



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.04

УДК 539.3: 621.646.943

КОЛЕБАНИЯ КОМПЕНСАТОРНОГО СИЛЬФОНА КАК ГОФРИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ВНУТРИ

Т.В. Зиновьева¹, В.А. Пискунов²

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

²АО «Концерн «НПО «Аврора», ЦРИЭГА, Санкт-Петербург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 октября 2020 г.

Принята: 26 марта 2021 г.

Опубликована: 15 апреля 2021 г.

Ключевые слова:

упругие оболочки, свободные и вынужденные колебания, компенсаторный сильфон, идеальная жидкость, гофрированная оболочка.

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена актуальной проблеме судового машиностроения – расчету свободных и вынужденных колебаний трубопроводных компенсаторных сильфонов. Эти устройства используют для уменьшения вибрационной нагрузки, вызываемой силовыми энергетическими машинами корабля. При анализе колебаний компенсаторных сильфонов необходимо учитывать жидкость, находящуюся в нем.

В работе расчетная модель сильфона представлена гофрированной упругой оболочкой как материальной поверхностью с пятью степенями свободы. Использован вариант классической теории оболочек, построенный на основе механики Лагранжа. Влияние жидкости учитывается по двум моделям. Сначала жидкость считается идеальной несжимаемой и учитывается через присоединенную к оболочке массу. Оболочка заменена на цилиндрическую поверхность с радиусом по средней линии гофры. Для учета влияния частоты колебаний сильфона на присоединенную инерцию жидкости в расчете используется также акустическое приближение, выведена формула для обобщенной присоединенной массы идеальной сжимаемой жидкости.

Получены уравнения колебаний сильфона под действием периодической нагрузки. Задача решена методом конечных разностей. Для компенсаторного сильфона из коррозионно-стойкой жаропрочной стали получены значения собственных частот свободных колебаний. Показано, что учет жидкости значительно меняет собственные частоты сильфона, при высокочастотных колебаниях необходимо учитывать сжимаемость жидкости. Решена задача о вынужденных колебаниях сильфона при задании смещения его торца по гармоническому закону. Определены внутренние силы и моменты, а также возникающие в сильфоне напряжения по критерию Мизеса. Найдено критическое значение перемещения торца при вибрации на частоте 50 Гц, при котором сильфон переходит в пластическое состояние.

© ПНИПУ

© Зиновьева Татьяна Владимировна – к.т.н., доц., с.н.с., e-mail: tatiana.zinovieva@gmail.com,

iD: [0000-0002-7953-6849](https://orcid.org/0000-0002-7953-6849)

Пискунов Владимир Александрович – к.т.н., e-mail: vladimirpiskunov17@mail.ru, iD: [0000-0002-0834-4671](https://orcid.org/0000-0002-0834-4671)

Tatiana V. Zinovieva – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher,

e-mail: tatiana.zinovieva@gmail.com, iD: [0000-0002-7953-6849](https://orcid.org/0000-0002-7953-6849)

Vladimir A. Piskunov – CSc in Technical Sciences, e-mail: vladimirpiskunov17@mail.ru, iD: [0000-0002-0834-4671](https://orcid.org/0000-0002-0834-4671)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



COMPENSATORY BELLOWS OSCILLATIONS AS A CORRUGATED SHELL WITH LIQUID INSIDE

T.V. Zinovieva¹, V.A. Piskunov²

¹Institute for Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,
Saint Petersburg, Russian Federation

²Concern Avrora Scientific and Production Association JSC, Saint Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 October 2020

Accepted: 10 March 2021

Published: 15 April 2021

Keywords:

elastic shells, free and forced vibrations, compensatory bellows, ideal liquid, corrugated shell.

ABSTRACT

The paper deals with a relevant problem of shipbuilding, i.e. calculation of free and forced vibrations of pipeline compensatory bellows. These devices are used to reduce the vibration load caused by ship power machines. When analyzing the vibrations of the compensatory bellows, it is necessary to take into account the liquid contained in the bellows.

In this work, the design model of the bellows is represented by a corrugated elastic shell as a material surface with five degrees of freedom. A variant of the classical theory of shells, built on the basis of Lagrangian mechanics, is used. The influence of the liquid is taken into account by two models. First, the liquid is considered to be ideal and incompressible and is considered through the attached mass to the shell. The shell is replaced by a cylindrical surface with a radius in the middle line of the corrugation. To account for the influence of the frequency of bellows oscillations on the attached inertia of the liquid in the calculation we also used the acoustic approximation; and derived a formula for a generalized attached mass of the ideal compressible liquid.

The equations of the bellows oscillations under the periodic loading are obtained. The problem has been solved by the finite difference method. The values of natural frequencies of free vibrations are obtained for the compensatory bellows from the corrosion-resistant heat-resistant steel. It is shown that by taking account of the liquid, we significantly change the natural frequencies of the bellows. With high-frequency vibrations it is necessary to take into account the compressibility of the liquid. The problem of the forced vibrations of the bellows caused by a displacement of its end face by the harmonic law is solved. The internal forces and moments are determined, as well as occurring stresses by Mises criterion in the bellows. We found the critical value of the end face displacement at a frequency of 50 Hz, at which the bellows goes into a plastic state.

© PNRPU

Введение

В настоящее время освоение новых технологий конструирования, применение новых материалов, а также внедрение наукоемких расчетов является перспективным направлением развития техники. Применение аналитических методов позволяет на этапе проработки конструкции не только оценить прочностные свойства узла или детали, но и спрогнозировать их работу в сложных критических условиях. Создание новых судов на этапе проектирования в первую очередь начинается с оценки критических параметров всех силовых агрегатов.

Вибрационные нагрузки, вызываемые силовыми энергетическими машинами, в значительной степени снижают долговечность соединений трубопроводов, креплений аппаратуры, влияют на характеристики регулирующих органов. Одним из узлов, воспринимающих подобные вибрации на корабле, является компенсаторный сальфон (рис. 1), применяемый в качестве гасителя колебаний, а также герметического соединения трубопровода.

Наибольшее распространение в судовом машиностроении имеют однослойные сальфоны, используемые в качестве уплотняющих устройств, разделяющих жидкие или газообразные среды [1]. Использование сальфонного узла в трубопроводной магистрали позволяет

уменьшить вибрационные нагрузки [2, 3], поэтому в первую очередь сальфоны устанавливают в машинных отсеках судов обеспечения, ледоколов, танкеров. Примером использования может служить сальфон, выполненный по ГОСТ Р 50618–93*.

Среда, перемещаемая по трубопроводу, также оказывает влияние на его прочность и долговечность. В зависимости от фактора среды соответствующим образом подбирается и материал сальфонного компенсатора. Обеспечение прочности сальфонного узла, как гидравлического соединения, является важной задачей проектирования в судовом машиностроении. В связи с этим актуальными становятся задачи о колебаниях сальфона с учетом жидкости внутри него.

Развитие механики обеспечило наличие мощного аналитического аппарата, позволяющего решать различные прочностные задачи. Корректное использование уравнений аналитической механики и вариационного исчисления позволяет строить модели деформируемых тел, в том числе оболочек вращения, к которым относятся компенсаторные сальфоны.

Целью данной работы является расчет прочности сальфона как упругой гофрированной оболочки с жид-

* ГОСТ Р 50618–93. Сальфоны компенсаторные однослойные металлические. Типы, общие технические требования.

костью внутри при колебаниях. Решены задачи о свободных и вынужденных колебаниях оболочки, содержащей идеальную сжимаемую жидкость.



Рис. 1. Внешний вид компенсаторного шильфона

Fig. 1. A compensatory bellows

Существует много теорий оболочек, они находят свое применение в разных областях техники. Авторы прикладных работ по классической теории следуют представлениям Кирхгофа – Лява [4, 5], по неклассической – учитывают дополнительные степени свободы элемента оболочки [6–8].

В данной работе использован вариант классической теории оболочек как поверхностей с материальными нормальными, построенный на основе механики Лагранжа [9–11]. Эта теория эффективно применялась разными авторами для решения различных задач: для оболочек вращения с произвольным меридианом проведены расчеты статики [12] и динамики [13, 14], решены задачи о колебаниях оболочек в жидкости и распространении волн в них [15–18]. Моделирование шильфонных компенсаторов как упругих гофрированных оболочек проведено в работах [19, 20] для решения задач статики и устойчивости.

1. Уравнения теории тонких оболочек вращения

Оболочка рассматривается как материальная поверхность, частицы которой обладают пятью степенями свободы: тремя трансляциями и двумя поворотами. Движение определяется вектором малых перемещений \mathbf{u} и вектором малого поворота \mathfrak{S} в касательной плоскости. Вводится вектор изменения нормали к оболочке: $\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathfrak{S} \times \mathbf{n} = \dot{\mathbf{n}}$ (точка означает малое приращение при деформации). По выражению работы внешнего распределенного момента вводится соответствующая $\boldsymbol{\varphi}$ обобщенная сила: $\mathbf{m} \cdot \mathfrak{S} = \mathbf{m}^\times \cdot \boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{m}^\times \equiv \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

Деформация поверхности определяется тензорами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})_{\perp}^S, \quad \boldsymbol{\kappa} = -(\nabla \boldsymbol{\varphi})_{\perp} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}^T. \quad (1)$$

Здесь ∇ – оператор Гамильтона на поверхности; $\mathbf{b} \equiv -\nabla \mathbf{n}$ – второй метрический тензор. Значками $(\dots)_{\perp}, (\dots)^S, (\dots)^T$ отмечены составляющие в касательной плоскости, симметричная часть и транспонирование. Поворот связан с перемещением (согласно кинематической гипотезе Кирхгофа):

$$\boldsymbol{\varphi} = -\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (2)$$

Принцип виртуальной работы позволяет вывести всю систему уравнений. Силовые факторы в оболочке вводятся как множители Лагранжа: $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$ – симметричные тензоры сил и моментов, \boldsymbol{Q} – вектор перерезывающих сил; все они лежат в касательной плоскости. Из вариационной постановки следуют уравнения баланса сил и моментов:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b} + \boldsymbol{Q}\mathbf{n}) + \mathbf{q} = 0, \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu})_{\perp} + \boldsymbol{Q} = \mathbf{m}^\times, \quad (3)$$

и граничные условия на контуре в общем виде:

$$[\mathbf{P}^0 - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} + \boldsymbol{Q}\mathbf{n}) + \partial_i (A \cdot \ln)] \cdot \delta \mathbf{u} - A \cdot \mathbf{v}\mathbf{n} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \delta \mathbf{u} = 0,$$

$$A \equiv \mathbf{M}^0 \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}, \quad (4)$$

где \mathbf{q} и \mathbf{m}^\times – внешняя распределенная нагрузка и момент на поверхности, \mathbf{P}^0 и \mathbf{M}^0 – на контуре. Всего в компонентах имеем пять уравнений равновесия и четыре скалярных условия на контуре оболочки.

На отрезке внутреннего контура длиной dl с нормалью \mathbf{v} действует (со стороны \mathbf{v}) сила и момент

$$d\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} + \boldsymbol{Q}\mathbf{n}) dl, \quad d\mathbf{M} = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}) dl, \quad (\mathbf{T} \equiv \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b}).$$

Для оболочки из изотропного материала соотношения упругости имеют вид:

$$\boldsymbol{\tau} = C_1 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a} + C_2 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\mu} = D_1 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{a} + D_2 \boldsymbol{\kappa},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\kappa}), \quad (5)$$

$$C_1 = Eh\nu / (1 - \nu^2), \quad C_2 = Eh / (1 + \nu),$$

$$D_1 = C_1 h^2 / 12, \quad D_2 = C_2 h^2 / 12.$$

Здесь $\mathbf{a} \equiv \nabla \mathbf{r}$ – первый метрический тензор на поверхности (единичный тензор в касательной плоскости); коэффициенты $C_1 - D_2$ взяты как в пластине Кирхгофа; E – модуль упругости материала оболочки; h – ее толщина; ν – коэффициент Пуассона. Соотношений упругости для вектора перерезывающих сил \boldsymbol{Q} в классической теории нет, вместо него имеем соотношение (2).

Далее рассмотрим оболочку, поверхность которой образована вращением меридиана вокруг оси x . Меридиан задается зависимостью цилиндрических координат от дуговой координаты: $x = x(s)$, $\rho = \rho(s)$, его положение на поверхности определяется углом θ (рис. 2).

Радиус-вектор точек поверхности задается равенством

$$\mathbf{r}(\theta, s) = x(s)\mathbf{i} + \rho(s)\mathbf{e}_{\rho}(\theta), \quad \mathbf{e}_{\rho} = \mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta,$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат вдоль осей x, y, z соответственно.

Орт касательной к параллели: $\mathbf{e}_{\theta} = -\mathbf{j} \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta = \mathbf{e}'_{\rho}$. Для ортов касательной и нормали к меридиану в его плоскости имеем

$$\mathbf{t} = \partial \mathbf{r} / \partial s = x'(s) \mathbf{i} + \rho'(s) \mathbf{e}_\rho(\theta), \quad x' = \cos \psi, \quad \rho' = \sin \psi,$$

$$\partial \mathbf{t} / \partial s = \omega \mathbf{n}, \quad \omega \equiv \psi'(s), \quad \mathbf{n} \equiv -\mathbf{i} \sin \psi + \mathbf{e}_\rho \cos \psi,$$

где ω – кривизна меридиана, а ρ^{-1} – параллели.

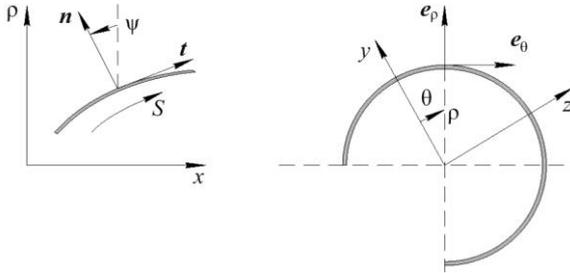


Рис. 2. Поверхность вращения

Fig. 2. The revolution surface

Вектор перемещений оболочки имеет три компоненты: $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_0 + u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n}$. По формулам (1), (2) определим компоненты вектора поворота и тензоров деформации:

$$\varepsilon_0 = \rho^{-1} (\partial_0 u_0 + u_\rho), \quad u_\rho \equiv u_t \sin \psi + u_n \cos \psi,$$

$$\varepsilon_t = \partial_s u_t - \omega u_n, \quad \varepsilon_{0t} = \varepsilon_{t0} = \frac{1}{2} [\rho^{-1} (\partial_0 u_t - u_0 \sin \psi) + \partial_s u_0],$$

$$\varphi_0 = \rho^{-1} (u_0 \cos \psi - \partial_0 u_n), \quad \varphi_t = -\omega u_t - \partial_s u_n,$$

$$\kappa_0 = -\rho^{-1} (\partial_0 \varphi_0 + \varphi_t \sin \psi) - \rho^{-2} \cos \psi (\partial_0 u_0 + u_\rho), \quad (6)$$

$$\kappa_t = \omega (\partial_s u_t - \omega u_n) - \partial_s \varphi_t,$$

$$\kappa_{0t} = \kappa_{t0} = -\rho^{-1} (\partial_0 \varphi_t - \varphi_0 \sin \psi + \partial_s u_0 \cos \psi).$$

С использованием уравнений (5) запишем соотношения сил и моментов:

$$\mu_0 = (D_1 + D_2) \kappa_0 + D_1 \kappa_t, \quad \mu_t = (D_1 + D_2) \kappa_t + D_1 \kappa_0,$$

$$\mu_{0t} = \mu_{t0} = D_2 \kappa_{0t},$$

$$T_0 = (C_1 + C_2) \varepsilon_0 + C_1 \varepsilon_t - \rho^{-1} \mu_0 \cos \psi,$$

$$T_t = (C_1 + C_2) \varepsilon_t + C_1 \varepsilon_0 + \omega \mu_t,$$

$$T_{0t} = C_2 \varepsilon_{0t} + \omega \mu_{0t}, \quad T_{t0} = C_2 \varepsilon_{t0} - \rho^{-1} \mu_{t0} \cos \psi. \quad (7)$$

Систему в компонентах замыкают уравнения баланса (3):

$$\rho^{-1} [\partial_0 T_0 + (T_{0t} + T_{t0}) \sin \psi] + \partial_s T_{t0} + \rho^{-1} Q_0 \cos \psi + q_0 - \beta \ddot{u}_0 = 0,$$

$$\rho^{-1} [(T_t - T_0) \sin \psi + \partial_0 T_{0t}] + \partial_s T_t - \omega Q_t + q_t - \beta \ddot{u}_t = 0, \quad (8)$$

$$-\rho^{-1} T_0 \cos \psi + \omega T_t + \rho^{-1} (\partial_0 Q_0 + Q_t \sin \psi) +$$

$$+ \partial_s Q_t + q_n - \beta \ddot{u}_n = 0,$$

$$\rho^{-1} [\partial_0 \mu_0 + (\mu_{0t} + \mu_{t0}) \sin \psi] + \partial_s \mu_{t0} + Q_0 = m_0^\times.$$

$$\rho^{-1} [(\mu_t - \mu_0) \sin \psi + \partial_0 \mu_{0t}] + \partial_s \mu_t + Q_t = m_t^\times,$$

где β – масса оболочки на единицу площади.

Из (4) следуют четыре скалярных условия на контуре оболочки. В случае заделки: $u_0 = u_t = u_n = 0$, $\gamma_0 \equiv \partial_s u_n = 0$. На свободном контуре с нормалью $\mathbf{v} = \mathbf{t}$ задается растягивающая сила $T_t = P_t^0$, изгибающий момент $\mu_t = M_t^0$ и две комбинации, связывающие крутящий момент с компонентами силы:

$$F_0 \equiv T_{t0} - \rho^{-1} \cos \psi \mu_{t0} = P_t^0 + \rho^{-1} \cos \psi M_t^0,$$

$$F_n \equiv Q_t - \rho^{-1} \partial_0 \mu_{t0} = P_n^0 + \rho^{-1} \partial_0 M_t^0.$$

Будем рассматривать вынужденные колебания под действием периодической нагрузки

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ m_0^\times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_0(s) \\ \bar{m}_0^\times(s) \end{pmatrix} \sin n\theta \sin \Omega t,$$

$$\begin{pmatrix} q_t \\ m_t^\times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_t(s) \\ \bar{m}_t^\times(s) \end{pmatrix} \cos n\theta \sin \Omega t,$$

где n – целое число, Ω – частота нагрузки. Остальные функции ищем в аналогичном виде: u_0, F_0 пропорциональны $\sin n\theta$, а неизвестные $u_t, u_n, \gamma_0, T_t, F_n, \mu_t$ – $\cos n\theta$.

Из уравнений (6)–(8) для амплитуд получим систему, приведенную в [13], вида

$$Y'(s) = f(Y), \quad Y = (\bar{u}_0, \bar{u}_t, \bar{u}_n, \bar{\gamma}_0, \bar{F}_0, \bar{T}_t, \bar{F}_n, \bar{\mu}_t)^T \quad (9)$$

для столбца неизвестных, задаваемых на краях оболочки. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) дополняется четырьмя граничными условиями на каждом крае оболочки. Эта краевая задача решается методом конечных разностей [21].

В случае свободных колебаний оболочки в системе (9) все внешние нагрузки равны нулю ($q = 0$ и $m^\times = 0$), а частота Ω неизвестна и должна быть найдена. Граничные условия однородны. Применяя метод конечных разностей, из (9) придем к однородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$B(\Omega) Y = 0, \quad (10)$$

где $Y = (\{\bar{u}_0\}_i, \dots, \{\bar{\mu}_t\}_i)^T$ – столбец значений амплитуд в N узлах сетки ($i = 1, \dots, N$). Частоты Ω , при которых система (10) имеет нетривиальное решение, – собственные частоты оболочки, так будет при условии

$$\text{Det } B(\Omega) = 0. \quad (11)$$

Корни уравнения (11) могут быть найдены, например, методом дихотомии [21].

2. Определение нагрузки со стороны жидкости

Во многих инженерных расчетах для описания взаимодействия упругих тел с жидкостью используется модель идеальной жидкости. При расчетах колебаний тел применяют формулу для присоединенной массы [22, 23], ее значение для тел разной формы различно и зависит от ориентации тела относительно направления его движения [24–28]. Как известно, для кругового цилиндра, движущегося в жидкости в направлении, перпендикулярном образующей оси, присоединенная масса равна массе жидкости в объеме цилиндра.

Обзор научно-технической литературы показал, что в настоящее время не существует корректной модели расчета присоединенной массы гофрированной оболочки. В работах [22, 29] сложнопрофильную оболочку приближенно разбивают на цилиндрические поверхности и находят присоединенную массу для гофры суммированием масс для каждой части.

В данной работе предлагается при расчете присоединенной массы гофрированной оболочки заменить ее на цилиндрическую поверхность с радиусом по средней линии гофры. Гидромеханическая задача будет рассмотрена в двумерной постановке для круга в предположении, что скорости движения жидкости вдоль оси цилиндра существенно меньше скоростей движения в плоскостях, перпендикулярных его оси.

Отметим также, что в большинстве трудов присоединенные массы определяют для недеформируемых тел, при расчетах колебаний тонкостенной оболочки это может привести к большим погрешностям.

В работе [30] выведена формула для присоединенной массы идеальной несжимаемой жидкости внутри кругового цилиндра, зависящей от формы его деформирования. При нормальном смещении контура цилиндра по закону $q_n(t) \cos n\theta$ присоединенная масса

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \rho_0 \pi R^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где n – число волн вдоль окружности; ρ_0 – плотность жидкости; R – радиус цилиндра. При $n=1$ имеем случай колебания жесткого кругового цилиндра, и формула дает известный результат – массу жидкости в объеме цилиндра.

Формула (12), учитывая влияние деформации поверхности цилиндра на присоединенную массу, все же не учитывает влияние частоты колебаний тела на присоединенную инерцию. Для устранения этого недостатка необходимо ввести в рассмотрение сжимаемость жидкости, поэтому далее будем использовать акустическое приближение [31].

Рассмотрим движение идеальной сжимаемой жидкости с малыми возмущениями давления $p_0 + \tilde{p}$, плотности $\rho_0 + \tilde{\rho}$ и скорости \mathbf{v} . Будем считать, что массовые силы отсутствуют, $\tilde{p}, \tilde{\rho}$ и \mathbf{v} – малые одного порядка.

Тогда, пренебрегая малыми второго порядка, для жидкости получим следующую систему уравнений:

$$\nabla \tilde{p} + \rho_0 \dot{\mathbf{v}} = 0 \text{ – уравнение баланса сил,} \quad (13)$$

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}, \quad c^2 \equiv \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_0 \text{ – уравнение состояния,} \quad (14)$$

$$\dot{\tilde{\rho}} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ – уравнение неразрывности.} \quad (15)$$

Из этой системы получим волновое уравнение для давления:

$$\Delta \tilde{p} = \frac{1}{c^2} \ddot{\tilde{p}}. \quad (16)$$

Здесь c – скорость звука в жидкости.

Пусть стенки кругового цилиндра радиуса R перемещаются по закону:

$$\mathbf{u} = u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_n \mathbf{n}, \quad u_\theta = U_\theta \sin n\theta \sin \Omega t, \quad (17)$$

$$u_n = U_n \cos n\theta \sin \Omega t.$$

Перепишем волновое уравнение (16) в полярных координатах:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \tilde{p} = 0. \quad (18)$$

На поверхности цилиндра должно выполняться условие непроницаемости и безотрывности течения:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Big|_{r=R} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \Rightarrow \partial_r \tilde{p} \Big|_{r=R} = \quad (19)$$

$$= -\rho_0 \ddot{u}_n = \rho_0 \Omega^2 U_n \cos n\theta \sin \Omega t.$$

Здесь было учтено уравнение баланса (13). Решение ищем в виде

$$\tilde{p}(r, \theta, t) = P(r) \cos n\theta \sin \Omega t,$$

из (19) получим граничное условие для неизвестной функции давления $P(r)$:

$$P'(R) = \rho_0 \Omega^2 U_n. \quad (20)$$

Из (18) следует обобщенное уравнение Бесселя:

$$P'' + \frac{1}{r} P' + \left(\frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) P = 0, \quad (21)$$

его решение выражается через функции Бесселя 1-го рода и Неймана [32]:

$$P(r) = A_1 I_n \left(\frac{\Omega r}{c} \right) + A_2 Y_n \left(\frac{\Omega r}{c} \right). \quad (22)$$

Из условия ограниченности решения в нуле, с учетом асимптотики функций Неймана, следует: $A_2 = 0$. Вторую константу найдем из условия (20), таким образом, получим решение задачи:

$$P(r) = \frac{\rho_0 \Omega c U_n}{I_n' \left(\frac{\Omega R}{c} \right)} I_n \left(\frac{\Omega r}{c} \right). \quad (23)$$

На давление жидкости влияет частота колебаний цилиндра и его нормальное смещение. Жидкость оказывает на внутреннюю стенку цилиндра давление $q = \tilde{p}(R)n$. В уравнении баланса сил будем иметь следующую распределенную нормальную нагрузку с учетом инерции от распределенной массы β самого цилиндра:

$$q_n - \beta \ddot{u}_n = - \left(\frac{\rho_0 c}{\Omega I_n' \left(\frac{\Omega R}{c} \right)} I_n \left(\frac{\Omega R}{c} \right) + \beta \right) \ddot{u}_n.$$

Таким образом, получили, что инерционные силы сжимаемой жидкости линейно выражаются через нормальное ускорение колеблющегося цилиндра. Коэффициент при ускорении называется обобщенной присоединенной массой [33–35]:

$$M_n = \frac{\rho_0 R I_n(\gamma)}{\gamma I_n'(\gamma)}, \quad \gamma \triangleq \frac{\Omega R}{c}. \quad (24)$$

Отметим, что M_n – это масса на единицу площади; чтобы ее сравнить с результатом Горелова (12), необходимы дополнительные выкладки из статьи [30]. В ней найдено приращение гидродинамического давления при деформировании контура цилиндра по закону $u_n = q_n(t) \cos n\theta$:

$$\tilde{p}^\Gamma = -\frac{\rho_0 R}{n} \cos n\theta \ddot{q}_n = -\frac{\rho_0 R}{n} \ddot{u}_n,$$

откуда получаем выражение обобщенной присоединенной массы несжимаемой жидкости:

$$m_n = \frac{\rho_0 R}{n}. \quad (25)$$

Нетрудно показать, что $M_n \rightarrow m_n$ при $\gamma \rightarrow 0$, т.е. формула (25) представляет собой асимптотику массы M_n при малой частоте колебаний. Это иллюстрирует график, показанный на рис. 3. По оси абсцисс на нем отложена безразмерная частота γ , а по оси ординат – обобщенные массы, обезразмеренные на множитель $\rho_0 R$: $\hat{M}_n = I_n(\gamma)/(I_n'(\gamma))$ показаны сплошными линиями и $\hat{m}_n = 1/n$ – пунктирными.

Формула (25) будет хорошо работать при малых частотах колебаний, в другом случае необходимо учитывать сжимаемость жидкости и использовать формулу (24). При дальнейших расчетах колебаний гофрированной оболочки с жидкостью внутри используем обе формулы – (24) и (25), сравнивая результаты.

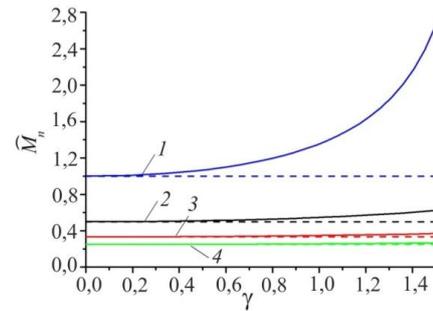


Рис. 3. Зависимость безразмерных присоединенных масс от безразмерной частоты при различных n : 1 – $n = 1$; 2 – $n = 2$; 3 – $n = 3$; 4 – $n = 4$

Fig. 3. Dependence of non-dimensional added masses on non-dimensional frequency at different n : 1 ($n = 1$); 2 ($n = 2$); 3 ($n = 3$); 4 ($n = 4$)

3. Расчет колебаний компенсаторного сиффона

Проведем расчет свободных и вынужденных колебаний компенсаторного сиффона как упругой гофрированной оболочки. Ее меридиан удобно задать в виде

$$\rho(x) = R + R_c \sin \lambda x, \quad \lambda \triangleq 2\pi m/x_L, \quad (26)$$

где R, R_c – образующие радиусы; m – число волн по длине оболочки; x_L – длина оболочки (рис. 4).

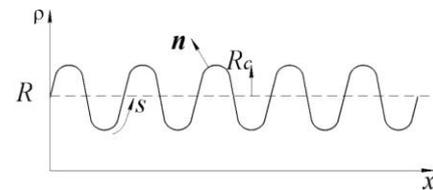


Рис. 4. Меридиан гофрированной оболочки

Fig. 4. The corrugated shell meridian

Для каждой точки меридиана вычисляется дуговая координата по формуле

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (\rho'_x)^2} dx,$$

затем строятся интерполяции $x(s)$, $\rho(s)$ и рассчитываются остальные коэффициенты системы (9):

$$\cos \psi = x'_s, \quad \sin \psi = \rho'_s, \quad \omega = \rho''_s (x'_s)^{-1}.$$

Расчеты проводились для сиффона Ду200 с параметрами: $R = 118$ мм, $x_L = 320$ мм, $R_c = 16,5$ мм. Толщина однослойного сиффона 3,5 мм, число волн $m = 7$. Материал – коррозионно-стойкая жаропрочная сталь 08X18H10T с модулем упругости $E = 210$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,28$ и плотностью $\rho = 7800$ кг/м³. Скорость звука в жидкости $c = 1500$ м/с, плотность жидкости $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

При расчете собственных частот предполагалось, что один край сальфона жестко заделан, другой свободен. Учет жидкости существенно изменяет собственные частоты сальфона (таблица), это необходимо принимать во внимание при его проектировании и эксплуатации. Заметим, что учет несжимаемой жидкости в модели дает несколько завышенные значения частот по сравнению с учетом сжимаемой жидкости, однако относительные погрешности частот в рассмотренном диапазоне не превышают 2 %.

Частоты свободных колебаний

Frequency of free oscillations

Номер гармоники n	Частота, Гц		
	без жидкости	несжимаемая жидкость с массой m_n	сжимаемая жидкость с массой M_n
1	146	97	97
	587	342	341
2	1189	906	902
	1243	929	926
3	2873	2042	2019
	3733	2843	2792

Рассмотрим далее вынужденные колебания сальфона, вызванные поперечным смещением одного торца по закону: $u = u_0 \sin \Omega t j$, где u_0 – вибрационная амплитуда. Здесь предполагается, что форма поперечного сечения остается окружностью. В компонентах для амплитуд при $n=1$ имеем на этом торце такие граничные условия: $\bar{u}_0 = -u_0$, $\bar{u}_l = u_0 \sin \psi$, $\bar{u}_n = u_0 \cos \psi$, $\bar{\gamma}_0 = 0$.

На рис. 5 представлены вычисленные перемещения и деформированная форма сальфона при амплитуде $u_0 = 0,1$ мм и частоте вибрации $\Omega = 314,16$ рад/с (50 Гц); на рис. 6 показаны усилия и изгибающий момент на его внутреннем контуре.

После определения сил и моментов необходимо вычислить напряжения на лицевых поверхностях [9]:

$$\sigma_r = \pm \frac{6\mu_l}{h^2} + \frac{\tau_l}{h}, \quad \sigma_\theta = \pm \frac{6\mu_0}{h^2} + \frac{\tau_0}{h}, \quad \sigma_{r0} = \pm \frac{6\mu_{r0}}{h^2} + \frac{\tau_{r0}}{h}, \quad (27)$$

где компоненты тензоров деформации и силовых факторов определяются по формулам (5)–(7).

Далее находятся компоненты девиатора напряжений и норма Мизеса S_{eqv} :

$$S_r = (2\sigma_r - \sigma_\theta)/3, \quad S_\theta = (2\sigma_\theta - \sigma_r)/3, \quad S_{r0} = S_{\theta r} = \sigma_{r0}, \quad (28)$$

$$S_{eqv} = \sqrt{S_r^2 + S_\theta^2 + 2S_{r0}^2}.$$

Начало пластических деформаций в оболочке определяется условием текучести [36]:

$$S_{eqv} = \tau_* / \sqrt{3}, \quad (29)$$

где τ_* – предел текучести материала при растяжении.

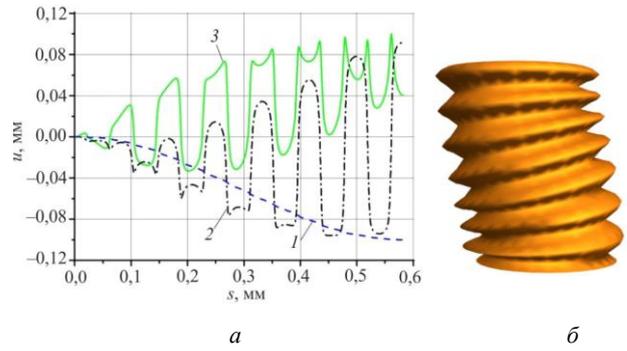


Рис. 5. Перемещения сальфона (а): 1 – окружное \bar{u}_0 ; 2 – осевое \bar{u}_l ; 3 – нормальное \bar{u}_n ; деформированная форма сальфона (б)

Fig. 5. The bellows displacements (a): 1 is circular \bar{u}_0 ; 2 is axial \bar{u}_l ; 3 is normal \bar{u}_n ; (b) is a deformed bellows

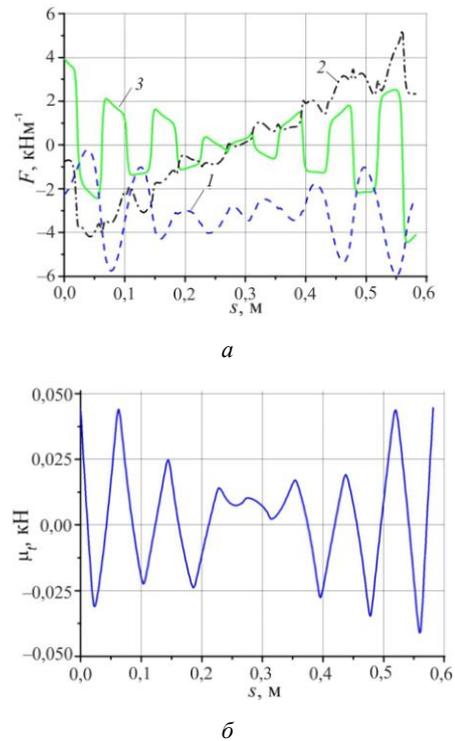


Рис. 6. Усилия в сальфоне (а): 1 – \bar{F}_0 ; 2 – \bar{T}_l ; 3 – \bar{F}_n ; изгибающий момент $\bar{\mu}_l$ (б)

Fig. 6. Forces in the bellows (a): 1 – \bar{F}_0 ; 2 – \bar{T}_l ; 3 – \bar{F}_n ; bending moment $\bar{\mu}_l$ (b)

Расчеты показали, что максимум нормы Мизеса S_{eqv}^{max} , соответствующий приложенному перемещению $u_0 = 0,1$ мм, равен 19,2 МПа. Предел текучести стали при растяжении $\tau_* = 205$ МПа. Учитывая линейность задачи и формулу (29), можно утверждать, что пластическая деформация в сальфоне на частоте 50 Гц начнется при значении вибрационного смещения торца u_0^{cr} , равном 0,62 мм.

Полученные в работе уравнения и разработанный алгоритм расчета колебаний гофрированной оболочки с жидкостью внутри могут служить основой для анализа динамики компенсаторных сифонов под произвольной нагрузкой.

Заключение

Проведены расчеты свободных и вынужденных колебаний трубопроводного компенсаторного сифона с учетом содержащейся в нем жидкости. Выведена и использована в расчетах формула для обобщенной присоединенной массы идеальной сжимаемой жидкости. Расчеты показали, что учет жидкости в сифоне вносит значительную корректировку в значения собственных частот, при высокочастотных колебаниях необходимо учитывать сжимаемость жидкости.

Библиографический список

1. Андреева Л.Е. Сифоны. Расчет и проектирование. – М.: Машиностроение, 1975. – 156 с.
2. Мирсаев Р.Н. Исследование колебаний комбинированных конструкций сифонных компенсаторов // Вестник УГАТУ. – 2006. – Т. 7, № 1. – С. 149–152.
3. Мирсаев Р.Н. Поперечные колебания сифонных компенсаторов трубопроводных систем // Вестник УГАТУ. – 2006. – Т. 7, № 1. – С. 147–149.
4. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Собственные колебания нагретых функционально-градиентных цилиндрических оболочек, содержащих жидкость // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 19–35. DOI: 10.15593/per.mech/2015.4.02
5. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Двумерные (оболочечные) и трехмерная модели для упругого тонкостенного цилиндра // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 50–70. DOI: 10.15593/per.mech/2014.3.04
6. Численное моделирование задачи устойчивости перфорированных оболочек / А.А. Антипов, А.А. Артемьева, В.Г. Баженов, М.Н. Жестков, А.И. Кибец // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 1. – С. 21–30. DOI: 10.15593/per.mech/2015.1.02
7. Карпов В.В. Уравнения в смешанной форме для ребристых оболочек общего вида и методика их решения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 116–134. DOI: 10.15593/per.mech/2019.2.09
8. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. О вариационных уравнениях расширенной теории N-го порядка упругих оболочек и их приложениях к некоторым задачам динамики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 36–59. DOI: 10.15593/per.mech/2015.2.03
9. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
10. Eliseev V., Vetyukov Yu. Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 209, iss. 1–2. – P. 43–57. DOI: 10.1007/s00707-009-0154-7
11. Eliseev V., Vetyukov Yu. Theory of shells as a product of analytical technologies in elastic body mechanics // Shell Structures: Theory and Applications. – 2014. – Vol. 3. – P. 81–85.
12. Eliseev V.V., Zinovieva T.V. Lagrangian mechanics of classical shells: theory and calculation of shells of revolution // Shell Structures: Theory and Applications. – 2018. – Vol. 4. – P. 73–76.
13. Zinovieva T.V. Calculation of shells of revolution with arbitrary meridian oscillations // Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Published by Springer International Publishing Switzerland, 2017. – P. 165–176. DOI: 10.1007/978-3-319-53363-6_17
14. Елисеев В.В., Пискунов В.А. Динамика и прочность пневмоклапана из композита // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. – 2017. – Т. 5, № 3. – С. 31–36.
15. Зиновьева Т.В. Колебания морских сооружений как упругих тонкостенных конструкций, взаимодействующих с жидкостью и буровой установкой: дис. ... канд. техн. наук / С.-Петербург. гос. мор. техн. ун-т. – СПб., 2005. – 168 с.
16. Filippenko G.V. The vibrations of reservoirs and cylindrical supports of hydro technical constructions partially submerged into the liquid // Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Published by Springer International Publishing Switzerland, 2016. – P. 115–126.
17. Filippenko G.V. Energy-flux analysis of the bending waves in an infinite cylindrical shell filled with acoustical fluid // Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Published by Springer International Publishing Switzerland, 2017. – P. 57–64. DOI: 10.1007/978-3-319-53363-6
18. Filippenko G.V. Waves with the negative group velocity in the cylindrical shell, filled with compressible liquid // Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Published by Springer International Publishing Switzerland, 2018. – P. 93–104. DOI: 10.1007/978-3-319-72929-9
19. Zinovieva T.V. Calculation of equivalent stiffness of corrugated thin-walled tube // Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Published by Springer International Publishing Switzerland, 2019. – P. 211–220. DOI: 10.1007/978-3-030-11981-2
20. Zinovieva T.V., Smirnov K.K., Belyaev A.K. Stability of Corrugated Expansion Bellows: Shell and Rod Models //

Acta Mechanica. – 2019. – Vol. 230. – P. 4125–4135. DOI: 10.1007/s00707-019-02497-6

21. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. – McGraw-Hill Education, New York, 2014. – P. 992.

22. Короткин А.И. Присоединительные массы судостроительных конструкций. – СПб.: МорВест., 2007. – 448 с.

23. Евсеев В.Н. О присоединенной массе жидкости при продольных колебаниях корпусных конструкций // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. – 2008. – № 40 (324). – С. 5–11.

24. Риман И.С., Крепс Р.Л. Присоединенные массы тел различной формы // Труды ЦАГИ. – № 635. – М., 1947.

25. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. 3 изд. – М., 1980. – 448 с.

26. Casetta L., Pesce, C.P., Flávia M. dos Santos. On the hydrodynamic vertical impact problem: an analytical mechanics approach // Marine Systems & Ocean Technology. – 2011. – Vol. 6. – P. 47–57.

27. Korobkin A. Analytical models of water impact // European Journal of Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 15 (06). – P. 821–838.

28. Casetta L., Pesce C.P. The Proper Definition of the Added Mass for the Water Entry Problem // 21st International Workshop on Water Waves and Floating Bodies. – Loughborough, UK, 2006.

29. Учет присоединенных масс жидкости в математических моделях сильфонных чувствительных элементов систем управления / А.С. Козлов, Р.Я. Лабковская, О.И. Пирожникова, В.Л. Ткалич // Известия вузов. Приборостроение. – 2015. – Т. 58, № 12. – С. 1016–1021. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-12-1016-1021

References

1. Andreeva L.E. Sil'fony. Raschet i proektirovanie [Bellows. Calculation and design]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 156 p.

2. Mirsaev R.N. Issledovanie kolebanij kombinirovannykh konstrukcij sil'fonnykh kompensatorov [Research of oscillations of expansion bellows combined structures]. *UGATU Bulletin*, 2006, V. 7, no. 1, pp. 149–152.

3. Mirsaev R.N. Poperechnye kolebanija sil'fonnykh kompensatorov truboprovodnykh sistem [Transverse oscillations of bellows expansion in piping systems]. *UGATU Bulletin*, 2006, V. 7, no. 1, pp. 147–149.

4. Bochkarev S.A., Lekomcev S.V. Sobstvennyye kolebanija nagretykh funkcional'no-gradientnykh cilindricheskikh obolochek, sodержashhih zhidkost' [Natural vibrations of heated functionally graded cylindrical shells with fluid]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, pp. 19–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.02

5. Eliseev V.V., Zinovieva T.V. Dvumernye (obolochechnye) i trehmernaja modeli dlja uprugogo tonkostennogo cilindra [Two-dimensional (shell-type) and three-dimensional models for elastic thin-walled cylinder]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 50–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.04

6. Antipov A.A., Artemyeva A.A., Bazhenov V.G., Zhestkov M.N., Kibec A.I. Chislennoe modelirovanie zadachi ustojchivosti perforirovannykh obolochek [Numerical modeling of perforated shell stability]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 21–30. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.02

7. Karpov V.V. Uravnenija v smeshanoj forme dlja rebriстыh obolochek obshhego vida i metodika ih reshenija [Mixed form equations for ribbed shells of a general type and their solutions]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 116–134. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.09

8. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. O variacionnykh uravnenijah rasshirenoj teorii N-go porjadka uprugih

30. Горелов Д.Н. Присоединенные массы жидкости, колеблющейся внутри кругового цилиндра при деформации его стенок // Вестник Омского университета. – 2014. – № 2. – С. 17–20.

31. Randall R. H. An Introduction to Acoustics. – Forgotten Books, 2017. – 356 p.

32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учебник. – 7-е изд. – М.: Наука, 2004. – 800 с.

33. Pesce C.P. The Application of Lagrange Equations to Mechanical Systems with Mass Explicitly Dependent on Position // *Journal of Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 70. – P. 751–756.

34. Belyaev A.K., Irschik H. Dynamics of mechanical systems with variable mass. – Springer Wien Heidelberg New York Dordrecht London, 2014. – 266 p.

35. Eke F.O., Mao T.C. On the dynamics of variable mass systems // *International Journal of Mechanical Engineering Education*. – 2002. – Vol. 30 (2). – P. 123–137.

36. Елисеев В.В. Механика деформируемого твердого тела. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 231 с.

37. Коссович Л.Ю., Вильде М.В., Шевцова Ю.В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, вып. 2. – С. 56–64. DOI: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64

38. Чулкин С.Г., Зиновьева Т.В. Расчет влияния водорода на прочность морского трубопровода // Морские интеллектуальные технологии. – 2019. – Т. 1, № 2 (44). – С. 31–35. DOI: 10.13140/RG.2.2.22027.34088

obolochek i ih prilozhenii k nekotorym zadacham dinamiki [On application of various n-th order shell theories to normal waves propagation problems]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 36–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.03

9. Eliseev V.V. Mehanika uprugih tel [Mechanics of elastic bodies]. SPb., SPbGPU Publishing House, 2003, 336 p.

10. Eliseev V., Vetyukov Yu. Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces. *Acta Mechanica*, 2010, vol. 209, Issue 1-2, pp. 43–57. DOI: 10.1007/s00707-009-0154-7

11. Eliseev V., Vetyukov Yu. Theory of shells as a product of analytical technologies in elastic body mechanics. *Shell Structures: Theory and Applications*, 2014, vol. 3, pp. 81–85.

12. Eliseev V.V., Zinovieva T.V. Lagrangian mechanics of classical shells: theory and calculation of shells of revolution. *Shell Structures: Theory and Applications*, 2018, vol. 4, pp. 73–76.

13. Zinovieva T.V. Calculation of shells of revolution with arbitrary meridian oscillations. *Advances in Mechanical Engineering, Lecture notes in Mechanical Engineering*. Published by Springer International Publishing Switzerland, 2017, pp. 165–176. DOI: 10.1007/978-3-319-53363-6_17

14. Eliseev V.V., Piskunov V.A. Dinamika i prochnost' pnevmoklapana iz kompozita [Dynamics and strength of pneumatic valve made of composite]. *Mashinostroenie: setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 31–36.

15. Zinovieva T.V. Kolebanija morskikh sooruzhenij kak uprugih tonkostennykh konstrukcij, vzaimodejstvujushhih s zhidkost'ju i burovoj ustanovkoj: diss. ... kand. teh. nauk [Oscillations of offshore structures as elastic thin-walled constructions interacting with fluid and a drilling rig: diss. ... PhD in Technical Sciences]. Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg, 2005, 168 p.

16. Filippenko G.V. The vibrations of reservoirs and cylindrical supports of hydro technical constructions partially submerged into the liquid. *Advances in Mechanical Engineering, Lecture notes in Mechanical Engineering*. Published by Springer International Publishing Switzerland, 2016, pp. 115–126.
17. Filippenko G.V. Energy-flux analysis of the bending waves in an infinite cylindrical shell filled with acoustical fluid. *Advances in Mechanical Engineering, Lecture notes in Mechanical Engineering*. Published by Springer International Publishing Switzerland, 2017, pp. 57–64. DOI: 10.1007/978-3-319-53363-6.
18. Filippenko G.V. Waves with the negative group velocity in the cylindrical shell, filled with compressible liquid. *Advances in Mechanical Engineering, Lecture notes in Mechanical Engineering*. Published by Springer International Publishing Switzerland, 2018, pp. 93–104. DOI: 10.1007/978-3-319-72929-9.
19. Zinovieva T.V. Calculation of equivalent stiffness of corrugated thin-walled tube. *Advances in Mechanical Engineering, Lecture notes in Mechanical Engineering*. Published by Springer International Publishing Switzerland, 2019, pp. 211–220. DOI: 10.1007/978-3-030-11981-2
20. Zinovieva T.V., Smirnov K.K., Belyaev A.K. Stability of Corrugated Expansion Bellows: Shell and Rod Models. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, pp. 4125–4135. DOI: 10.1007/s00707-019-02497-6
21. Chapra S.C., Canale R.P. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, New York, 2014, p. 992.
22. Korotkin A.I. Prisoedinitel'nye massy sudostroitel'nykh konstrukcij [Added masses of shipbuilding constructions]. SPb, MorVest., 2007, 448 p.
23. Evseev V.N. O prisoedinennoj masse zhidkosti pri prodol'nykh kolebanijah korpusnykh konstrukcij [About the added mass of the liquid at longitudinal vibrations of the vessel structures]. *Proceedings of the Central Research Institute of Acad. A.N. Krylov*, 2008, no. 40 (324), pp. 5–11.
24. Riman I.S., Kreps R.L. Prisoedinennye massy tel razlichnoj formy [Added masses of bodies of different shapes]. *Proceedings of TsAGI*, no. 635, Moscow, 1947.
25. Sedov L.I. Ploskie zadachi gidrodinamiki i ajerodinamiki [Planar hydrodynamics and aerodynamics problems]. 3d edn, Moscow, 1980, 448 p.
26. Casetta L., Pesce, C.P., Flávia M. dos Santos. On the hydrodynamic vertical impact problem: an analytical mechanics approach. *Marine Systems & Ocean Technology*, 2011, vol. 6, pp. 47–57.
27. Korobkin A. Analytical models of water impact. *European Journal of Applied Mathematics*, 2004, vol. 15 (06), pp. 821 – 838.
28. Casetta L., Pesce C.P. The Proper Definition of the Added Mass for the Water Entry Problem. *21st International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*. Loughborough, UK, 2006.
29. Kozlov A.S., Labkovskaja R.Ja., Pirozhnikova O.I., Tkalic V.L. Uchet prisoedinennykh mass zhidkosti v matematicheskikh modeljah sil'fonnykh chuvstvitel'nykh jelementov sistem upravlenija [Account of the added masses of liquid in mathematical models of bellows of sensitive elements of control systems]. *Izvestija VUZov. Priborostroenie*, 2015, vol. 58, no. 12, pp. 1016–1021. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-12-1016-1021
30. Gorelov D.N. Prisoedinennye massy zhidkosti, koleblju-shhejsja vnuti krugovogo cilindra pri deformacii ego stenok [Added masses of liquid oscillating inside the circular cylinder when deforming its walls]. *Om. univ. Bulletin*, 2014, no. 2, pp. 17–20.
31. Randall R. H. *An Introduction to Acoustics*. Forgotten Books, 2017, 356 p.
32. Tihonov A.N., Samarskij A.A. *Uravnenija matematicheskoj fiziki [The equations of mathematical physics]*. Textbook, 7th ed. Moscow, Nauka, 2004, 800 p.
33. Pesce C.P. The Application of Lagrange Equations to Mechanical Systems with Mass Explicitly Dependent on Position. *Journal of Applied Mechanics*, 2003, vol. 70, pp. 751–756.
34. Belyaev A.K., Irschik H. *Dynamics of mechanical systems with variable mass*. Springer Wien Heidelberg New York Dordrecht London, 2014, 266 p.
35. Eke F.O., Mao T.C. On the dynamics of variable mass systems. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 2002, 30 (2), pp. 123–137.
36. Eliseev V.V. *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable rigid body]*. SPb., SPbGPU Publishing House, 2006, 231 p.
37. Kossovich L.Ju., Vil'de M.V., Shevcova Ju.V. Asimptoticheskoe integrirovanie dinamiceskikh uravnenij teorii uprugosti dlja sluchaja mnogoslujnoj tonkoj oblochki [Asymptotic integration of the dynamic equations of elasticity theory for the case of a multilayer thin shell]. *Izv. Sarat. un-ta. nov. ser. Ser. Matematika. Mehanika. Informatika*, 2012, vol. 12, issue 2, pp. 56-64. DOI: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64
38. Chulkin S.G., Zinovieva T.V. Raschet vlijanija vodoroda na prochnost' morskogo truboprovoda [Calculation of hydrogen influence on the strength of marine pipeline]. *Marine Intellectual Technologies*, 2019, no. 2 (44), vol. 1, pp. 31-35. DOI: 10.13140/RG.2.2.22027.34088