

Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Сукиязов А.Г., Айзикович С.М. Индикация термоупругой неустойчивости скользящего контакта с помощью заглубленной пьезокерамической прослойки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 63–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05

Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Sukiyaov A.G., Aizikovich S.M. Indication of thermoelastic instability of sliding contact using embedded piezoceramic interlayer. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017. No. 1. Pp. 63-84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05

УДК 539.319 : 531.44 : 537.226.86

ИНДИКАЦИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СКОльзяЩЕГО КОНТАКТА С ПОМОЩЬЮ ЗАГЛУБЛЕННОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПРОСЛОЙКИ

В.Б. Зеленцов, Б.И. Митрин, А.Г. Сукиязов, С.М. Айзикович

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 03 июня 2016 г.
Принята: 27 февраля 2017 г.
Опубликована: 30 марта 2017 г.

Ключевые слова:

термоупругость,
термоупругая неустойчивость,
электроупругость, пьезокерамика,
нестационарная динамическая
контактная задача, диагностика,
скользящий контакт.

АННОТАЦИЯ

При эксплуатации триботехнических агрегатов и устройств может возникнуть неустойчивость скользящего фрикционного контакта, сопровождающаяся ростом температуры и напряжений, что часто приводит к возникновению нештатных ситуаций, аварий и т.п. Для предупреждения таких явлений предлагается система мониторинга возникновения неустойчивости, основанная на опосредованной индикации температуры и напряжений с помощью измерения и анализа индукции и напряженности электрического поля на встроенной пьезокерамической прослойке. С целью моделирования такой схемы мониторинга термоупругой неустойчивости рассматривается нестационарная динамическая контактная задача термоэлектроупругости о скольжении жесткого тела в виде полуплоскости по поверхности упругого покрытия. Контакт осуществляется с учётом сил трения и тепловыделения от трения. Пьезокерамическая прослойка располагается между упругим покрытием и недеформируемым основанием и жестко сцеплена с ними. При этом пьезокерамическая прослойка термоизолирована от термоупругого покрытия, вектор предварительной поляризации направлен вдоль вертикальной оси, ортогональной граням прослойки, на которых располагаются электроды с подведённой разностью потенциалов.

Решение поставленной задачи о скользящем термофрикционном контакте строится с помощью интегрального преобразования Лапласа, позволяющего представить основные физические параметры задачи: температуру, напряжения, смещения, индукцию и напряженность электрического поля, электростатический потенциал в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа или свёртки Лапласа. После изучения свойств подынтегральных функций и изолированных особых точек в комплексной плоскости переменной интегрирования квадратуры вычисляются

© **Зеленцов Владимир Борисович** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: vbzelen@gmail.com

Митрин Борис Игоревич – младший научный сотрудник, e-mail: bmitrin@dstu.edu.ru

Сукиязов Александр Гургенович – кандидат физико-математических наук, профессор, e-mail: radio_ras@mail.ru

Айзикович Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, e-mail: saizikovich@gmail.com

Vladimir B. Zelentsov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: vbzelen@gmail.com

Boris I. Mitrin – Junior Researcher, e-mail: bmitrin@dstu.edu.ru

Alexander G. Sukiyaov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: radio_ras@mail.ru

Sergey M. Aizikovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory, e-mail: saizikovich@gmail.com

ся методами теории функций комплексного переменного. Вычисление квадратур приводит к бесконечным рядам по полюсам подынтегральных функций, являющихся собственными числами задачи. Решение в такой форме позволяет достаточно просто установить области устойчивых и неустойчивых решений задачи на бесконечном временном интервале. Формулы электрического тока и его напряженности, возникающих на пьезокерамической прослойке, совместно с формулами температуры и напряжений на скользящем контакте позволяют во времени диагностировать процесс возникновения и развития термоупругой неустойчивости скользящего контакта.

© ПНИПУ

INDICATION OF THERMOELASTIC INSTABILITY OF SLIDING CONTACT USING EMBEDDED PIEZOCERAMIC INTERLAYER

V.B. Zelentsov, B.I. Mitrin, A.G. Sukiyazov, S.M. Aizikovich

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 June 2016
Accepted: 27 February 2017
Published: 30 March 2017

Keywords:

thermoelasticity, thermoelastic instability, electroelasticity, piezoceramics, nonstationary dynamic contact problem, diagnostics, sliding contact.

ABSTRACT

Operation of tribotechnical components and devices is subjected to the instability of the sliding frictional contact, accompanied by an increase in temperature and pressure, which often leads to emergency situations, accidents, etc. In order to prevent such phenomena, a system for monitoring the occurrence of instability is proposed. It is based on an indirect indication of temperature and stress by measuring and analyzing the induction and electric fields in the internal piezoceramic interlayer. In order to model such a monitoring scheme of thermoelastic instability, a non-stationary dynamic contact problem of the thermoelectroelasticity is considered for a rigid body sliding over a half-plane coated by an elastic layer. Friction forces and frictional heat generation at the contact spot are taken into account. Piezoceramic layer is located between the elastic coating and non-deformable base and perfectly bonded to them. The piezoceramic layer is insulated from the thermoelastic coating; its polarization vector is directed along the vertical axis orthogonal to boundaries of the piezoceramic layer. These boundaries have electrodes placed on them with a different supplied voltage.

The solution of the problem on the sliding thermoelastic frictional contact is constructed using the Laplace integral transform, which allows to present the basic physical parameters of the problem, such as the temperature, voltage, displacement, induction and electric field strength, the electrostatic potential in the form of contour integrals of the inverse Laplace transform, or as the Laplace convolution. After studying the properties of the integrands and their isolated singular points in the complex plane of the integration variable, the integrals are calculated using the methods of complex analysis. The calculation of the integrals leads to infinite series over the poles of the integrands, which are the eigenvalues of the problem. The solution in this form allows to determine the domains of stable and unstable problem solutions at an infinite time interval. Expressions for the electric current and voltage in the piezoceramic interlayer as well as the expressions for contact temperature and stresses, allow diagnosing the emergence and development of thermoelastic instability of the sliding contact.

© PNRPU

Введение

Причинами возникновения термоупругой неустойчивости (ТУН) [1] скользящего контакта в узлах трения современных машин и механизмов, как в машиностроении, так и на транспорте, являются повышение скоростного режима их эксплуатации, несовершенство конструкций и материалов изготовления, усложнение условий эксплуатации. Стремительное развитие неустойчивости, проявляющееся прежде всего в галопирующем росте температуры и напряжений на контакте, может привести к возникновению нештатных ситуаций, аварий. Экспериментально ТУН обнаруживалась и исследовалась в раз-

личных технических системах со скользящим фрикционным контактом, в том числе в дисковых тормозных системах [1–4], в уплотнениях валов [5] и др.

Меры по предотвращению возникновения термоупругой неустойчивости на этапе проектирования триботехнического устройства заключаются в подборе геометрических параметров и материалов устройства. Для этого развиваются математические модели скользящего фрикционного контакта с учетом разогрева от трения. Для определения параметров контакта, при которых возникает ТУН, Dow и Burton [6] предложили использовать метод малых возмущений, который на сегодняшний день остаётся основным методом прогнозирования ТУН [6–15]. Однако, метод малых возмущений может дать ответ только на вопрос, является ли система устойчивой при заданных параметрах, но не позволяет определить характеристики скользящего контакта, такие как напряжения или температуру. Часто для их нахождения используются численные методы. На основе результатов анализа принимаются решения по конструкции и комплектации узла трения, позволяющие избежать возникновения эксплуатационной ТУН [16–17].

Эксплуатация узлов трения сопряжена с изменением термомеханических свойств контактирующих материалов, что также может со временем привести к возникновению ТУН. Во избежание таких ситуаций и для снижения уровня их возникновения необходима ранняя (упреждающая) диагностика возникновения ТУН на стадии эксплуатации узлов трения. Одним из методов диагностики ТУН скользящего контакта является мониторинг развития основных её параметров, таких как температура и напряжения в узлах трения. Для построения эффективной системы мониторинга необходим теоретический прогноз основных физических и механических параметров устойчивого и неустойчивого скользящего контакта с учетом трения и тепловыделения от трения. Это требует решения динамических и квазистатических задач термоупругости о скользящем фрикционном контакте с учетом его разогрева от трения. Наиболее универсальным аналитическим методом решения начально-краевых задач термоупругости является метод интегральных преобразований. В работе [18] рассмотрена термоупругая задача о скольжении плиты по поверхности слоя на недеформируемом основании с фрикционным тепловыделением с помощью метода интегральных преобразований. Получено асимптотическое решение задачи при малых, средних и больших значениях времени и установлен критерий возникновения ТУН. В работе [19] для решения квазистатической термоупругой задачи об износе покрытия на жёстком основании при скользящем термофрикционном контакте используется интегральное преобразование Лапласа, получено асимптотическое решение задачи при малых значениях времени. В работах [20–21] решение термоупругодинамической задачи о скольжении плиты по поверхности покрытия с учетом тепловыделения от трения построено в виде рядов по собственным числам задачи. Был исследован процесс развития температуры и напряжений на контакте во времени при термоупругодинамической неустойчивости контакта.

Отметим, что в большинстве работ, посвященных исследованию термоупругой неустойчивости (ТУН), в качестве области ТУН принимается параметрическая область неустойчивых решений квазистатической задачи термоупругости о скользящем фрикционном контакте. В работах [11, 12, 20–21] было показано, что область неустойчивых решений квазистатических задач термоупругости является подобластью области неустойчивых решений соответствующих динамических задач. Другими словами, при тех же параметрах, при которых решение квазистатической задачи устойчиво, решение соответствующей динами-

ческой задачи может быть неустойчиво. Это обуславливает важность изучения устойчивости решений задач о скользящем термофрикционном контакте в динамической постановке с целью предотвращения возникновения аварийных ситуаций, связанных с ТУН.

Для мониторинга параметров контакта на практике широко используются пьезоэлектрические датчики. Поведение пьезоэлектрических материалов при контактном взаимодействии исследуется в рамках контактных задач электроупругости [22–24] и электротермоупругости [25]. Хрупкость и термочувствительность не позволяет размещать пьезодатчики непосредственно на контакте. В работе [26] рассматривалась задача о скольжении жёсткого тела по поверхности упругого покрытия при наличии между покрытием и жёстким основанием пьезоэлектрической прослойки. Электромеханические характеристики прослойки описывались упрощенными уравнениями пьезоэффекта [27].

Здесь с целью изучения влияния механических и электрических характеристик пьезоэлектрической прослойки на устойчивость скользящего контакта рассматривается нестационарная задача термоэлектроупругости о скольжении жёсткой плиты по поверхности термоупругого покрытия при наличии между покрытием и подложкой теплоизолированной пьезоэлектрической прослойки, включенной в замкнутую электрическую цепь.

1. Постановка задачи индикации параметров скользящего контакта

Для исследования возможности индикации температуры и напряжений, возникающих на скользящем контакте, рассматривается нестационарная динамическая контактная задача термоэлектроупругости о скольжении с постоянной скоростью жёсткой полуплоскости I по поверхности упругого покрытия A, сцепленного по нижней грани с электроупругой нетеплопроводной прослойкой B, вектор поляризации которой ортогонален её граням. По нижней своей грани прослойка сцеплена с недеформируемой подложкой в виде полуплоскости II (рис. 1). Полуплоскость I в процессе скольжения внедряется в упругое покрытие по нормали к его поверхности. Скольжение теплоизолированной недеформируемой полуплоскости I по поверхности упругого покрытия осуществляется с учётом кулоновского трения, порождающего тепло. Тепловой поток, образующийся за счёт трения на контакте, направлен в упругое покрытие A. Грани электроупругой прослойки B покрыты электродами с подведенной разностью потенциалов. В начальный момент смещения их скорости в покрытии и в электроупругой прослойке равны нулю, как и начальная температура в покрытии.

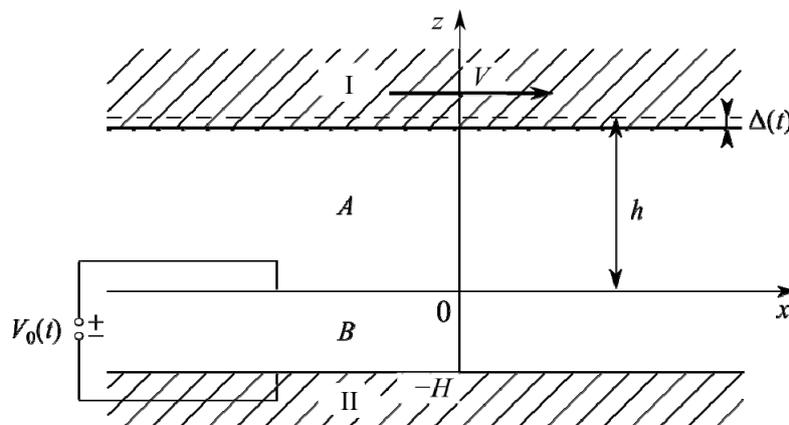


Рис. 1. Схема рассматриваемой контактной задачи
 Fig. 1. Scheme of the considered contact problem

Согласно формулировке рассматриваемой задачи о деформации двухслойного покрытия все основные физические параметры – температура, напряжения, смещения, электрическая индукция, напряжённость электрического поля – не зависят от выбора горизонтальной координаты и являются функциями только вертикальной координаты и времени. В этом случае поведение термоупругого покрытия A описывается системой дифференциальных уравнений плоской теории упругости совместно с уравнением теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad 0 < z < h, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

в которых $u(z,t)$, $w(z,t)$ – вертикальное и горизонтальное смещения в термоупругом покрытии; $\sigma_{zz}(z,t)$, $\sigma_{xz}(z,t)$ – нормальные и касательные напряжения; $T(z,t)$ – температура; ρ – плотность; κ – коэффициент температуропроводности. Формулы Дюамеля–Неймана [28] устанавливают связь между напряжениями, смещениями и температурой,

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \quad \sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2)$$

где λ , μ – постоянные Ламе; α – коэффициент линейного расширения.

Подставляя (2) в (1), получим уравнения термоупругости для покрытия A :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha \frac{\partial T}{\partial z}, \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad 0 < z < h, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

где a , b – скорости продольной и поперечной упругих волн.

Поведение электроупругой прослойки B описывается системой дифференциальных уравнений плоской теории упругости совместно с уравнениями вынужденной электростатики в акустическом приближении [27]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}^1}{\partial z} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^1}{\partial z} &= \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad -H < z < 0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0, \quad E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

где u_1 , w_1 – упругие смещения; σ_{zz}^1 , σ_{xz}^1 – нормальные и касательные напряжения; D_z и E_z – электростатическая индукция и напряжённость электрического поля; ψ – функция электростатического потенциала; ρ_1 – плотность материала пьезокерамики.

Уравнения пьезоэффекта с вектором поляризации электроупругого материала в направлении оси z в нашем случае имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^1 &= c_{33}^E \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \sigma_{xz}^1 &= c_{44}^E \frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ D_z &= \epsilon_{33}^S E_z + e_{33} \frac{\partial u_1}{\partial z},\end{aligned}\tag{7}$$

где c_{33}^E , c_{44}^E – модули упругости (измеряемые при постоянном электрическом поле); e_{33} – пьезомодуль; ϵ_{33}^S – диэлектрическая проницаемость (измеряемая при постоянной деформации).

Подставляя соотношения (5) в (4), получим уравнения электроупругости для прослойки B из пьезокерамического материала, поляризованного в направлении оси z ,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad a_1^2 = \frac{c_{33}^E + c_1^2 e_{33}}{\rho_1},\tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{1}{b_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0, \quad b_1^2 = \frac{c_{44}^E}{\rho_1}, \quad -H < z < 0, \quad t > 0,\tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad c_1^2 = \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S},\tag{10}$$

где a_1 , b_1 – скорости продольной и поперечной волн в прослойке B .

Граничные условия сформулированной динамической задачи о скользящем контакте записываются в следующем виде:

механические

$$z = h \quad u(h, t) = -\Delta(t),\tag{11}$$

$$\sigma_{xz}(h, t) = -f \sigma_{zz}(h, t),\tag{12}$$

$$z = 0 \quad u(0, t) = u_1(0, t), \quad \sigma_{zz}(0, t) = \sigma_{zz}^1(0, t),\tag{13}$$

$$w(0, t) = w_1(0, t), \quad \sigma_{xz}(0, t) = \sigma_{xz}^1(0, t),\tag{14}$$

$$z = -H \quad u_1(-H, t) = 0,\tag{15}$$

$$w_1(-H, t) = 0,\tag{16}$$

температурные

$$z = h \quad K \frac{\partial T(h, t)}{\partial z} = -fV \sigma_{zz}(h, t),\tag{17}$$

$$z = 0 \quad T(0, t) = 0,\tag{18}$$

и электрические

$$z = 0 \quad \psi(0, t) = V_0(t), \quad (19)$$

$$z = -H \quad \psi(-H, t) = -V_0(t), \quad (20)$$

где f – коэффициент трения; V – скорость скольжения; K – коэффициент теплопроводности; $\Delta(t)$ – закон внедрения полуплоскости I в упругое покрытие; h – толщина покрытия; H – толщина пьезокерамической прослойки; $2V_0(t)$ – разность потенциалов на электродах.

К дифференциальным уравнениям (3)–(5), (8)–(10) необходимо добавить нулевые начальные условия на смещения u , w , u_1 , w_1 , на их скорости, температуру T , потенциал ψ и закон внедрения Δ :

$$\begin{aligned} u(z, 0) = u_1(z, 0) = w(z, 0) = w_1(z, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(z, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u_1(z, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w(z, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w_1(z, 0)}{\partial t} = 0, \\ T(z, 0) = \psi(z, 0) = \Delta(0) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Замечание 1. Анализ поставленной задачи – дифференциальных уравнений (3)–(5) и (8)–(10) и граничных условий (11)–(20) – показывает, что вертикальные смещения в покрытии $u(z, t)$ определяются независимо от горизонтальных смещений $w(z, t)$. Горизонтальные смещения $w(z, t)$ определяются через вертикальные смещения $u(z, t)$ после определения последних. В связи с этим горизонтальные смещения $w(z, t)$ не несут существенной информации и потому здесь не рассматриваются.

2. Решение задачи в квадратурах

Решение динамической начально-краевой задачи (1)–(21) строится с помощью интегрального преобразования Лапласа [29]

$$u^L(x, p) = \int_0^\infty u(z, t) e^{-pt} dt, \quad u(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} u^L(z, p) e^{pt} dp, \quad \text{Re } p > 0. \quad (22)$$

Для этого интегральное преобразование Лапласа с учётом *Замечания 1* применяется к дифференциальным уравнениям (3), (5), (8), (10) при нулевых начальных условиях (21). В результате получается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 u^L}{dz^2} - \frac{p^2}{a^2} u^L = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\partial T^L}{\partial z}, \quad 0 < z < h, \quad (23)$$

$$\frac{\partial T^L}{\partial z} - \frac{p}{\kappa} T^L = 0, \quad 0 < z < h, \quad (24)$$

$$\frac{d^2 u_1^L}{dz^2} - \frac{p^2}{a_1^2} u_1^L = 0, \quad -H < z < 0, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \psi^L}{dz^2} = c_1^2 p^2 u_1^L, \quad -H < z < 0 \quad (26)$$

относительно неизвестных трансформант $u^L(z, p)$, $T^L(z, p)$, $u_1^L(z, p)$, $\psi^L(z, p)$, которые разыскиваются в виде

$$T^L(z, p) = A_1 \operatorname{sh} \sqrt{p\kappa^{-1}} z + A_2 \operatorname{ch} \sqrt{p\kappa^{-1}} z, \quad (27)$$

$$u^L(z, p) = A_3 \frac{\operatorname{sh} pa^{-1} z}{pa^{-1}} + A_4 \operatorname{ch} pa^{-1} z + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\sqrt{p\kappa^{-1}}}{p\kappa^{-1} - p^2 a^{-2}} \left(A_1 \operatorname{ch} \sqrt{p\kappa^{-1}} z + A_2 \operatorname{sh} \sqrt{p\kappa^{-1}} z \right), \quad (28)$$

$$u_1^L(z, p) = A_5 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{pa_1^{-1}} z}{pa_1^{-1}} + A_6 \operatorname{ch} \sqrt{pa_1^{-1}} z, \quad (29)$$

$$\psi^L(z, p) = a^2 \left(A_5 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{pa_1^{-1}} z}{pa_1^{-1}} + A_6 \operatorname{ch} \sqrt{pa_1^{-1}} z \right) + A_7 z + A_8, \quad (30)$$

где A_k $k=1-8$ – неизвестные, зависящие от p . Для определения неизвестных A_k $k=1-8$, содержащихся в (27)–(30), используются граничные условия задачи (11), (13), (15), (17)–(20) в трансформантах Лапласа, полученных после применения к граничным условиям преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} u^L(h, p) &= -\Delta(p), \\ u^L(0, p) &= u_1^L(0, p), \\ \sigma_{zz}^L(0, p) &= \sigma_{zz}^{1L}(0, p), \\ u_1^L(-H, p) &= 0, \\ K \frac{dT^L(h, p)}{dz} &= -fV \sigma_{zz}^L(h, p), \\ T^L(0, p) &= 0, \\ \psi^L(0, p) &= V_0^L(p), \\ \psi^L(-H, p) &= -V_0^L(p). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставив (27)–(30) в граничные условия (31) с учётом формул для трансформант σ_{zz}^L и σ_{zz}^{1L} ,

$$\sigma_{zz}^L(z, p) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{du^L}{dz} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha T^L, \quad (32)$$

$$\sigma_{zz}^{1L}(z, p) = c_{33}^e \frac{du_1^L}{dz} + e_{33} \frac{d\psi^L}{dz}, \quad (33)$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения A_k $k=1-8$, которая здесь не выписывается.

Определив A_k $k=1-8$ и подставив их в (27)–(30), а также в (32), (33), получим трансформанты $u^L(z, p)$, $T^L(z, p)$, $\sigma_{zz}^L(z, p)$, $u_1^L(z, p)$, $\sigma_{zz}^{1L}(z, p)$, $\psi^L(z, p)$. После их обращения по Лапласу (22) получим решения поставленной задачи в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа:

$$T(z, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\hat{V}}{\alpha h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) \frac{N_T(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta - \theta \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} W(\zeta) \frac{M_T(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta \right] \quad \begin{matrix} 0 \leq z \leq h, \\ t > 0, \end{matrix} \quad (34)$$

$$u(z, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) \frac{N_u(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta + \theta \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} W(\zeta) \frac{M_u(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta \quad \begin{matrix} 0 \leq z \leq h, \\ t > 0, \end{matrix} \quad (35)$$

$$\sigma_{zz}(z, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) \frac{N_{\sigma}(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} W(\zeta) \frac{M_{\sigma}(\zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta \right] \quad \begin{matrix} 0 \leq z \leq h, \\ t > 0, \end{matrix} \quad (36)$$

$$u_1(z, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) \frac{N_{u_1}(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta - \theta \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} W(\zeta) \frac{M_{u_1}(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta, \quad \begin{matrix} -H \leq z \leq 0, \\ t > t_a, \end{matrix} \quad (37)$$

$$\sigma_{zz}^1(z, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) \frac{N_{\sigma_1}(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta + \theta \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} W(\zeta) \frac{M_{\sigma_1}(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta \right] + \frac{2e_{33}}{H} V_0(t), \quad \begin{matrix} -H \leq z \leq 0, \\ t > t_a, \end{matrix} \quad (38)$$

$$\psi(z, t) = -\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) \frac{N_{\psi}(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta + \theta \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} W(\zeta) \frac{M_{\psi}(z, \zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta \right] + \frac{2z+H}{H} V_0(t), \quad \begin{matrix} -H \leq z \leq 0, \\ t > t_a, \end{matrix} \quad (39)$$

$$N_T(z, \zeta) = \sqrt{\zeta}(1-\gamma^2\zeta)R_1^*(\zeta) \operatorname{sh}(\sqrt{\zeta}zh^{-1}), \quad \eta H_* M_T(z, \zeta) = \sqrt{\zeta}(1-\gamma^2\zeta) \operatorname{sh}(\gamma\zeta a_* H_*) \operatorname{sh}(\sqrt{\zeta}zh^{-1}),$$

$$\gamma\zeta N_u(z, \zeta) = \zeta m_0(\zeta) R_3(\zeta) \operatorname{sh}(\gamma\zeta zh^{-1}) + R_4(\zeta) \gamma\zeta \operatorname{ch}(\gamma\zeta zh^{-1}) - \hat{V} \gamma\zeta R_1^*(\zeta) \operatorname{ch}(\sqrt{\zeta}zh^{-1}),$$

$$\gamma\zeta M_u(z, \zeta) = \zeta \operatorname{sh}(\gamma\zeta a_* H_*) R_1(\zeta) \operatorname{sh}(\gamma\zeta zh^{-1}) - R_4^*(\zeta) \zeta \operatorname{ch}(\gamma\zeta zh^{-1}) - \hat{V} \gamma\zeta \sqrt{\zeta}(1-\gamma^2\zeta) \operatorname{sh}(\gamma\zeta a_* H_*) \operatorname{ch}(\sqrt{\zeta}zh^{-1}),$$

$$N_{\sigma}(z, \zeta) = R_3(\zeta) \operatorname{ch}(\gamma\zeta zh^{-1}) + R_4(\zeta) \gamma\zeta \operatorname{sh}(\gamma\zeta zh^{-1}) - \gamma \hat{V} \gamma\zeta \sqrt{\zeta} R_1^*(\zeta) \operatorname{sh}(\sqrt{\zeta}zh^{-1}),$$

$$\gamma M_{\sigma}(z, \zeta) = \gamma \operatorname{sh}(\gamma\zeta a_* H_*) R_1(\zeta) \operatorname{ch}(\gamma\zeta zh^{-1}) - R_4^*(\zeta) \zeta \operatorname{sh}(\gamma\zeta zh^{-1}) - \gamma \hat{V} \gamma\zeta \sqrt{\zeta} \operatorname{sh}(\gamma\zeta a_* H_*) \operatorname{sh}(\sqrt{\zeta}zh^{-1}),$$

$$N_{u_1}(z, \zeta) = H_* \zeta R_3(\zeta) \operatorname{sh}(\gamma\zeta a_* H_*(zH^{-1}+1)),$$

$$M_{u_1}(z, \zeta) = R_0(\zeta) \operatorname{sh}(\gamma\zeta a_* H_*(zH^{-1}+1)),$$

$$N_{\sigma_1}(z, \zeta) = \zeta R_3(\zeta) l_1(z, \zeta), \quad \gamma \eta M_{\sigma_1}(z, \zeta) = R_0(\zeta) l_1(z, \zeta),$$

$$\begin{aligned}
 N_\psi(z, \zeta) &= H_* \zeta R_3(\zeta) l_0(z, \zeta), \quad \gamma \eta M_\psi(z, \zeta) = H_* R_0(\zeta) l_0(z, \zeta), \\
 R(\zeta) &= H_* \zeta \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) R_1(\zeta) + \gamma^{-1} m_0(\zeta) R_0(\zeta), \\
 m_0(\zeta) &= \delta \gamma \zeta a_* H_* \operatorname{ch}(\gamma \zeta a_* H_*) - \delta_* \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*), \\
 R_0(\zeta) &= (1 - \gamma^2 \zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \gamma \zeta - \hat{V} \gamma (\operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \gamma \zeta - \gamma \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \gamma \zeta - 1), \\
 R_1(\zeta) &= (1 - \gamma^2 \zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \gamma \zeta - \hat{V} \gamma (\operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \gamma \zeta - \gamma \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \gamma \zeta), \\
 R_1^*(\zeta) &= \gamma \zeta H_* \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) \operatorname{sh} \gamma \zeta + m_0(\zeta) \operatorname{ch} \gamma \zeta, \\
 R_3(\zeta) &= (1 - \gamma^2 \zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} - \hat{V} \gamma (\operatorname{sh} \gamma \zeta - \gamma \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta}), \\
 R_4(\zeta) &= \zeta (1 - \gamma^2 \zeta) H_* \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) + \hat{V} \gamma (H_* \gamma \zeta \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) + \gamma^{-1} m_0(\zeta) \operatorname{ch} \gamma \zeta), \\
 R_4^*(\zeta) &= \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) (R_0(\zeta) - \tilde{V} \gamma), \\
 l_0(z, \zeta) &= \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_* (z H^{-1} + 1)) - (z H^{-1} + 1) \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*), \\
 l_1(z, \zeta) &= \delta \gamma \zeta a_* H_* \operatorname{ch}(\gamma \zeta a_* H_* (z H^{-1} - 1)) - \delta_* \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*), \\
 D(\zeta) &= t_\kappa^{-1} \Delta^L(\zeta t_\kappa), \quad W(\zeta) = t_\kappa^{-1} V_0^L(\zeta t_\kappa),
 \end{aligned}$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_\kappa}, \quad t_\kappa = \frac{h^2}{\kappa}, \quad \gamma = \frac{\kappa}{ah}, \quad \eta = \frac{H_*}{\delta_0}, \quad \delta = \delta_0 + \delta_*, \quad \delta_0 = \frac{c_{33}^E}{\lambda + 2\mu}, \quad \delta_* = \frac{c_1^2 e_{33}}{\lambda + 2\mu}, \quad \theta = \frac{2e_{33}}{c_{33}^E},$$

$$\hat{V} = \frac{fV\alpha}{K} \frac{2\mu(1+\nu)h}{1-2\nu}, \quad a_* = \frac{a}{a_1}, \quad H_* = \frac{H}{h}, \quad \Gamma = \{ \zeta : -i\infty + dt_\kappa, i\infty + dt_\kappa \},$$

где d подбирается таким образом, чтобы все изолированные особые точки подынтегральных функций в (34)–(39) лежали бы левее контура Γ .

Электрический ток $I_0(t)$ на единицу площади, протекающий по электроду на верхней грани пьезоэлектрической прослойки при $z=0$, образованный за счёт деформации пьезоэлектрической прослойки и разности потенциалов $2V_0(t)$ между верхней и нижней гранями прослойки, вычисляется по формуле

$$I_0(t) = -H^{-1} e_{33} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma D(\zeta) \frac{N_I(\zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta \tilde{t}} d\zeta + \theta \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma W(\zeta) \frac{M_I(\zeta)}{R(\zeta)} e^{\zeta \tilde{t}} d\zeta \right] + 2H^{-1} \epsilon_{33}^S \dot{V}_0(t). \quad (40)$$

$$N_I(\zeta) = e_{33} \left(\frac{\partial N_\psi(0, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial N_{u_1}(0, \zeta)}{\partial z} \right) = t_\kappa^{-1} H_* \zeta^2 R_3(\zeta) m_1(\zeta).$$

$$M_I(\zeta) = e_{33} \left(\frac{\partial M_\psi(0, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial M_{u_1}(0, \zeta)}{\partial z} \right) = t_\kappa^{-1} \zeta R_0(\zeta) (H_* (\gamma \eta)^{-1} m_1(\zeta) + \gamma \zeta a_* H_* \operatorname{ch}(\gamma \zeta a_* H_*)).$$

$$m_1(\zeta) = 2\gamma \zeta a_* H_* \operatorname{ch}(\gamma \zeta a_* H_*) - \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*).$$

Исследование подынтегральных функций в (34)–(40) показывает, что все они мероморфны в комплексной плоскости переменной интегрирования $\zeta = \xi + i\eta$, то есть имеют в качестве изолированных особых точек только полюсы.

Для существования контурных квадратур в (34)–(40) необходимо наличие степенного убывания подынтегральных функций на бесконечности при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Анализ подынтегральных функций в (34)–(40) приводит к следующим оценкам при $|\zeta| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} N_T(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta^{1/2}), & M_T(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta^{-1/2}), \\ N_u(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(1), & M_u(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta^{-1/2}), \\ N_\sigma(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta), & M_\sigma(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(1), \\ N_u^1(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(1), & M_u^1(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta^{-1}), \\ N_\sigma^1(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta), & M_\sigma^1(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(1), \\ N_\psi(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(1), & M_\psi(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta^{-1}), \\ N_I(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta^2), & M_I(z, \zeta)R^{-1}(\zeta) &= O(\zeta). \end{aligned} \quad (41)$$

Оценки (41) подынтегральных квадратур (34)–(40) показывают, что часть квадратур существует в обобщенном смысле [30] и для вычисления регулярной составляющей значения интеграла требуется регуляризация подынтегральных функций при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Регуляризация подынтегральных функций на бесконечности может осуществляться с помощью специальным образом построенных и выделенных асимптотических выражений, например [26]:

$$\begin{aligned} \frac{N_u(z, \zeta)}{R(\zeta)} &= L(z, \zeta) + F(z, \zeta), & F(z, \zeta) &= O(\zeta^{-1/2}) & \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty, & (42) \\ L(z, \zeta) &= \frac{\delta a_* \operatorname{ch}(\gamma \zeta a_* H_*) \operatorname{sh}(\gamma \zeta z h^{-1}) + \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) \operatorname{ch}(\gamma \zeta z h^{-1})}{\delta a_* \operatorname{ch}(\gamma \zeta a_* H_*) \operatorname{sh} \gamma \zeta + \operatorname{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) \operatorname{ch} \gamma \zeta} = O(1) & \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Другой способ выделения регулярной части обобщённых квадратур – их представление в виде производных по времени от регулярных квадратур, которое применяется ниже.

3. Полюсы подынтегральных функций

Полюсы подынтегральных функций в квадратурах для $T, u, \sigma_{zz}, u_1, \sigma_{zz}^1, \psi(z, t)$ и $I_0(t)$ являются нулями знаменателя $R(\zeta)$ подынтегральных функций и определяются из уравнения

$$R(\zeta) = 0. \quad (43)$$

Нули $R(\zeta)$, являющиеся устранимыми особыми точками подынтегральных функций, после проверки отбрасываются, т.е. не включаются в список полюсов. Нули ζ_k $k = 0, 1, 2, \dots$ функции $R(\zeta)$, являющиеся полюсами подынтегральных функций, существенно зависят от безразмерных параметров задачи, входящих в уравнение (43): \hat{V} , γ , H_* , a_* , δ , δ_* и др. С учётом того, что параметр \hat{V} содержит физическую скорость V скольжения жёсткой полуплоскости I и изменяется от 0 до ∞ , решения ζ_k уравнения (43) опре-

деляются в зависимости от \hat{V} . Для получения нулевых приближений ζ_{0k} при определении нулей ζ_k в уравнении (43) полагается $\hat{V} = 0$, в результате чего оно распадается на три более простых уравнения:

$$1 - \gamma^2 \zeta = 0, \quad \text{ch} \sqrt{\zeta} = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)\gamma H_* \zeta (\text{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) \text{ch} \gamma \zeta - \delta a_* \text{ch}(\gamma \zeta a_* H_*) \text{sh} \gamma \zeta) + c_1^2 e_{33} \text{sh}(\gamma \zeta a_* H_*) \text{sh} \gamma \zeta = 0.$$

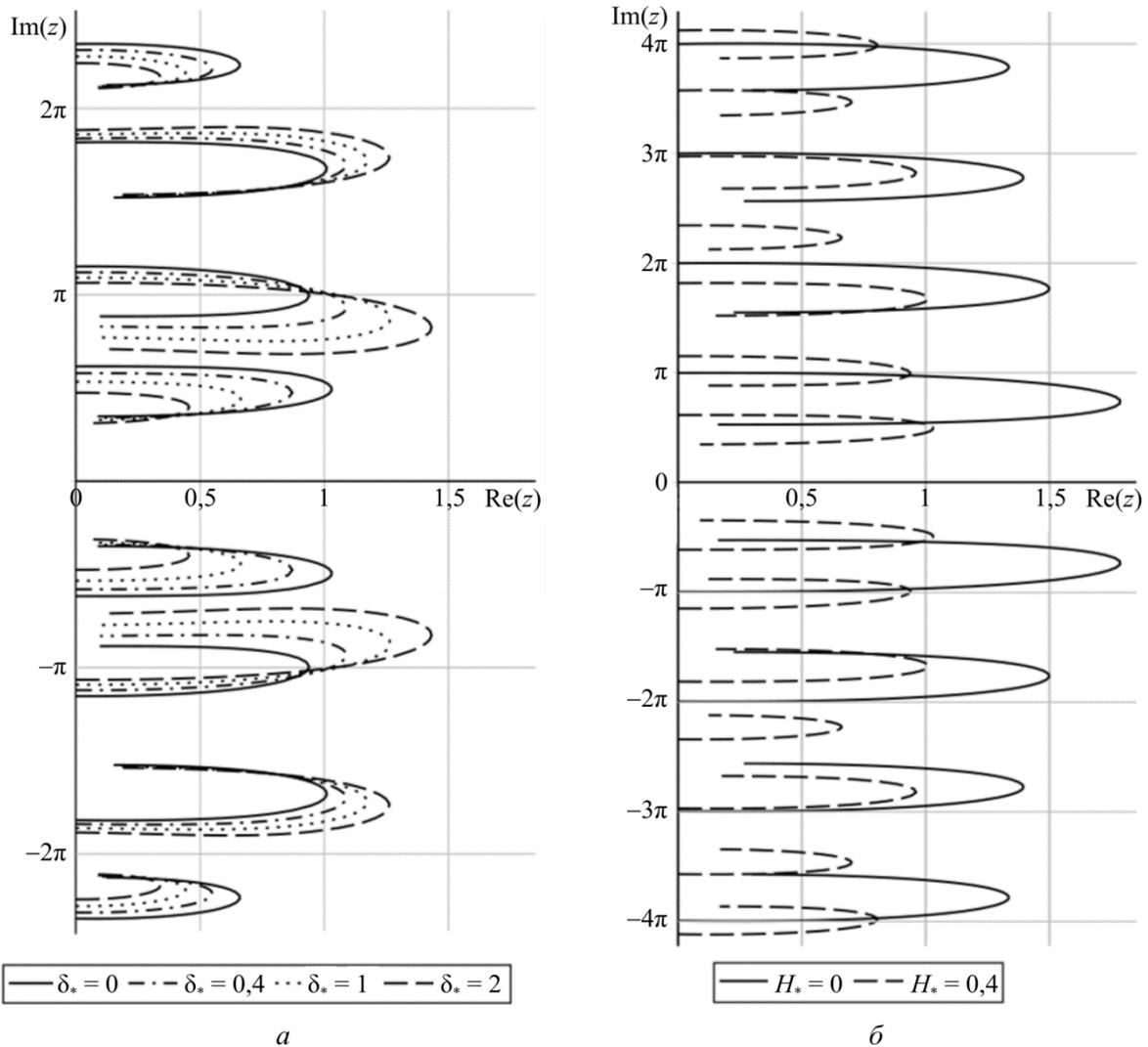


Рис. 2. Схема расположения нулей ζ_n^\pm $n = 1, 2, \dots$ функции $R(\zeta)$ в комплексной плоскости ζ :

(а) при $\gamma = 0,01$, $H_* = 0,5$, $a_* = 1,37$, $\delta_0 = 1,1$, и различных δ_* , указанных под рисунком,

(б) при $\gamma = 0,01$, $a_* = 1,37$, $\delta = 1,5$, $\delta_0 = 1,1$ и различных H_* , указанных под рисунком

Fig. 2. Location of zeros ζ_n^\pm $n = 1, 2, \dots$ of $R(\zeta)$ in a complex plane ζ :

(a) at $\gamma = 0,01$, $H_* = 0,5$, $a_* = 1,37$, $\delta_0 = 1,1$, $\delta = \delta_E + \delta_*$ and different δ_* (noted under the figure),

(b) at $\gamma = 0,01$, $a_* = 1,37$, $\delta = 1,5$, $\delta_0 = 1,1$ and different H_* (noted under the figure)

Первое из этих уравнений приносит $\zeta = \gamma^{-2}$ – устранимую особую точку. Второе уравнение приносит нулевые приближения ζ_{0k} $k = 0, 1, 2, \dots$ в аналитической форме

$$\zeta_{0k} = -\frac{\pi^2}{4} (1+2k)^2 \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (44)$$

которые располагаются на отрицательной части действительной оси.

Третье уравнение существенно нелинейно и аналитического решения не имеет. Однако если занулить параметр H_* , то из этого уравнения получим простое

$$\text{sh } \gamma \zeta = 0,$$

имеющее аналитическое решение, которое можно взять в качестве нулевого приближения решений третьего уравнения:

$$\zeta_{0k}^{\pm} = i\gamma^{-1}\pi k \quad k = 1, 2, \dots, \quad (45)$$

которые располагаются вдоль всей мнимой оси в комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Нуль $\zeta = 0$ является устранимой особой точкой.

После определения ζ_{0k} вида (44), (45) уравнение (43) решается численными методами с использованием методов теории функций комплексного переменного. На рис. 2 представлена карта полюсов подынтегральных функций в зависимости от $\hat{V} \in [0, \infty)$ и других безразмерных параметров задачи, которая показывает влияние параметров уравнения (41) на расположение полюсов в комплексной плоскости, на их движение в комплексной плоскости при изменении параметров. Анализ расположения полюсов ζ_k показывает, что при любых даже сколь угодно малых \hat{V} для ζ_k^{\pm} выполняется условие $\text{Re}(\zeta_k^{\pm}) > 0$.

4. Эффективные решения задачи

Полученные формулы (34)–(40) решения задачи в квадратурах часто более удобно записывать в виде свёрток Лапласа, представляющих интегральные уравнения Вольтерры рассматриваемой задачи

$$T(z, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\hat{V}}{\alpha h} \left[\int_0^t \Delta(\tau) f_T \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau - \theta \int_0^t V_0(\tau) g_T \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau \right], \quad 0 \leq z \leq h, \quad (46)$$

$$u(z, t) = -\int_0^t \Delta(\tau) f_u \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau + \theta \int_0^t V_0(\tau) g_u \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau, \quad 0 \leq z \leq h, \quad (47)$$

$$\sigma_{zz}(z, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\mu)h} \left[\int_0^t \Delta(\tau) f_{\sigma} \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau - \theta \int_0^t V_0(\tau) g_{\sigma} \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau \right], \quad 0 \leq z \leq h, \quad (48)$$

$$u_1(z, t) = -\int_0^t \Delta(\tau) f_{u_1} \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau - \theta \int_0^t V_0(\tau) g_{u_1} \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau, \quad -H \leq z \leq 0, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^1(z, t) = & -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\mu)h} \left[\int_0^t \Delta(\tau) f_{\sigma_1} \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau + \right. \\ & \left. + \theta \int_0^t V_0(\tau) g_{\sigma} \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau \right] + \frac{2e_{33}}{H} V_0(t), \quad -H \leq z \leq 0, \quad (50) \end{aligned}$$

$$\psi(z, t) = -\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \left[\int_0^t \Delta(\tau) f_\psi \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau + \theta \int_0^t V_0(\tau) g_\psi \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau \right] + \frac{2z+H}{H} V_0(t), \quad -H \leq z \leq 0, \quad (51)$$

$$I_0(t) = -\frac{e_{33}}{H} \left[\int_0^t \Delta(\tau) f_I \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau + \theta \int_0^t V_0(\tau) g_I \left(z, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau \right] + \frac{2\varepsilon_{33}^E}{H} \dot{V}_0(t), \quad (52)$$

в которых

$$f_a(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_a(z, \zeta)}{t_k R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta, \quad g_a(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{M_a(z, \zeta)}{t_k R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta, \quad (53)$$

а индекс a принимает буквенные значения: $a = T, u, \sigma, u_1, \sigma_1, \psi, I$.

С учётом поведения подынтегральных функций на бесконечности (41), их мероморфности в комплексной плоскости и в предположении, что все полюсы подынтегральных функций в (53) ζ_k $k = 0, 1, 2, \dots$ однократные, с помощью методов теории функций комплексного переменного [31] имеем

$$f_a(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_a^N(z, \zeta_k) e^{\zeta_k t}, \quad g_a(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_a^M(z, \zeta_k) e^{\zeta_k t}, \quad (54)$$

$$B_a^N(z, \zeta) = \frac{N_a(z, \zeta)}{t_k R'(\zeta)}, \quad B_a^M(z, \zeta) = \frac{M_a(z, \zeta)}{t_k R'(\zeta)},$$

где полюсы ζ_k даются общим списком, упорядоченным по модулю $|\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq \dots \leq |\zeta_k| \leq \dots$

Подставляя формулы (54) в (46)–(52), получим новые формулы решения задачи в рядах по полюсам ζ_k $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$T(z, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\hat{V}}{\alpha h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(B_T^N(z, \zeta_k) D_\Delta(\zeta_k, t) + \theta B_T^M(z, \zeta_k) D_V(\zeta_k, t) \right), \quad 0 \leq z \leq h, \quad (55)$$

$$u(z, t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(B_u^N(z, \zeta_k) D_\Delta(\zeta_k, t) - \theta B_u^M(z, \zeta_k) D_V(\zeta_k, t) \right), \quad 0 \leq z \leq h, \quad (56)$$

$$\sigma_{zz}(z, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(B_\sigma^N(z, \zeta_k) D_\Delta(\zeta_k, t) - \theta B_\sigma^M(z, \zeta_k) D_V(\zeta_k, t) \right), \quad 0 \leq z \leq h, \quad (57)$$

$$u_1(z, t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(B_{u_1}^N(z, \zeta_k) D_\Delta(\zeta_k, t) + \theta B_{u_1}^M(z, \zeta_k) D_V(\zeta_k, t) \right), \quad -H \leq z \leq 0, \quad (58)$$

$$\sigma_{zz}^1(z, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(B_{\sigma_1}^N(z, \zeta_k) D_\Delta(\zeta_k, t) + \theta B_{\sigma_1}^M(z, \zeta_k) D_V(\zeta_k, t) \right) + \frac{2e_{33}}{H} V_0(t), \quad -H \leq z \leq 0, \quad (59)$$

$$\psi(z, t) = -\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \sum_{k=0}^{\infty} \left(B_\psi^N(z, \zeta_k) D_\Delta(\zeta_k, t) + \theta B_\psi^M(z, \zeta_k) D_V(\zeta_k, t) \right) + \frac{2z+H}{H} V_0(t), \quad -H \leq z \leq 0, \quad (60)$$

$$I_0(t) = -\frac{e_{33}}{H} \sum_{k=0}^{\infty} (B_I^N(z, \zeta_k) D_{\Delta}(\zeta_k, t) + \theta B_I^M(z, \zeta_k) D_V(\zeta_k, t)) + \frac{2\varepsilon_{33}^E}{H} \dot{V}_0(t), \quad (61)$$

в которых

$$D_{\Delta}(\zeta, t) = \int_0^t \Delta(\tau) \exp\left(\frac{\zeta(t-\tau)}{t_{\kappa}}\right) d\tau, \quad D_V(\zeta, t) = \int_0^t V_0(\tau) \exp\left(\frac{\zeta(t-\tau)}{t_{\kappa}}\right) d\tau.$$

При вычислении квадратур (53), понимаемых в обобщённом смысле, использовались представления в виде производных по t от соответствующих регулярных квадратур, например

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_a(z, \zeta)}{t_{\kappa} R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_a(z, \zeta)}{t_{\kappa} \zeta R(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta \right).$$

После вычисления регулярных квадратур под производными и последующего дифференцирования результата интегрирования получаются формулы (54).

Полученные формулы (55)–(61) позволяют проанализировать решение задачи на его устойчивость [32]. В предположении, что функция $\Delta(t)$ является ограниченной на $t \in (0, \infty)$

$$m \leq \Delta(t) \leq M, \quad m, M > 0,$$

нетрудно получить оценку $D_{\Delta}(\zeta, t)$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае для достаточно больших t должно выполняться неравенство

$$D_{\Delta}(\zeta_k, t) = \int_0^t \Delta(\tau) e^{\frac{\zeta_k(t-\tau)}{t_{\kappa}}} d\tau \geq m \left| \frac{e^{\frac{\zeta_k t}{t_{\kappa}}}}{\zeta_k / t_{\kappa}} \right|, \quad t > 0,$$

из которого видно, что при $\text{Re}(\zeta_k) > 0$ интеграл $D_{\Delta}(\zeta, t)$ становится больше любого положительного числа, т.е.

$$\lim D_{\Delta}(\zeta_k, t) = \begin{cases} \infty & \text{при } \text{Im}(\zeta_k) = 0, \\ \text{не существует} & \text{при } \text{Im}(\zeta_k) \neq 0. \end{cases}$$

Это свидетельствует о том, что в случае хотя бы одного ζ_k с $\text{Re}(\zeta_k) > 0$ $k = 0, 1, 2, \dots$ полученные решения неустойчивы.

С механической точки зрения в этом случае наступает термоупругая неустойчивость скользящего контакта, которая развивается, начиная со сколь угодно малых скоростей скольжения V полуплоскости I .

Полученные формулы (55)–(61) позволяют выразить температуру $T(h, t)$ и напряжения $\sigma_{zz}(h, t)$ на контакте через величину пьезоэлектрического тока $I_0(t)$:

$$T(h, t) = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\hat{V}H_*}{\alpha h} \int_0^t I_0(\tau) f_I^T\left(\frac{t-\tau}{t_{\kappa}}\right) d\tau - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\hat{V}\Theta}{\alpha h} \int_0^t V_0(\tau) g_I^T\left(\frac{t-\tau}{t_{\kappa}}\right) d\tau, \quad (62)$$

$$\sigma_{zz}(h, t) = -\frac{\lambda + 2\mu}{e_{33}} H_* \int_0^t I_0(\tau) f_I^{\sigma}\left(\frac{t-\tau}{t_{\kappa}}\right) d\tau + \frac{e_{33}}{h} \int_0^t V_0(\tau) g_I^{\sigma}\left(\frac{t-\tau}{t_{\kappa}}\right) d\tau, \quad (63)$$

$$f_I^a(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_a(h, \zeta)}{t_{\kappa} N_I(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta, \quad g_I^a(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G_a(\zeta)}{t_{\kappa} N_I(\zeta)} e^{\zeta t} d\zeta, \quad a = T, \sigma, \quad (64)$$

$$N_I(\zeta)G_a(\zeta) = M_a(h, \zeta)N_I(\zeta) + M_I(\zeta)N_a(h, \zeta) - \theta_* t_{\kappa}^{-1} \zeta N_a(h, \zeta)R(\zeta), \quad \theta_* = 2\varepsilon_{33}^S e_{33}^{-2},$$

где $N_{T,\sigma}(h, \zeta)$, $M_{T,\sigma}(h, \zeta)$, $N_I(\zeta)$, $M_I(\zeta)$ определены после формул (39), (40), как и другие параметры в (62)–(64). Эти формулы позволяют идентифицировать температуру и напряжения на контакте с током в пьезоэлектрической цепи $I_0(t)$, осуществить мониторинг температуры и напряжений на контакте. С помощью электрического тока пьезоэлектрической прослойки $I_0(t)$ может осуществляться и регулирование температуры и напряжений на контакте за счёт изменения разности потенциалов $2V_0(t)$ в пьезоэлектрической цепи, так как приводит к деформации толщины пьезокерамической прослойки.

Для проведения сравнительного анализа результатов решения рассматриваемой задачи о пьезоэлектрической прослойке с соответствующими результатами частной задачи термоупругости без пьезоэлектрической прослойки необходимо наличие основных формул этой задачи, которые можно получить либо из представленных здесь формул предельным переходом, либо вывести их заново.

5. Постановка и решение частной задачи

Рассматривается задача плоской деформации о скольжении с постоянной горизонтальной скоростью V жесткой полуплоскости I по поверхности упругого покрытия A толщиной h . Жесткая полуплоскость I в процессе скольжения внедряется в покрытие по нормали к его поверхности по закону $\Delta(t)$. Нижняя грань покрытия жестко соединена с недеформируемой подложкой в виде полуплоскости II. Скольжение недеформируемой полуплоскости I по верхней грани упругого покрытия происходит с учетом кулоновского трения, но без учета его износа. Движущаяся полуплоскость I теплоизолирована, а поток тепла, образующийся за счет трения, направлен в покрытие. На нижней поверхности упругого покрытия поддерживается нулевая температура. Так как покрытие до начального момента находилось в покое, то его смещения и скорость смещений в начальный момент нулевые, так же как и начальная температура.

Сформулированная задача приводит к начально-краевой задаче для дифференциальных уравнений (3)–(5) со следующими механическими и температурными граничными условиями:

$$z = h \quad u(h, t) = -\Delta(t), \quad \sigma_{xz}(h, t) = -f\sigma_{zz}(h, t), \quad K \frac{\partial T(h, t)}{\partial z} = -fV\sigma_{zz}(h, t), \quad (65)$$

$$z = 0 \quad u(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad T(0, t) = 0. \quad (66)$$

Начальные условия на $u(z, t)$, $T(z, t)$ нулевые:

$$u(z, 0) = \frac{\partial u(z, 0)}{\partial t} = 0, \quad T(z, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (67)$$

Решение нестационарной начально-краевой контактной задачи с дифференциальными уравнениями (3)–(5), граничными (65)–(66) и начальными (67) условиями записывается в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа

$$T(z, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\gamma \hat{V}}{\alpha h} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) N_T(z, \zeta) R^{-1}(\zeta) \exp \zeta \tilde{t} d\zeta, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0, \quad (68)$$

$$u(z, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) N_u(z, \zeta) R^{-1}(\zeta) \exp(\zeta \tilde{t}) d\zeta, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0, \quad (69)$$

$$\sigma_{zz}(z, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(\zeta) N_{\sigma}(z, \zeta) R_{\sigma}^{-1}(\zeta) \exp(\zeta \tilde{t}) d\zeta, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0, \quad (70)$$

$$N_T(z, \zeta) = \sqrt{\zeta} (1 - \gamma^2 \zeta) \operatorname{ch} \gamma \zeta \operatorname{sh} (\sqrt{\zeta} z h^{-1}),$$

$$R(\zeta) = (1 - \gamma^2 \zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \gamma \zeta - \gamma \hat{V} (\operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \gamma \zeta - \gamma \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \gamma \zeta - 1),$$

$$N_u(z, \zeta) = (1 - \gamma^2 \zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} (\gamma \zeta z h^{-1}) - \\ - \gamma \hat{V} (\operatorname{ch} (\sqrt{\zeta} z h^{-1}) \operatorname{ch} \gamma \zeta - \gamma \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} (\gamma \zeta z h^{-1}) - \operatorname{ch} (\gamma \zeta (h - z) h^{-1})),$$

$$N_{\sigma}(z, \zeta) = (1 - \gamma^2 \zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \operatorname{ch} (\gamma \zeta z h^{-1}) + \\ + \gamma \hat{V} (\gamma \sqrt{\zeta} (\operatorname{sh} \sqrt{\zeta} \operatorname{ch} (\gamma \zeta z h^{-1}) - \operatorname{sh} (\sqrt{\zeta} z h^{-1}) \operatorname{ch} \gamma \zeta) - \operatorname{sh} (\gamma \zeta (h - z) h^{-1})),$$

где контур интегрирования $\Gamma = \{\zeta : -i\infty + dt_{\kappa}, i\infty + dt_{\kappa}\}$, а $D(\zeta)$, \tilde{t} , t_{κ} , t_a , γ , \hat{V} , a указаны после (39).

Исследование подынтегральных функций в (68)–(70) показывает, что все они мероморфны в комплексной плоскости переменной интегрирования $\zeta = \xi + i\eta$ и имеют в качестве изолированных особых точек только полюсы. Контур интегрирования Γ проходит правее всех полюсов подынтегральных функций.

В комплексной плоскости на бесконечности подынтегральные функции имеют следующее поведение:

$$N_T(z, \zeta) R^{-1}(\zeta) = O(\sqrt{\zeta}) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty,$$

$$N_u(z, \zeta) R^{-1}(\zeta) = N_{\sigma}(z, \zeta) R^{-1}(\zeta) = O(1) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty,$$

поэтому квадратуры в (68)–(70) понимаются в обобщённом смысле.

Полюсы подынтегральных функций (68)–(70) определяются нулями знаменателя – функции $R(\zeta)$, за исключением двух устранимых особых точек $\zeta = 0$ и $\zeta = \gamma^{-2}$. Траектории полюсов ζ_k $k = 0, 1, 2, \dots$ и ζ_n^{\pm} $n = 1, 2, \dots$ в комплексной плоскости при изменении \hat{V} от 0 до ∞ совпадают с соответствующими траекториями ζ_k и ζ_n^{\pm} исходной задачи с пьезоэлектрической прослойкой при $H_* = 0$, изображенными на рис. 2, б. Кроме того, $\operatorname{Re}(\zeta_k^{\pm}) > 0$, начиная со сколь угодно малых скоростей скольжения $V > 0$, как и в основной задаче о пьезоэлектрической прослойке.

6. Численные результаты

Рассматривается скольжение с постоянной скоростью $V = 1$ м/с жёсткого тела по поверхности покрытия из алюминия ($\mu = 25,5 \cdot 10^9$ ГПа, $\nu = 0,34$, $K = 209,3$, $\kappa = 87,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\alpha = 22,9 \cdot 10^{-6}$ м²/с). Покрытие жёстко сцеплено с пьезоэлектрической прослойкой из керамики PZT-4 ($\rho_1 = 7500$ кг/м³, $c_{33}^E = 115$ ГПа, $e_{33}^E = 15,1$ Кл/м², $\epsilon_{33}^S = 5,62$ Ф/м), жёстко сцепленной, в свою очередь, с недеформируемой подложкой. Толщина покрытия $h = 1$ мм, толщина пьезоэлектрической прослойки $H = h/100$, коэффициент трения $f = 0,15$. При этом принимается закон $\Delta(t)$ внедрения жёсткого тела в покрытие, состоящий из активной $0 < t < t_\epsilon$ и пассивной $t_\epsilon < t < \infty$ фаз внедрения, в виде

$$\Delta(t) = \Delta_0 \begin{cases} -1 + e^{\epsilon t} & 0 < t < t_\epsilon, \\ 1 & t_\epsilon < t < \infty, \end{cases} \quad (71)$$

где Δ_0 – наибольшая величина внедрения; $t_\epsilon = \epsilon^{-1} \ln 2$ – время окончания активного участка внедрения, со следующими значениями параметров: $\Delta_0 = 0,01h$, $t_\epsilon = 0,1386$ с, $\epsilon = 5$ с⁻¹. Примем $V_0(t) = 0$. В этом случае возникающий в пьезокерамической прослойке ток будет вызван исключительно ее механической деформацией. Безразмерные параметры задачи принимают следующие значения: $\gamma = 1,4 \cdot 10^{-5}$, $\hat{V} = 0,0494$, $H_* = 0,01$, $a_* = 1,3704$, $\delta_0 = 1,0932$, $\delta_* = 0,3857$.

На рис. 3 показаны графики изменения температуры и механических напряжений на контакте, а также график амплитуды тока, протекающего через пьезоэлектрическую прослойку, за промежуток времени $[0, 2t_\epsilon]$.

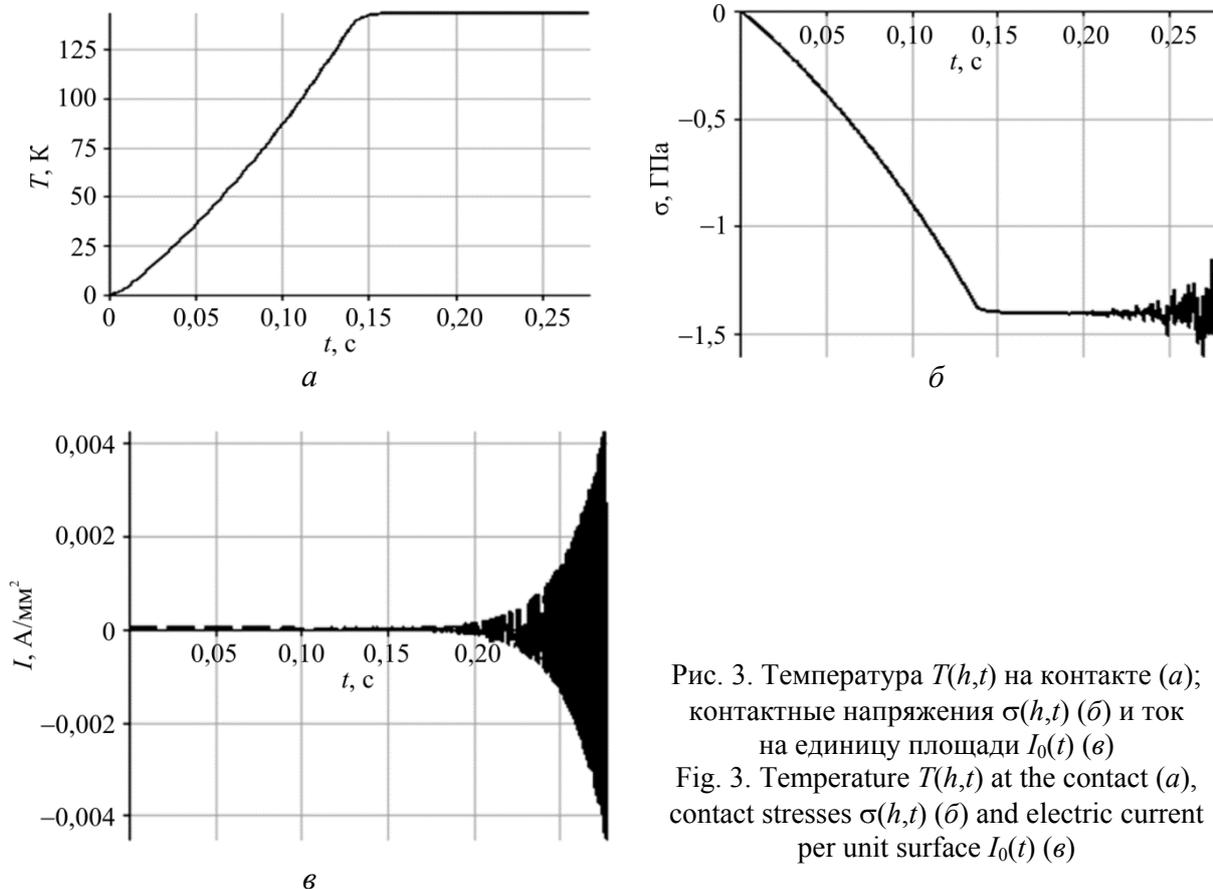


Рис. 3. Температура $T(h,t)$ на контакте (а); контактные напряжения $\sigma(h,t)$ (б) и ток на единицу площади $I_0(t)$ (в)
 Fig. 3. Temperature $T(h,t)$ at the contact (а), contact stresses $\sigma(h,t)$ (б) and electric current per unit surface $I_0(t)$ (в)

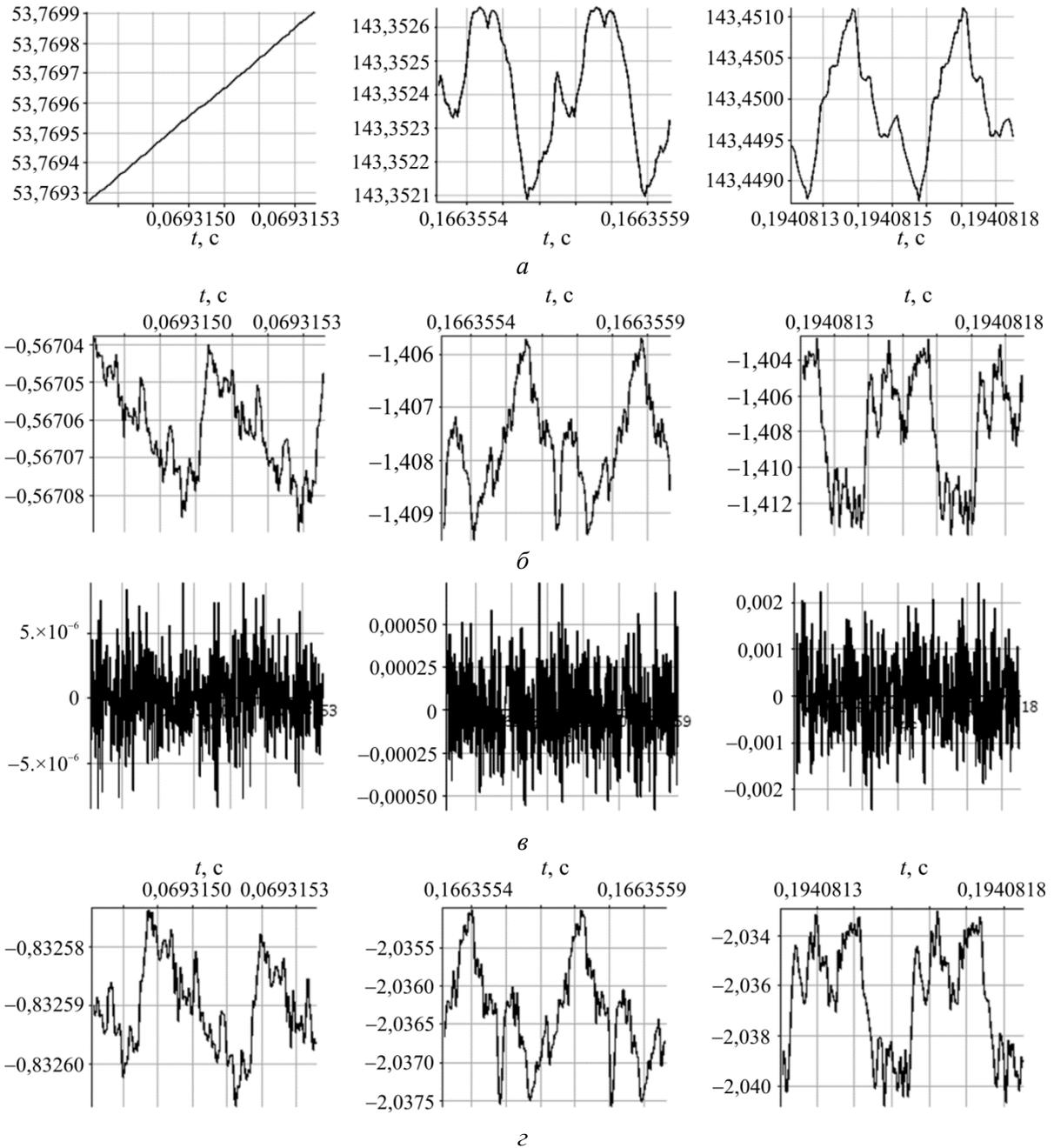


Рис. 4. Температура $T(h,t)$ на контакте (а); контактные напряжения $\sigma_{zz}(h,t)$ (б); ток $I_0(t)$ (в) на промежутках $t \in [0,5t_\varepsilon, 0,5t_\varepsilon + 2t_a], [1,2t_\varepsilon, 1,2t_\varepsilon + 2t_a], [1,4t_\varepsilon, 1,4t_\varepsilon + 2t_a]$; на графиках (з) представлены амплитуды низкочастотного спектра пьезоэлектрического тока $I_0(t)$ в те же промежутки времени

Fig. 4. Temperature $T(h,t)$ at the contact (a), contact stresses $\sigma_{zz}(h,t)$ (б), electric current $I_0(t)$ at the time periods $t \in [0,5t_\varepsilon, 0,5t_\varepsilon + 2t_a], [1,2t_\varepsilon, 1,2t_\varepsilon + 2t_a], [1,4t_\varepsilon, 1,4t_\varepsilon + 2t_a]$. Amplitudes of the low-frequency spectrum of the piezoelectric current $I_0(t)$ are shown in (z) at the same time periods

На рис. 4 показаны графики изменения амплитуды напряжений, температуры и тока в различные специальным образом выбранные промежутки времени длительностью $4t_a$, где $t_a = h/a$ – время прохождения упругой волны от контакта до границы раздела покрытия и пьезоэлектрической прослойки. Графики (рис. 4, з) амплитуд низкочастотного спектра пьезоэлектрического тока

зоэлектрического тока $I_0(t)$, выделенные из графиков (рис. 4, в), представляющих собой весь частотный спектр тока, показывают существенное сходство с графиками контактных напряжений $\sigma_{zz}(h,t)$ (рис. 4, б). Это обстоятельство убеждает в возможности идентификации напряжений на контакте $\sigma_{zz}(h,t)$ с помощью анализа электрического тока $I_0(t)$.

В заключение заметим, что полученные формулы связи $T(h,t)$, $\sigma_{zz}(h,t)$ с $I_0(t)$ и $V_0(t)$ (62)–(64) позволят по экспериментальным данным $I_0(t)$ и $V_0(t)$ построить амплитуды температуры $T(h,t)$ и напряжений $\sigma_{zz}(h,t)$ на контакте.

Заключение

Проведенные исследования с помощью постановки и решения нестационарной динамической электротермоупругой задачи о скользящем контакте установили следующее:

- 1) проведение мониторинга термоупругой неустойчивости скользящего контакта с использованием пьезоэлектрической прослойки возможно и предлагается его расчётная схема;
- 2) регулировка температуры и давления на скользящем контакте возможна либо за счёт изменения закона внедрения жёсткого тела в упругое покрытие, либо за счёт изменения разности потенциалов на электродах пьезокерамической прослойки, откуда следует, что мониторинг скользящего контакта и его регулировка могут осуществляться в автоматическом режиме.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России.

Библиографический список

1. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. – 1969. – Vol. 312. – P. 381–394.
2. Lee K., Barber J.R. An experimental investigation of frictionally-excited thermoelastic instability in automotive disk brakes under a drag brake application // J. Tribol. – 1994. – Vol. 116. – No. 3. – P. 409–414.
3. Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material / S. Abbasi [et al.] // Wear. – 2014. – Vol. 314. – No. 1–2. – P. 171–180.
4. Shpenev A.G., Kenigfest A.M., Golubkov A.K. Theoretical and experimental study of carbon brake discs frictionally induced thermoelastic instability // Springer Proc. Phys. – 2016. – Vol. 175. – P. 551–559.
5. Netzel J.P. Observations of thermoelastic instability in mechanical face seals // Wear. – 1980. – Vol. 59. – No. 1. – P. 135–148.
6. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear // Wear. – 1972. – Vol. 19. – No. 3. – P. 315–328.
7. Морев В.А., Черский И.Н. Термоупругая неустойчивость фрикционного контакта штампов с полупространством // Трение и износ. – 1985. – Т. 6, № 1. – С. 27–38.
8. Yi Y.-B., Barber J.R., Zagrodzki P. Eigenvalue solution of thermoelastic instability problems using Fourier reduction // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. – 2000. – Vol. 456. – P. 2799–2821.
9. Davis C.L., Krousgrill C.M., Sadeghi F. Effect of Temperature on Thermoelastic Instability in Thin Disks // J. Tribol. – 2002. – Vol. 124. – No. 3. – P. 429–437.
10. Interaction of thermal contact resistance and frictional heating in thermoelastic instability / M. Ciavarella [et al.] // Int. J. Solids Struct. – 2003. – Vol. 40. – No. 21. – P. 5583–5597.
11. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. – 2006. – Vol. 462. – No. 2071. – P. 2161–2176.
12. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces // J. Mech. Phys. Sol. – 2007. – Vol. 55. – P. 744–764.
13. Jang Y.H., Ahn S. H. Frictionally-excited thermoelastic instability in functionally graded material // Wear. – 2007. – Vol. 262. – No. 9–10. – P. 1102–1112.

14. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic contact instability of a functionally graded layer and a homogeneous half-plane // *Int. J. Solids Struct.* – 2014. – Vol. 51. – No. 23–24. – P. 3962–3972.
15. Frictionally excited thermoelastic instability of functionally graded materials sliding out-of-plane with contact resistance / J.-J. Mao [et al.] // *J. Appl. Mech. ASME.* – 2016. – Vol. 83. – No. 2. – Ст. № 021010.
16. Zagrodzki P. Thermoelastic instability in friction clutches and brakes – Transient modal analysis revealing mechanisms of excitation of unstable modes // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – Vol. 46. – No. 11–12. – P. 2463–2476.
17. Frictionally excited thermoelastic instability and the suppression of its exponential rise in disc brakes / M. Honner [et al.] // *J. Therm. Stress.* – 2010. – Vol. 33. – No. 5. – P. 427–440.
18. Слоновский Н.В. О термоупругой устойчивости при трении скольжения // *Прикл. мат. мех.* – 1969. – Т. 33, № 1. – С. 117–121.
19. Евтушенко А.А., Пырьев Ю.А. Влияние изнашивания на развитие термоупругой неустойчивости фрикционного контакта // *Изв. РАН. МТТ.* – 1997. – № 1. – С. 114–121.
20. Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учетом тепловыделения от трения / В.Б. Зеленцов [и др.] // *Вестн. Дон. гос. техн. ун-та.* – 2014. – Т. 14, № 4. – С. 17–29.
21. Instability of solution of the dynamic sliding frictional contact problem of coupled thermoelasticity / V.B. Zelentsov [et al.] // *Mater. Phys. Mech.* – 2015. – Vol. 23. – P. 14–19.
22. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space // *Acta Mech.* – 2016. – Vol. 227. – No. 1. – P. 263–273.
23. Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch / R. Elloumi [et al.] // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – Vol. 50. – No. 24. – P. 3778–3792.
24. Zhou Y.-T., Lee K.Y. Investigation of frictional sliding contact problems of triangular and cylindrical punches on monoclinic piezoelectric materials // *Mech. Mater.* – 2014. – Vol. 69. – No. 1. – P. 237–250.
25. Thermal contact of magneto-electro-elastic materials subjected to a conducting flat punch / J. Ma [et al.] // *J. Strain Analysis Eng. Design.* – 2015. – Vol. 50. – No. 7. – P. 513–527.
26. Неустойчивость скользящего термофрикционного контакта жесткого тела с упругим покрытием, содержащим пьезокерамическую прослойку / В.Б. Зеленцов [и др.] // *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер.: естеств. науки.* – 2015. – № 4. – С. 56–62.
27. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 134 с.
28. Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наукова думка, 1965. – 204 с.
29. Диткин В.А., Прудников, А.П. Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1975. – 409 с.
30. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
31. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
32. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1965. – 331 с.

References

1. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1969, vol. 312, pp. 381-394.
2. Lee K., Barber J.R. An experimental investigation of frictionally-excited thermoelastic instability in automotive disk brakes under a drag brake application. *J. Tribol.*, 1994, vol. 116, no. 3, pp. 409-414.
3. Abbasi, S., Teimourimanesh S., Vernersson T., Sellgren U., Olofsson U., Lundén R. Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material. *Wear*, 2014, vol. 314, no. 1-2, pp. 171-180.
4. Shpenev A.G., Kenigfest A.M., Golubkov A.K. Theoretical and experimental study of carbon brake discs frictionally induced thermoelastic instability. *Springer Proc. Phys.*, 2016, vol. 175, pp. 551-559.
5. Netzel J.P. Observations of thermoelastic instability in mechanical face seals. *Wear*, 1980, vol. 59, no. 1, pp. 135-148.
6. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear. *Wear*, 1972, vol. 19, no. 3, pp. 315-328.

7. Morov V.A., Cherskii I.N. Thermoelastic instability of friction contact of stamps with a halfspace. *Soviet J. Frict. Wear*, 1985, vol. 6, no. 1, pp. 18-27.
8. Yi Y.-B., Barber J.R., Zagrodzki P. Eigenvalue solution of thermoelastic instability problems using Fourier reduction. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2000, Vol. 456, pp. 2799-2821.
9. Davis C.L., Krousgrill C.M., Sadeghi, F. Effect of Temperature on Thermoelastic Instability in Thin Disks. *J. Tribol.*, 2002, vol. 124, no. 3, pp. 429-437.
10. Ciavarella M., Johansson L., Afferrante L., Klarbring A., Barber J. R. Interaction of thermal contact resistance and frictional heating in thermoelastic instability. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, Vol. 40, No. 21, pp. 5583–5597.
11. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2006, vol. 462, no. 2071, pp. 2161-2176.
12. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces. *J. Mech. Phys. Sol.* 2007, vol. 55, pp. 744-764.
13. Jang Y.H., Ahn S. H. Frictionally-excited thermoelastic instability in functionally graded material. *Wear*, 2007, vol. 262, no. 9-10, pp. 1102–1112.
14. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic contact instability of a functionally graded layer and a homogeneous half-plane. *Int. J. Solids Struct*, 2014, vol. 51, no. 23-24, pp. 3962-3972.
15. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Liu J. Frictionally excited thermoelastic instability of functionally graded materials sliding out-of-plane with contact resistance. *J. Appl. Mech. ASME*. 83(2). <http://doi.org/10.1115/1.4031974>
16. Zagrodzki P. Thermoelastic instability in friction clutches and brakes – Transient modal analysis revealing mechanisms of excitation of unstable modes. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, no. 11-12, pp. 2463-2476.
17. Honner M., Šroub J., Švantner M., Voldřich J. Frictionally excited thermoelastic instability and the suppression of its exponential rise in disc brakes. *J. Therm. Stress.*, 2010, vol. 33, no. 5, pp. 427-440.
18. Slonovskii N.V. On thermoelastic stability with sliding friction. *J. Appl. Math. Mech.*, 1969, vol. 33, no. 1, pp. 124-127.
19. Evtushenko A.A., Pyr'ev Y.A. The influence of wear on the development of thermoelastic instability of a frictional contact. *Mechanics of Solids*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 91-97.
20. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Vasilyev A.S., Volkov S.S. Termoupru-godinamicheskaya neustoichivost' resheniya kontaktnoi zadachi dlya pokrytiya s uchetom teplovydeleniya ot treniya [Thermoelastodynamic instability of contact problem solution for coating considering frictional heat generation]. *Vestnik of Don State Technical University*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 17-29.
21. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich S.M., Ke L.L. Instability of solution of the dynamic sliding frictional contact problem of coupled thermoelasticity. *Mater. Phys. Mech.*, 2015, vol. 23, pp. 14-19.
22. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space. *Acta Mech.*, 2016, vol. 227, no. 1, pp. 263-273.
23. Elloumi R., Guler M.A., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S. Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no. 24, pp. 3778-3792.
24. Zhou Y.-T., Lee K.Y. Investigation of frictional sliding contact problems of triangular and cylindrical punches on monoclinic piezoelectric materials. *Mech. Mater.*, 2014, vol. 69, no. 1, pp. 237-250.
25. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Aizikovich S.M. Thermal contact of magneto-electro-elastic materials subjected to a conducting flat punch. *J. Strain Analysis Eng. Design*, 2015, vol. 50, no. 7, pp. 513-527.
26. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich S.M., Ke L.L. Neustoichivost' skol'ziashchego termofriktsionnogo kontakta zhestkogo tela s uprugim pokrytiem, sodержashchim p'ezokeramicheskuiu prosloiku [Instability of Sliding Thermoelastic Contact of a Rigid Body with an Elastic Coating Containing a Piezoceramic Interlayer]. *Izv. vyssh. uchebn. zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Seriya: Estestvennye nauki*, 2015, no. 4, pp. 56-62.
27. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Elektrouprugost' [Electroelasticity]. *Kiev, Naukova Dumka*, 1989, 134 p.
28. Kovalenko A.D. Vvedenie v termouprugost' [Introduction to Thermoelasticity]. *Kiev, Naukova Dumka*, 1965, 204 p.
29. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Operatsionnoe ischislenie [Operational Calculus]. *Moscow, Vysshaya Shkola*, 1975, 409 p.
30. Brychkov Iu.A., Prudnikov A.P. Integral'nye preobrazovaniia obobshchennykh funktsii [Integral Transforms of Generalized Functions]. *Moscow, Nauka*, 1977, 288 p.
31. Hurwitz A., Courant R. Teoriya funktsii [Theory of Functions]. *Moscow, Nauka*, 1968, 648 p.
32. Pontryagin L.S. Obyknoennyye differentsial'nye uravneniya [Ordinal Differential Equations]. *Moscow, Nauka*, 1965, 331 p.