124. – P. 120–133. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.05.045

24. Ng T.Y., Lam K.Y. Dynamic stability analysis of cross-ply laminated cylindrical shells using different thin shell theories // *Acta Mechanica*. – 1999. – Vol. 134, no. 3–4. – P. 147–167. DOI: 10.1007/BF01312653
25. Martins J.P., Simões da Silva L., Silvestre N. Energy-based analytical model to predict the elastic critical behaviour of curved panels // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2016. – Vol. 127. – P. 165–175. DOI: 10.1016/j.jcsr.2016.07.029
26. Sengupta J., Ghosh A., Chakravorty D. Progressive Failure Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shell Roofs // *Journal of Failure Analysis and Prevention*. – 2015. – Vol. 15, no. 3. – P. 390–400. DOI: 10.1007/s11668-015-9951-6
27. Ahmed M.K. Simplified equations and solutions for the free vibration of an orthotropic oval cylindrical shell with variable thickness // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2011. – Vol. 34. – P. 1789–1800. DOI: 10.1002/mma.1493
28. The Dynamic Stability of Cylindrical Shells with Variable Geometric and Mechanical Parameters / A.H. Sofiyev, F. Birinci, Al.H. Sofiyev, E. Yusufoglu // *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*. – 2006. – Vol. 2, no. 3. – P. 345–354. DOI: 10.1163/157361106777641369
29. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach / Y. Qu, S. Wu, Y. Chen, H. Hua // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2013. – Vol. 69. – P. 72–84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026
30. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1969. – 176 с.
31. Karpov V.V., Semenov A.A. Refined model of stiffened shells // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – Vol. 199. – P. 43–56. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019
32. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.
33. Semenov A.A., Leonov S.S. The Continuous Method of Solution Continuation with Respect to the Best Parameter in the Calculation of Shell Structures // *Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. – 2019. – Vol. 161, no. 2. – P. 230–249. DOI: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249
34. Karpov V., Semenov A. Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2015. – No. 3. – P. 74–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07

References

1. Totaro G. Flexural, torsional, and axial global stiffness properties of anisogrid lattice conical shells in composite material *Composite Structures*, 2016, vol. 153, pp. 738–745. doi:10.1016/j.compstruct.2016.06.072.
2. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners *Journal of Sound and Vibration*, 2009, vol. 327, no. 1–2, pp. 41–54. DOI:10.1016/j.jsv.2009.05.021.
3. Sun Y., Qiu Y., Wu Y. Modeling of Wind Pressure Spectra on Spherical Domes *International Journal of Space Structures*, 2013, vol. 28, no. 2. pp. 87–100. DOI:10.1260/0266-3511.28.2.87.
4. Krivoshapko S.N. O vozmozhnostyah obolocheknyh sooruzhenij v sovremennoj arhitekture i stroitel'stve [On the possibilities of shell structures in modern architecture and construction]. *Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*, 2013, no. 1 (1), pp. 51–56.
5. Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells *Engineering Structures*, 2010, vol. 32, no. 6. pp. 1650–1658. DOI:10.1016/j.engstruct.2010.02.013.
6. Watts G., Singha M.K., Pradyumna S. Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method *Thin-Walled Structures*, 2018, vol. 122, pp. 452–462. DOI:10.1016/j.tws.2017.10.027.
7. Frikha A., Dammak F. Geometrically non-linear static analysis of functionally graded material shells with a discrete double directors shell element *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 315, pp. 1–24. DOI:10.1016/j.cma.2016.10.017.
8. Timergaliev S.N., Uglov A.N., Kharasova L.S. Solvability of geometrically nonlinear boundary-value problems for shallow shells of Timoshenko type with pivotally supported edges *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 5. pp. 41–51. DOI:10.3103/S1066369X15050060.
9. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) *International Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, no. 6. pp. 613–687. DOI:10.1007/s10778-012-0544-8.
10. Awrejcewicz J., Krysko V.A. 3-D theory versus 2-D approximate theory of free orthotropic (isotropic) plate and shell vibrations, part 2: Numerical algorithms and analysis *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 226, no. 5. pp. 831–871. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2320.
11. Timergaliev S.N. A method of integral equations in nonlinear boundary-value problems for flat shells of the Timoshenko type with free edges *Russ Math*, 2017, vol. 61, no. 4. pp. 49–64. DOI: 10.3103/S1066369X17040089.
12. Savula Y.H., Jarmai K., Mukha I.S. Analysis of shells reinforced by massive stiffening ribs *International Applied Mechanics*, 2008, Vol. 44, no. 11, pp. 1309–1318. DOI: 10.1007/s10778-009-0137-3.
13. Dung D.V., Chan D.Q. Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT *Composite Structures*, 2017, vol. 159, pp. 827–841. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.10.006.
14. Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H. Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels *Thin-Walled Structures*, 2006, vol. 44, no. 3, pp. 321–333. DOI: 10.1016/j.tws.2006.03.004.
15. Xiang Y. et al. Buckling of intermediate ring supported cylindrical shells under axial compression *Thin-Walled Structures*, 2005, vol. 43, no. 3, pp. 427–443. DOI: 10.1016/j.tws.2004.07.019.
16. Kumar Y. The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review *Journal of Vibration and Control*, 2017, pp. 107754631769472. DOI:10.1177/1077546317694724.
17. Trushin S. Numerical algorithm for solving of nonlinear problems of structural mechanics based on the continuation method in combination with the dynamic relaxation method *MATEC Web of Conferences* / ed. Andreev V, 2016, vol. 86, pp. 01006. DOI:10.1051/mateconf/20168601006.
18. Dikovich V.V. Pologie prjamougol'nye v plane obolochki vrashhenija [Gentle rectangular in terms of shells of revolution]. *Leningrad-Moscow, Gosstrojizdat*, 1960. 143 p.
19. Tupikova E.M. Vybór optimal'noj obolochki pokrytija na kvadratnom plane v vide poverhnosti perenosy [The choice of the

optimal coating shell on a square plan in the form of a transfer surface]. *Stroitel'naja mehanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij*, 2019, vol. 15, no. 5, pp. 367–373. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-5-367-373.

20. Giloulbé M., Qbaily J. Geometricheskoe modelirovanie i linejnyj staticheskiy raschet tonkih obolochek v forme cilindroidov *Stroitel'naja mehanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij*, 2018, vol. 14, No. 6, pp. 502–508. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-502-508.

21. Firsanov V.V. Lokal'noe naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie cilindricheskoj obolochki na osnove trjohmernyh uravnenij teorii uprugosti [Local stress-strain state of a cylindrical shell based on three-dimensional equations of the theory of elasticity]. *Stroitel'naja mehanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij*, 2013, no. 2, pp. 10–19.

22. Li D., Qing G., Liu Y. A layerwise/solid-element method for the composite stiffened cylindrical shell structures *Composite Structures*, 2013, vol. 98, pp. 215–227. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.11.013.

23. Sobhaniaragh B., Nejati M., Mansur W.J. Buckling modelling of ring and stringer stiffened cylindrical shells aggregated by graded CNTs *Composites Part B: Engineering*, 2017, vol. 124, pp. 120–133. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.05.045.

24. Ng T.Y., Lam K.Y. Dynamic stability analysis of cross-ply laminated cylindrical shells using different thin shell theories *Acta Mechanica*, 1999, vol. 134, no. 3–4, pp. 147–167. DOI: 10.1007/BF01312653.

25. Martins J.P., Simões da Silva L., Silvestre N. Energy-based analytical model to predict the elastic critical behaviour of curved panels *Journal of Constructional Steel Research*, 2016, vol. 127, pp. 165–175. DOI: 10.1016/j.jcsr.2016.07.029.

26. Sengupta J., Ghosh A., Chakravorty D. Progressive Failure Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shell Roofs

Journal of Failure Analysis and Prevention, 2015, Vol. 15, No. 3, pp. 390–400. doi: 10.1007/s11668-015-9951-6.

27. Ahmed M.K. Simplified equations and solutions for the free vibration of an orthotropic oval cylindrical shell with variable thickness *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2011, vol. 34, pp. 1789–1800. DOI: 10.1002/mma.1493.

28. Sofiyev A.H., Birinci F., Sofiyev A.H., Yusufoglu E. The Dynamic Stability of Cylindrical Shells with Variable Geometric and Mechanical Parameters *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 2006, vol. 2, no. 3, pp. 345–354. DOI: 10.1163/157361106777641369.

29. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, vol. 69, pp. 72–84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026.

30. Pogorelov A.V. Differencial'naja geometrija [Differential geometry]. *Moscow, Nauka*, 1969. 176 p.

31. Karpov V.V., Semenov A.A. Refined model of stiffened shells *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 199, pp. 43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.

32. Shalashilin V. I., Kuznetsov E. B. Parameter continuation method and best parameterization (in applied mathematics and mechanics) [Method of continuation of the solution in a parameter and the best parametrization]. *Moscow, Editorial URSS*, 1999. 222 p.

33. Semenov A.A., Leonov S.S. The Continuous Method of Solution Continuation with Respect to the Best Parameter in the Calculation of Shell Structures *Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2019, vol. 161, no. 2, pp. 230–249. DOI: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249.

34. Karpov V., Semenov A. Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 3, pp. 74–94. DOI: 10.15593/pern.mech/2015.3.07