



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.07

УДК 539.3

## КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО КЛИНА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

Д.А. Пожарский, Е.Д. Пожарская

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 25 мая 2020 г.  
Принята: 01 марта 2021 г.  
Опубликована: 15 апреля 2021 г.

#### Ключевые слова:

контактные задачи, теория упругости, неоднородное тело, клин, регулярный асимптотический метод.

### АННОТАЦИЯ

Изучаются плоские контактные задачи теории упругости для клина, когда коэффициент Пуассона является произвольной, достаточно гладкой функцией угловой координаты, а модуль сдвига постоянный. При этом модуль упругости Юнга также является переменным по угловой координате. На одной грани клина задана конечная область контакта, не выходящая на угловую точку, а другая грань жестко заделана (задача А) либо свободна от напряжений (задача Б). Для сведения задач к интегральным уравнениям относительно контактного давления используется общее представление типа Фрайбергера решения уравнений упругого равновесия в полярной системе координат при переменном коэффициенте Пуассона. Точные решения вспомогательных краевых задач находятся при помощи интегрального преобразования Меллина. Для решения интегральных уравнений применяется регулярный асимптотический метод, эффективный для областей контакта, относительно удаленных от угловой точки. Показано, что для неоднородного материала в асимптотических решениях появляются логарифмические члены, отсутствующие в известных асимптотиках для однородного материала. Рассматривается контактная задача Б, которая отличается от задачи А учетом трения и шероховатости в области контакта. Шероховатость поверхности клина моделируется покрытием винклеровского типа. Для решения возникающего интегрального уравнения второго рода применяется метод коллокаций. В отличие от задачи А в задаче Б контактные давления на границе области контакта не имеют корневых особенностей и принимают конечные значения. Расчеты сделаны для случаев, когда коэффициент Пуассона и модуль упругости возрастает или убывает при удалении от поверхности клина.

© ПНИПУ

© Пожарский Дмитрий Александрович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: [pozharda@rambler.ru](mailto:pozharda@rambler.ru),

ИД: [0000-0001-6372-1866](https://orcid.org/0000-0001-6372-1866)

Пожарская Елизавета Дмитриевна – студ., e-mail: [pozharskaya.elizaveta@rambler.ru](mailto:pozharskaya.elizaveta@rambler.ru),

ИД: [0000-0001-6372-1866](https://orcid.org/0000-0001-6372-1866)

Dmitrii A. Pozharskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department,

e-mail: [pozharda@rambler.ru](mailto:pozharda@rambler.ru), ИД: [0000-0001-6372-1866](https://orcid.org/0000-0001-6372-1866)

Elizaveta D. Pozharskaia – Student, e-mail: [pozharskaya.elizaveta@rambler.ru](mailto:pozharskaya.elizaveta@rambler.ru), ИД: [0000-0001-6372-1866](https://orcid.org/0000-0001-6372-1866)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



# CONTACT PROBLEMS FOR AN INHOMOGENEOUS ELASTIC WEDGE WITH VARIABLE POISSON'S RATIO

D.A. Pozharskii, E.D. Pozharskaia

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 25 May 2020  
Accepted: 01 March 2021  
Published: 15 April 2021

### Keywords:

contact problems, elasticity theory, inhomogeneous body, wedge, regular asymptotic method.

## ABSTRACT

Plane contact problems of the elasticity theory are investigated for a wedge when Poisson's ratio is an arbitrary smooth function with respect to the angular coordinate while shear modulus is constant. For this case Young's modulus is also variable with respect to the angular coordinate. A finite contact domain is given on one wedge face, it does not include the wedge apex, while the other wedge face is rigidly fixed (problem A) or stress-free (problem B). To reduce the problems to integral equations with respect to the contact pressure, we use the general Freiberger type representation for the solution of elastic equilibrium equations written in polar coordinates with variable Poisson's ratio. Exact solutions of auxiliary problems are constructed with the help of Mellin integral transforms. The regular asymptotic method employed is effective for contact domains relatively distant from the wedge apex. It is shown that logarithmic terms appear in the asymptotic solutions for the inhomogeneous material which are missing in the well-known asymptotics for the homogeneous one. In contact problem C which is corresponding to problem A, the friction and roughness are taken into account in the contact region. The roughness of the wedge surface is simulated by a Winkler type coating. The collocation method is used for solving integral equations of the second kind. Unlike problem A, in problem C the contact pressure does not have square root singularities at end-points where it takes finite values. Calculations are made for the cases when Poisson's ratio and Young's modulus increase or decrease from the surface of the wedge.

© PNRPU

## Введение

Контактные задачи и их аналитические решения вызывают большой интерес в современной мировой науке и очень важны для решения многих проблем в машиностроении [1–4]. Математический аппарат контактных задач теории упругости был заложен в [5]. Аналитические методы решения задач со смешанными краевыми условиями были рассмотрены в [6]. Исследовались плоские и пространственные контактные задачи для однородных [7, 8] и анизотропных [9] тел. Развиты методы решения плоских и осесимметричных контактных задач для неоднородных тел [10, 11]. Ряд контактных задач для функционально-градиентных тел и покрытий решен в [12–17]. Рассматривалось влияние различных факторов (динамика, микрорельеф, адгезия) на поверхности контакта [18–21]. Одним из основных приближенных методов в неоднородной теории упругости является метод возмущений [22]. Для случая переменного коэффициента Пуассона точные фундаментальные решения были получены для полупространства и слоя (непрерывная зависимость коэффициент Пуассона от глубины) [23–25], для цилиндрических тел (зависимость от радиальной координаты) [26, 27] и для плоского клина (зависимость от угловой координаты) [28, 29]. Изучались контактные задачи для однородного и составного плоского и пространственного клина [5, 7, 8, 29, 30]. Для плоского клина с постоянным коэффициентом Пуассона исследовались случаи зависимости модуля упругости [31–33] или сдвига [10] от угловой коор-

динаты. Были получены приближенные решения контактных задач без трения для плоского клина с переменным коэффициентом Пуассона, когда область контакта выходит на угловую точку, основанные на специальных аппроксимациях символов ядер интегральных уравнений [28, 29]. Однако эти решения эффективны лишь для малых изменений коэффициента Пуассона, когда погрешность аппроксимации невысока. В настоящей работе рассмотрен случай, когда область контакта не выходит на угловую точку клина, для решения применяется регулярный асимптотический метод. Предлагаемый подход эффективен для областей контакта, относительно удаленных от угла клина. Для учета трения и шероховатости используется метод коллокаций.

## 1. Контактные задачи без трения

Рассмотрим плоские контактные задачи о взаимодействии бесконечного линейно-упругого клина угла раствора  $\alpha$  с жестким штампом по области  $\varphi = 0$ ,  $0 < a \leq r \leq b$  (рис. 1). Для решения задачи удобно ввести полярные координаты  $r$ ,  $\varphi$  с полюсом в вершине клина. Принимается, что вне области контакта грань  $\varphi = 0$  не нагружена, трение не учитывается. Краевые условия задачи формулируются следующим образом. Грань клина  $\varphi = \alpha$  жестко заделана (задача А) или свободна от напряжений (задача Б). Материал клина является неоднородным: коэффициент Пуассона  $\nu = \nu(\varphi)$ , модуль сдвига постоянен:  $G = \text{const}$ . Без ограничения общности будем считать, что штамп имеет плоское основание

и вдавливаются без перекоса на величину  $\delta$  под действием силы  $P$ . В задаче А при заданных величинах  $a, b, \alpha, \delta, G$  и известной функции  $v(\varphi)$  требуется определить контактное давление  $\sigma_\varphi(r, 0) = -q(r)$  в области контакта. Затем может быть определена сила  $P$  и точка ее приложения. В задаче Б невозможно установить связь между приложенной к штампу силой  $P$  и осадкой  $\delta$  [7, 28, 29], поэтому вместо  $\delta$  заданной считается величина  $P$ . Этот известный парадокс связан с плоской постановкой задачи для клина или полуплоскости (частный случай клина) [7] и устраняется при рассмотрении пространственной контактной задачи (типа Герца) для клина с одной свободной гранью и полупространства (частный случай пространственного клина) [29].

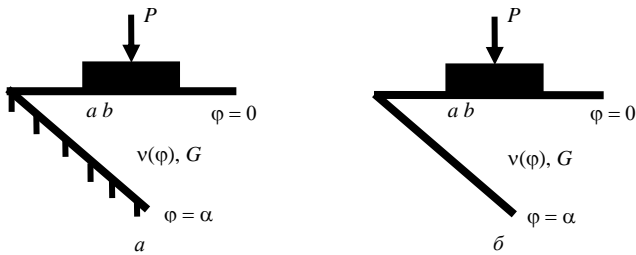


Рис. 1. Контакт штампа и клина при жесткой заделке (а) и отсутствии напряжений (б)

Fig. 1. Contact of the punch and the wedge for a rigid fixation (a) and without stress (b)

Для сведения контактных задач к интегральным уравнениям относительно  $q(r)$  рассмотрим вспомогательные задачи о действии заданной нагрузки на грань описанного выше неоднородного клина при разных граничных условиях на другой его грани (жесткая заделка или отсутствие напряжений). Точные решения вспомогательных краевых задач находятся на основе общего представления типа Фрайбергера [34] решения уравнений упругого равновесия в полярной системе координат при переменном коэффициенте Пуассона [28, 29]. Задачи сводятся к векторному уравнению Лапласа и скалярному уравнению Пуассона, правая часть которого зависит от функции  $v(\varphi)$ . Решения этих уравнений находятся при помощи интегрального преобразования Меллина [35]. Нормальное упругое перемещение поверхности клина под приложенной нагрузкой представляется в форме интеграла Меллина (нагрузка также находится под знаком интеграла). Приравнявая найденное упругое перемещение осадке штампа, получаем интегральное уравнение (ИУ)

$$\frac{1}{4G\pi i} \int_a^b q(\rho) d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H_m(s) \left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds = \delta, \quad a \leq r \leq b, \quad (1)$$

где для задач А ( $m = 1$ ) и Б ( $m = 2$ )

$$H_1(s) = \frac{\sin 2s\alpha + s(E_2 + E_4)}{s\Delta_1(s)}, \quad H_2(s) = \frac{-(E_2 + E_4)}{s^2\Delta_2(s)},$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) &= 1 - s^2(E_1^2 + E_2^2 - E_3^2 - E_4^2) - \\ &\quad - 2s(E_3 \cos 2s\alpha - E_4 \sin 2s\alpha), \\ \Delta_2(s) &= E_1^2 + E_2^2 - E_3^2 - E_4^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$E_1 = \int_0^\alpha \eta(t) \sin(2t) dt, \quad E_2 = \int_0^\alpha \eta(t) \cos(2t) dt,$$

$$E_3 = \int_0^\alpha \eta(t) \sin(2st) dt,$$

$$E_4 = \int_0^\alpha \eta(t) \cos(2st) dt, \quad \eta(\varphi) = \frac{-1}{2(1-v(\varphi))}.$$

При  $v(\varphi) = \text{const}$  ИУ (1), (2) совпадают с известными ИУ для однородного клина [5, 7]. Предположим, что функция  $\eta(\varphi)$  разлагается в ряд Фурье, и далее без ограничения общности оставим в этом разложении два члена:

$$\eta(\varphi) = \frac{-1}{2(1-v_0)} - v_1 \sin(n\varphi), \quad v_0 = v(0), \quad v_1, n = \text{const}. \quad (3)$$

В отличие от задачи А, в задаче Б символ ядра ИУ  $H_2(s)$  имеет двукратный полюс при  $s = 0$ . Это и будет препятствовать возможности найти связь между  $P$  и  $\delta$  в задаче Б.

Переходя в ядре ИУ (1) к интегрированию по вещественной оси, используя теорию вычетов для задачи Б, после введения безразмерных величин

$$\begin{aligned} x &= \lambda \ln \frac{r}{a} - 1, \quad \lambda = 2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^{-1}, \\ f &= \frac{\lambda \delta}{a}, \quad \varphi(x) = \frac{r q(r)}{a \theta}, \quad \theta = \frac{G}{1-v_0} \end{aligned} \quad (4)$$

придем к ИУ ( $m = 1$  и  $2$  для задач А и Б соответственно)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k \left( \frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = \pi f \quad (|x| \leq 1), \quad (5)$$

$$k(t) = \int_0^\infty L_m(u) \frac{\cos(ut)}{u} du + \frac{\pi}{2} B_m t, \quad B_m = \lim_{u \rightarrow 0} u L_m(u), \quad B_1 = 0,$$

$$L_1(u) = \frac{2\kappa_0 \text{sh} 2\alpha u - 2u \sin 2\alpha + 2u \kappa v_1 (H_2 + H_4)}{d_1(u)},$$

$$\kappa_0 = 3 - 4v_0, \quad \kappa = 2(1 - v_0),$$

$$L_2(u) = \frac{\text{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha - u \kappa v_1 (H_2 + H_4)}{d_2(u)},$$

$$d_1(u) = 2\kappa_0 \text{ch} 2\alpha u + 2u^2 (1 - \cos 2\alpha) + \kappa_0^2 + 1 + 2u \kappa v_1 (2\kappa F_0 + u \kappa v_1 F_1 + F_2),$$

$$d_2(u) = 2(\text{sh}^2 \alpha u - u^2 \sin^2 \alpha) - \kappa v_1 u (\kappa v_1 u F_1 + F_2),$$

$$F_0 = H_3 \text{ch} 2\alpha u - H_4 \text{sh} 2\alpha u, \quad F_1 = (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - H_4^2) / 2,$$

$$F_2 = H_1 u (\cos 2\alpha - 1) - H_2 u \sin 2\alpha - H_3 (\text{ch} 2\alpha u - 1) + H_4 \text{sh} 2\alpha u,$$

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{\sin(n+2)\alpha}{n+2} - \frac{\sin(n-2)\alpha}{n-2}, \\
 H_2 &= \frac{\cos(n+2)\alpha - 1}{n+2} + \frac{\cos(n-2)\alpha - 1}{n-2}, \\
 H_3 &= 2 \frac{n \cos n\alpha \operatorname{sh} 2\alpha u - 2u \sin n\alpha \operatorname{ch} 2\alpha u}{n^2 + 4u^2}, \\
 H_4 &= 2 \frac{n(\cos n\alpha \operatorname{ch} 2\alpha u - 1) - 2u \sin n\alpha \operatorname{sh} 2\alpha u}{n^2 + 4u^2}.
 \end{aligned}$$

Безразмерный параметр  $\lambda$  вида (4) характеризует относительную удаленность области контакта от вершины клина. Для решения ИУ (5) применим регулярный асимптотический метод [5–8], эффективный при больших значениях параметра  $\lambda$  (вдали от угловой точки). Как известно [6], структура асимптотики существенно зависит от поведения символа ядра  $L_m(u)$  на бесконечности. Для однородного материала ( $v_1 = 0$ ) функция  $L_m(u) - 1$  экспоненциально убывает при  $u \rightarrow \infty$  [7]. Здесь же имеем

$$\begin{aligned}
 L_m(u) &= 1 + \frac{c_1}{u} + \frac{c_2}{u^2} + O\left(\frac{1}{u^3}\right) \quad (u \rightarrow \infty), \\
 c_1 &= -\frac{\kappa v_1 n}{2}, \quad c_2 = c_1^2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Поведение (6) приводит к появлению в асимптотическом решении логарифмических членов, которые отсутствуют для однородного клина [6,7]. Именно на основании (6) можно показать, что для ядра ИУ (5) имеет место степенно-логарифмическое разложение по малому параметру  $t \rightarrow 0$  [6, 36]:

$$\begin{aligned}
 k(t) &= -\ln |t| + a_{30} + \pi B_m t / 2 + a_{20} |t| + \\
 &\quad + a_{11} t^2 \ln |t| + a_{31} t^2 + O(t^3 \ln |t|), \\
 a_{30} &= \int_0^\infty \frac{L_m(u) - 1 + \exp(-u)}{u} du, \quad a_{20} = -\frac{\pi c_1}{2}, \quad a_{11} = \frac{c_2}{2}, \tag{7} \\
 a_{31} &= -\frac{3c_2}{4} + \frac{1}{2} \int_0^\infty [u^2 - u^2 L_m(u) + c_1 u + c_2 (1 - \exp(-u))] \frac{du}{u}.
 \end{aligned}$$

Для задачи Б разложение (7) содержит бесконечную постоянную  $a_{30}$  ввиду расходимости интеграла в нуле. Регулярный асимптотический метод для обеих задач начинается с почленного дифференцирования ИУ (5) по  $x$ . После дифференцирования ИУ (5) бесконечная постоянная в ядре для задачи Б исчезает (интеграл в ядре становится сходящимся), а главный логарифмический член в (7) для обеих задач переходит в известное сингулярное ядро Коши. Асимптотическое решение разыскивается в форме степенно-логарифмического разложения по  $1/\lambda$  с неизвестными функциями – коэффициентами этого разложения. Группируются и приравниваются члены при одинаковых степенях  $\ln^k(\lambda)/\lambda^l$ . Для находж-

дения каждого последующего члена асимптотики возникает сингулярное ИУ с ядром Коши, правая часть которого зависит от предыдущих, уже найденных членов. Поскольку производная правой части ИУ (5) равна нулю, для первого члена асимптотики имеем однородное сингулярное ИУ с ядром Коши, нетривиальное решение которого зависит от одной произвольной постоянной [6]. Эта произвольная постоянная окончательно находится из интегрального условия равновесия штампа

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{\lambda P}{a\theta} = P_*. \tag{8}$$

Таким образом, контактное давление оказывается прямо пропорциональным приложенной к штампу безразмерной силе  $P_*$ . Затем в задаче А для определения связи между силой и осадкой штампа полученное решение следует подставить в исходное ИУ (5). В задаче Б этого сделать нельзя из-за расходимости первого интеграла (7).

В результате приближенное асимптотическое решение контактных задач получим в виде ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \frac{P_*}{\pi \sqrt{1-x^2}} \times \\
 &\times \left[ 1 + \frac{\omega_{10}(x)}{\lambda} + \frac{\omega_{20}(x)}{\lambda^2} + \frac{\ln \lambda}{\lambda^2} \omega_{21}(x) + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^3}\right) \right], \tag{9} \\
 \omega_{10}(x) &= \frac{4}{\pi^2} a_{20} S_1(x) + \frac{\pi B_m}{2} x, \quad \omega_{21}(x) = -a_{11}(1-2x^2), \\
 \omega_{20}(x) &= (a_{11}(1,5 - \ln 2) + a_{31})(1-2x^2) + \frac{32}{\pi^4} a_{20}^2 (S_2(x) - S_0) - \\
 &\quad - \frac{a_{20} B_m}{\pi} \left[ (1-x^2) \ln \frac{1-x}{1+x} - 2x \right], \\
 S_0 &= \sum_{m=1}^\infty \frac{4m}{(4m^2-1)^3}, \\
 S_1(x) &= 1 - 2x^2 + 2\sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{\sin[(2m+1) \arccos x]}{(2m+1)^2}, \\
 S_2(x) &= \sqrt{1-x^2} \left[ 0,4356 + 0,1321x^2 + 0,2494x \ln \frac{1-x}{1+x} \right].
 \end{aligned}$$

В задаче А интегральная характеристика контактного давления (8) (безразмерная вдавливающая сила) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 P_* &= \pi f [a_{30} + 0,8106 a_{20} \lambda^{-1} + (a_{11} + a_{31} - 0,03287 a_{20}^2) \lambda^{-2} + \\
 &\quad + \ln(2\lambda)(1 - a_{11} \lambda^{-2}) + O(\lambda^{-4} \ln(2\lambda))]^{-1}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Погрешность решения (9), (10) при  $\lambda \geq 5$  и не слишком малых углах  $\alpha$  не превосходит 5%. Это решение можно рекомендовать, когда область контакта (штамп) относительно удалена от вершины клина.

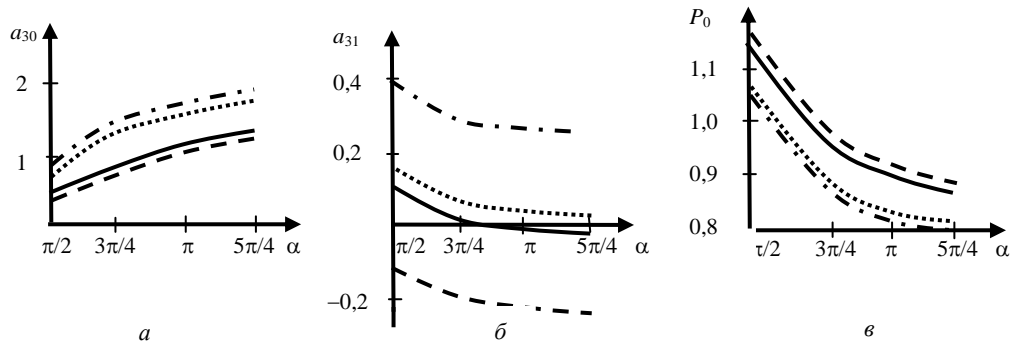


Рис. 2. Графики величин (7) –  $a$ ,  $\bar{b}$  и (10) –  $\bar{c}$ ,  $P_0 = P^*/f$ , в задаче А: сплошные линии при  $\nu_1 = 0,1, n = 1$ ; пунктир при  $\nu_1 = 0,1, n = 3$ ; точки при  $\nu_1 = -0,1, n = 1$ ; точка-пунктир при  $\nu_1 = -0,1, n = 3$

Fig. 2. Plots of parameters (7) – ( $a, \bar{b}$ ) and (10) – ( $\bar{c}, P_0 = P^*/f$ ), in problem A: solid lines for  $\nu_1 = 0,1, n = 1$ ; dashed for  $\nu_1 = 0,1, n = 3$ ; dotted for  $\nu_1 = -0,1, n = 1$ ; dashed-dotted for  $\nu_1 = -0,1, n = 3$

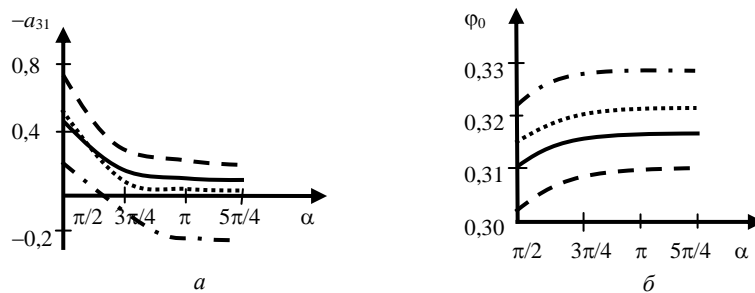


Рис. 3. Графики величин (7) –  $a$  и (11) –  $\bar{b}$  в задаче Б: сплошные линии при  $\nu_1 = 0,1, n = 1$ ; пунктир при  $\nu_1 = 0,1, n = 3$ ; точки при  $\nu_1 = -0,1, n = 1$ ; точка-пунктир при  $\nu_1 = -0,1, n = 3$

Fig. 3. Plots of parameters (7) – ( $a$ ) and (11) – ( $\bar{b}$ ) in problem B: solid lines for  $\nu_1 = 0,1, n = 1$ ; dashed for  $\nu_1 = 0,1, n = 3$ ; dotted for  $\nu_1 = -0,1, n = 1$ ; dashed-dotted for  $\nu_1 = -0,1, n = 3$

Для задачи А на рис. 2 показано поведение постоянных  $a_{30}$  и  $a_{31}$  (7) и отнесенной к осадке силы (10) в зависимости от угла  $\alpha$  при разных  $\nu_1$  и  $n$  ( $\nu_0 = 0,3$ ; в (10) взято  $\lambda = 5$ ).

На основе решения (9) для давления при  $x = 0$  получим

$$\varphi_0 = \frac{\varphi(0)}{P_*} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi^2 \lambda} a_{20} 0,8320 + \frac{1}{\lambda^2} (a_{11}(1,5 - \ln 2) + a_{31} + \frac{32}{\pi^4} a_{20}^2 0,2848) - \frac{\ln \lambda}{\lambda^2} a_{11} + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^3}\right) \right\}. \quad (11)$$

Для задачи Б на рис. 3 приведены графики зависимостей постоянной  $a_{31}$  (7) и отнесенного к силе давления (11) от угла  $\alpha$  при разных  $\nu_1$  и  $n$  ( $\nu_0 = 0,3$ ; в (11) взято  $\lambda = 5$ ).

## 2. Учет трения и шероховатости

Рассмотрим контактную задачу Б, которая отличается от задачи А тем, что в зоне контакта будем учитывать силы трения и шероховатость поверхности клина. Пусть силы трения подчиняются закону Кулона:  $\varphi = 0$ :  $\tau_{\tau\varphi} = -\mu q(r)$  ( $r \in (a, b)$ ), где  $\mu$  – коэффициент

трения. Шероховатость поверхности в контактных задачах будем моделировать покрытием винклеровского типа в предположении, что коэффициент постели линейно зависит от радиальной координаты. Такое покрытие вносит дополнительный вклад в нормальное перемещение в области контакта (снова используем размерные обозначения)

$$u_* = A r q(r), \quad A = \text{const}. \quad (12)$$

Условие контакта имеет вид

$$u_* + u = \delta \quad (r \in (a, b)), \quad (13)$$

где  $u$  – упругое нормальное перемещение точек поверхности под действием контактного давления и сил кулоновского трения, которое определяется с использованием фундаментальных решений вспомогательных краевых задач;  $\delta$  – осадка плоского штампа. Для изменяющегося по угловой координате коэффициента Пуассона снова принимаем закон (3). Добавляя к обозначениям (4) величину  $A_* = \lambda A \theta$ , безразмерное ИУ задачи В на основании формул (12) и (13) можно записать в форме

$$A_* \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) k_* \left( \frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = f \quad (|x| \leq 1), \quad (14)$$

$$k_*(t) = \int_0^\infty L_{11}(u) \frac{\cos(ut)}{u} du + \int_0^\infty L_{21}(u) \frac{\sin(ut)}{u} du.$$

Здесь ядра имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11}(u) &= L_1(u) + 2\mu u \frac{2\sin^2 \alpha - \kappa v_1 H_1}{d_1(u)}, \\ L_{21}(u) &= \frac{\mu}{\kappa} - 2\mu \frac{\kappa_0 \operatorname{ch} 2\alpha u + \kappa v_1 H_3}{d_1(u)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В формулах (15) использованы обозначения, принятые в формулах (5).

В отличие от уравнения (5), ИУ (14) является уравнением второго рода. Несмотря на логарифмическую особенность ядра, его решение уже не обладает корневыми особенностями и принимает конечные значения на краях области контакта при  $A_* \neq 0$ .

Символы (15) характеризуются следующим поведением в бесконечности:

$$L_{1m}(u) = C_{1m} + O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (u \rightarrow \infty), \quad C_{11} = 1, \quad C_{21} = \text{const.} \quad (16)$$

Для численного решения ИУ (14) используем метод коллокаций на основе квадратурной формулы Гаусса. Метод эффективен при не слишком малых углах  $\alpha$  и значениях параметра  $\lambda \geq 1$ . Для улучшения сходимости интегралов в ядре (14) на основе поведения (16) выделим из них главные части:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty L_{11}(u) \frac{\cos(ut)}{u} du = \\ &= \int_0^\infty \frac{(L_{11}(u) - 1) \cos(ut) + \exp(-u)}{u} du - \ln |t|, \\ &\int_0^\infty L_{21}(u) \frac{\sin(ut)}{u} du = \\ &= \int_0^\infty [L_{21}(u) - C_{21}] \frac{\sin(ut)}{u} du + \frac{\pi}{2} C_{21} \operatorname{sgn} t. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь использованы значения интегралов [6, 36]

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\cos(ut) - \exp(-u)}{u} du = -\ln |t|, \\ &\int_0^\infty \frac{\sin(ut)}{u} du = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t. \end{aligned} \quad (18)$$

В правых частях формул (17) подынтегральные функции убывают на бесконечности как  $u^{-2}$ .

На рис. 4 для задачи Б приведены графики интегральной характеристики контактных давлений  $P_0 = P_*/f$  в зависимости  $v_1$  при разных уровнях шероховатости (коэффициентов постели основания Винклера) для случая  $\mu = 0,2$  и  $\alpha = \pi$ ,  $n = 1$ ,  $v_0 = 0,3$  и различных значениях  $\lambda$ .

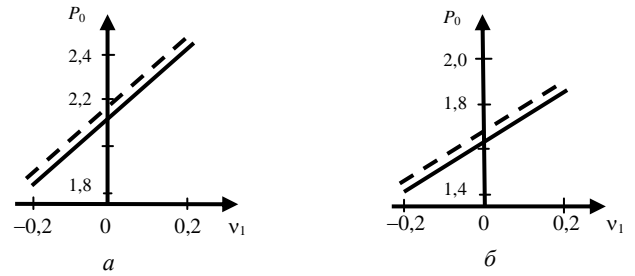


Рис. 4. Графики силы, отнесенной к осадке ( $P_0 = P_*/f$ ), в задаче Б: а – при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0,2$ ; б – при  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 0,2$ : сплошные линии при  $A_* = 0,01$ ; пунктир при  $A_* = 0,001$

Fig. 4. Plots of the force related to the settlement ( $P_0 = P_*/f$ ) in problem C, a – for  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0,2$ ; b – for  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 0,2$ : solid lines for  $A_* = 0,01$ ; the dashed line for  $A_* = 0,001$

Как показывают расчеты, в диапазоне  $-0,2 \leq \mu \leq 0,2$  отличие соответствующих значений  $P_0$  от приведенных на рис. 4 не превосходит 1 %. Зависимость  $P_0$  от  $v_1$  близка к линейной.

### Закключение

Неоднородность клина по угловой координате меняет характер поведения символа ядра ИУ контактных задач на бесконечности, что приводит к появлению логарифмических членов в регулярном асимптотическом решении (9), (10). Такие члены отсутствуют в решениях для однородного клина [7]. Ранее аналогичное изменение поведения символа было отмечено в контактных задачах для неоднородной по глубине полосы (экспоненциальное убывание на бесконечности заменяется на степенное) [10].

Коэффициент Пуассона  $\nu(\varphi)$  при законе изменения (3) возрастает при  $v_1 > 0$  и убывает при  $v_1 < 0$  от значения  $\nu_0 = 0,3$  (от грани контакта  $\varphi = 0$ ). В задаче А при возрастающем коэффициенте Пуассона по угловой координате (при этом модуль продольной упругости также возрастает) контактные давления и сила, отнесенные к осадке штампа  $f$ , больше, чем при убывающем. С ростом  $\lambda$  давления и сила убывают ввиду отдаления области контакта от грани с жесткой заделкой. При росте  $n$  (частоты осцилляций изменения коэффициента Пуассона) в задаче А сила возрастает при фиксированном  $v_1 > 0$  и убывает при фиксированном  $v_1 < 0$ .

В задаче Б для неоднородного плоского клина с одной свободной от напряжений гранью невозможно установить связь между силой, приложенной к штампу, и осадкой штампа. Это находится в соответствии с известными контактными задачами для однородного плоского клина и для упругой полуплоскости (частный случай клина) [7, 37].

В случае задачи Б интегральная характеристика давлений слабо зависит от коэффициента трения, который влияет в основном на асимметрию (перераспределение) давлений по области контакта. При приближении

области контакта к вершине клина (с уменьшением  $\lambda$ ) значения интегральной характеристики увеличиваются. При возрастании параметра шероховатости  $A_x$  контактные давления снижаются. Значения  $P_0$  монотонно возрастают с ростом  $\nu_1$ , что объясняется повышением коэффициента Пуассона вблизи грани клина в контакте.

Для всех трех задач достоверность выведенных ИУ подтверждается их совпадением в частных случаях с известными для однородного материала клина [5–7, 29]. Достоверность полученных асимптотических решений (9)–(11) для задач А и Б подтверждается их совпадением в частных случаях с известными решениями ИУ для однородного материала клина [5–7]. Численные реше-

ния задачи Б, полученные по методу коллокаций, верифицировались путем увеличения числа узлов коллокаций.

## Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00017).

## Acknowledgments

The work was carried out with financial support RFBR (Grant No. 18-01-00017).

## Библиографический список

1. Popov V.L., Heß M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. – Berlin: Springer, 2015. – 265 p. DOI: 10.1007/978-3-642-53876-6
2. Argatov I., Heß M., Pohrt R., Popov V.L. The extension of the method of dimensionality reduction to non-compact and non-axisymmetric contacts // ZAMM. – 2016. – Vol. 96, no. 10 – P. 1144–1155. DOI: 10.1002/zamm.201600057
3. Barber J.R. Contact mechanics. – Berlin: Springer, 2018. – 585 p. DOI: 10.1007/978-3-319-70939-0
4. Argatov I. From Winkler’s foundation to Popov’s foundation // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 17, no 2. – P. 181–190. DOI: 10.22190/FUME190330024A
5. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
7. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
8. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – 406 p.
9. Fabrikant V.I. Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space // Acta Mechanica. – 2017. – Vol. 228, no. 4 – P. 1541–1560. DOI: 10.1007/s00707-016-1788-x
10. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.В. Белокопы, Л.И. Кренин, И.С. Трубочник. – М.: Физматлит, 2006. – 240 с.
11. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.С. Васильев, Л.И. Кренин, И.С. Трубочник. – М.: Физматлит, 2011. – 192 с.
12. Argatov I.I., Sabina F.J. Small-scale indentation of a hemispherical inhomogeneity in an elastic half-space // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2015. – Vol. 53 – P. 151–162. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.04.003
13. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора / С.С. Волков, А.С. Васильев, С.М. Айзикович, Н.М. Селезнев, А.В. Леонтьева // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02
14. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties / A.S. Vasiliev, M.V. Swain, S.M. Aizikovich, E.V. Sadyrin // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, no. 7 – P. 1247–1254. DOI: 10.1007/s00419-015-1089-1
15. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 28, no. 1-2. – P. 11–15.
16. Индикация термоупругой неустойчивости скользящего контакта с помощью заглубленной пьезокерамической прослойки / В.Б. Зеленцов, Б.И. Митрин, А.Г. Сукиязов, С.М. Айзикович // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017 – № 1. – С. 63–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05
17. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Approximate analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – Vol. 35, no. 1. – P. 175–180. DOI: 10.18720/MPM.3512018\_20
18. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. – М.: Физматлит, 2009. – 316 с.
19. Yastrebov V.A. Anciaux G., Molinari J.-F. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: evolution of the contact area // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol. 52 – P. 83–102. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.09.019
20. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction. – 2017. – Vol. 5, no. 3. – P. 339–350. DOI: 10.1007/s40544-017-0179-1
21. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 991, no. 1 – P. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012028
22. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Ленанд, 2014. – 376 с.
23. Бородачев А.Н., Дудинский В.И. Жесткий штамп на упругом полупространстве с изменяющимся по глубине коэффициентом Пуассона // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21, № 8. – С. 34–39.
24. Бородачев А.Н. Упругое равновесие неоднородного по толщине слоя // Прикладная механика. 1988. – Т. 24, № 8. – С. 30–35.
25. Кузнецов Е.А. Давление круглого цилиндра на полупространство с переменным по глубине коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. – 1985. – № 1. – С. 73–86.



26. Пожарский Д.А., Пожарская Е.Д. Контактные задачи для упругого неоднородного тела с цилиндрической шахтой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 202–210. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.18

27. Пожарский Д.А., Золотов Н.Б. Контактные задачи для полых цилиндров из неоднородного материала // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 6. – С. 130–138. DOI: 10.15372/PMTF2019000

28. Пожарский Д.А. Упругое равновесие неоднородного клина с переменным коэффициентом Пуассона // Прикладная математика и механика. – 2016. – Т. 80, вып. 5. – С. 614–621.

29. Пожарский Д.А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения. – Ростов н/Д: ООО «ДГТУ-Принт», 2019. – 312 с.

30. Bach M., Pozharskii D.A. 3-D Contact problems for elastic wedges with Coulomb friction // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2004. – Vol. 27, no. 2 – P. 193–220. DOI: 10.1002/mma.451

## References

1. Popov V.L., Heß M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. *Berlin, Springer*, 2015, 265 p. DOI: 10.1007/978-3-642-53876-6

2. Argatov I., Heß M., Pohrt R., Popov V.L. The extension of the method of dimensionality reduction to non-compact and non-axisymmetric contacts. *ZAMM*, 2016, vol. 96, no. 10, pp. 1144–1155. DOI: 10.1002/zamm.201600057

3. Barber J.R. Contact mechanics. *Berlin, Springer*, 2018, 585 p. DOI: 10.1007/978-3-319-70939-0

4. Argatov I. From Winkler's foundation to Popov's foundation. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*, 2019, vol. 17, no 2, pp. 181–190. DOI: 10.22190/FUME190330024A

5. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. Неклассические смешанные задачи теории упругости [Non-classical mixed problems of the elasticity theory]. *Moscow, Nauka*, 1974, 456 p.

6. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviiami [Problems with mixed boundary conditions in continuum mechanics]. *Moscow, Nauka*, 1986, 336 p.

7. Aleksandrov V.M., Romalis B.L. Kontaktnye zadachi v mashinostroenii [Contact problems in machine-building]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1986, 176 p.

8. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. *Dordrecht, Kluwer*, 2001, 406 p.

9. Fabrikant V.I. Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space. *Acta Mechanica*, 2017, vol. 228, no. 4, pp. 1541–1560. DOI: 10.1007/s00707-016-1788-x

10. Aizikovich S.M., Aleksandrov V.M., Belokon' A.V., Krenev L.I., Trubchik I.S. Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlia neodnorodnykh sred [Contact problems of the elasticity theory for inhomogeneous media]. *Moscow, Fizmatlit*, 2006, 240 p.

11. Aizikovich S.M., Aleksandrov V.M., Vasil'ev A.S., Krenev L.I., Trubchik I.S. Analiticheskie resheniia smeshannykh osesimmetrichnykh zadach dlia funktsional'no-gradientnykh sred [Analytical solutions of mixed axially symmetric problems for functionally-graded media]. *Moscow, Fizmatlit*, 2011, 192 p.

12. Argatov I.I., Sabina F.J. Small-scale indentation of a hemispherical inhomogeneity in an elastic half-space. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2015, vol. 53, pp. 151–162. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.04.003

31. Колчин Г.Б. Плоская задача теории упругости для неоднородного клина // Изв. АН СССР. МТТ. – 1971. – № 1. – С. 157–160.

32. Колчин Г.Б., Лапенко В.В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости для неоднородного клина // Прикладная механика. – 1971. – Т. 11, № 7. – С. 84–89.

33. Колчин Г.Б., Лапенко В.В. Плоская задача термоупругости для неоднородного клина, жестко защемленного по одной из граней // Тепловые напряжения в элементах конструкций: сб. ст. – Вып. 18. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 65–68.

34. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity. *Handbuch der Physik*. Vol. VIa/2. – Berlin: Springer, 1972 – P. 1–295.

35. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 368 с.

36. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

37. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 270 с.

13. Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Leontieva A.V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02

14. Vasiliev A.S., Swain M.V., Aizikovich S.M., Sadyrin E.V. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, vol. 86, no. 7, pp. 1247–1254. DOI: 10.1007/s00419-015-1089-1

15. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating. *Materials Physics and Mechanics*, 2016, vol. 28, no. 1–2, pp. 11–15.

16. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Sukiyazov A.G., Aizikovich S.M. Indikatsiia termouprugoi neustoichivosti skol'ziashego kontakta s pomosh'yu zaglublennoi p'ezokeramicheskoi prosloiki [Indication of thermoelastic instability of sliding contact using embedded piezoceramic interlayer]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, No. 1, pp. 63–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05

17. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Approximate analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 35, no. 1, pp. 175–180. DOI: 10.18720/MPM.3512018\_20

18. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred [Surface dynamics of inhomogeneous media]. *Moscow, Fizmatlit*, 2009, 316 p.

19. Yastrebov V. A. Anciaux G., Molinari J.-F. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: evolution of the contact area. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 52, pp. 83–102. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.09.019

20. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies. *Friction*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339–350. DOI: 10.1007/s40544-017-0179-1

21. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 991, no. 1, pp. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012028



22. Lomakin V.A. Teoriia uprugosti neodnorodnykh tel [Theory of elasticity of inhomogeneous bodies]. *Moscow, Lenand*, 2014, 376 p.
23. Borodachev A.N., Dudinskii V.I. Rigid punch on an elastic semispaces with a depth-varying Poisson ratio. *Soviet Applied Mechanics*, 1985, vol. 21, no. 8, pp. 753-757.
24. Borodachev A.N. Elastic equilibrium in a layer inhomogeneous with depth. *Soviet Applied Mechanics*, 1988, vol. 24, no. 8, pp. 753-758.
25. Kuznetsov E.A. Pressure of a circular cylinder against a half-space with Poisson's ratio that varies with depth. *Mechanics of Solids*, 1985, vol. 20, no. 1, pp. 68-80.
26. Pozharskii D.A., Pozharskaya E.D. Contact problems for an elastic inhomogeneous body with cylindrical mine. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 202-210. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.18
27. Pozharskii D.A., Zolotov N.B. Contact problems for hollow cylinders made of an inhomogeneous material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1085-1095. DOI: 10.1134/S0021894419060142
28. Pozharskii D.A. The elastic equilibrium of an inhomogeneous wedge with varying Poisson's ratio. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 80, no. 5, pp. 433-438. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.010
29. Pozharskii D.A. Fundamental'nye resheniia statiki uprugogo klina i ikh prilozheniia [Fundamental solutions of statics of an elastic wedge and their applications]. *Rostov-on-Don, DSTU-Print*, 2019, 312 p.
30. Bach M., Pozharskii D.A. 3-D Contact problems for elastic wedges with Coulomb friction. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2004, vol. 27, no. 2, pp. 193-220. DOI: 10.1002/mma.451
31. Kolchin G.B. Ploskaia zadacha teorii uprugosti dlia neodnorodnogo klina [Plane problem of the elasticity theory for an inhomogeneous wedge]. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1971, no. 1, pp. 157-160.
32. Kolchin G.B., Lapenko V.V. Integral transforms in the problems of the theory of elasticity for a nonhomogeneous wedge. *Soviet Applied Mechanics*, 1971, vol. 7, no. 11, pp. 1246-1250.
33. Kolchin G.B., Lapenko V.V. Ploskaia zadacha termo-uprugosti dlia neodnorodnogo klina, zhestko zaschemlennogo po odnoi iz grani [Plane problem of the thermoelasticity for an inhomogeneous wedge rigidly clamped over one its face]. *Kiev, Naukova Dumka, Teplovyie napriazheniia v elementakh konstruksii. Sbornik statei. Vypusk 18* (Heat stresses in the elements of constructions. Collection of articles. Issue 18). 1978, pp 65-68.
34. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity. *Handbuch der Physik*. Vol. VIa/2. *Berlin, Springer*, 1972, pp. 1-295.
35. Ufliand Ia.S. Integral'nye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti [Integral transforms in problems of the elasticity theory]. *Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of USSR Publishing*, 1963, 368 p.
36. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums and products]. *Moscow, Nauka*, 1971, 1108 p.
37. Shtaerman I.Ia. Kontaktnaia zadacha teorii uprugosti [Contact problem of the elasticity theory]. *Moscow, Leningrad, GITTL*, 1949, 270 p.