

Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. С. 72–85. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.08

Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part II. PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, no. 1, pp. 72-85. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.08



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2021

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.08

УДК 539.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ М. УИЛЬЯМСА У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ. ЧАСТЬ II

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 01 июня 2020 г.
Принята: 01 марта 2021 г.
Опубликована: 15 апреля 2021 г.

Ключевые слова:

цифровая фотоупругость, поле напряжений у вершины трещины, асимптотическое решение М. Уильямса, высшие приближения, коэффициенты высших приближений, конечно-элементное имитационное моделирование.

АННОТАЦИЯ

С помощью конечно-элементного моделирования вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в упругой пластине с центральной трещиной в поле одноосного растяжения и в упругом полудиске с вертикальным надрезом для испытаний на трехточечный изгиб. В многофункциональном пакете Simulia Abaqus выполнен конечно-элементный анализ нагружения пластины с центральной трещиной, аналогичной использованной в натурном эксперименте. С помощью рассчитанного напряженно-деформированного состояния определены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, в котором удержаны пятнадцать слагаемых. Таким образом, из конечно-элементного решения извлечены коэффициенты высших приближений многопараметрического асимптотического разложения. Предлагаемый в настоящей статье алгоритм был протестирован на пластине с центральной трещиной, длина которой много меньше, чем длина стороны пластины, для сравнения с известным аналитическим решением для бесконечной пластины с трещиной, построенным с помощью методов теории функции комплексного переменного, которое позволяет отыскать все коэффициенты высших приближений асимптотического разложения поля напряжений. Показано, что разработанный алгоритм позволяет найти коэффициенты асимптотического разложения с высокой точностью, включая коэффициенты высших приближений. Наряду с пластиной с центральной трещиной проведен конечно-элементный анализ поля напряжений в полукруглом диске с вертикальным надрезом, для которого также восстановлены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, в котором удержаны первые пятнадцать слагаемых. Приведено сравнение коэффициентов разложения М. Уильямса, полученных с помощью метода цифровой фотоупругости и из МКЭ-анализа, свидетельствующее о хорошем совпадении результатов.

© ПНИПУ

© Степанова Лариса Валентиновна – д.ф.-м.н., доц., e-mail: stepanova.lv@ssau.ru, [ID: 0000-0002-6693-3132](https://orcid.org/0000-0002-6693-3132)

Stepanova L.V. – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: stepanova.lv@ssau.ru, [ID: 0000-0002-6693-3132](https://orcid.org/0000-0002-6693-3132)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

EXPERIMENTAL DETERMINATION AND FINITE ELEMENT ANALYSIS OF COEFFICIENTS OF THE MULTI-PARAMETER WILLIAMS SERIES EXPANSION IN THE VICINITY OF THE CRACK TIP IN LINEAR ELASTIC MATERIALS. PART II

L.V. Stepanova

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 June 2020
Accepted: 01 March 2021
Published: 15 April 2021

Keywords:

digital photoelasticity, stress field near the crack tip, Williams asymptotic solution, higher order terms, coefficients of the higher-order terms, finite element analysis.

ABSTRACT

In this study coefficients of the multi-parameter Williams power series expansion for the stress field in the vicinity of the central crack in the rectangular plate and in the semi-circular notched disk under bending are obtained by the use of the finite element analysis. In SIMULIA Abaqus, the finite element analysis software, the numerical solutions for these two cracked geometries are found. The rectangular plate with the central crack has the geometry similar to the geometry used in the digital photoelasticity. Numerical simulations of the same cracked specimen as in the experimental photoelasticity method are performed. The numerical solutions obtained are utilized for the determination of the coefficients of the Williams series expansion. The higher-order coefficients are extracted from the finite element method calculations implemented in Simulia Abaqus software package and the outcomes are compared to experimental values. Determination of the coefficients of the terms of this series is performed using the least squares-based regression technique known as the over-deterministic method, for which stresses data obtained numerically in SIMULIA Abaqus software are taken as inputs. The plate with a small central crack has been considered either. This kind of the cracked specimen has been utilized for comparison of coefficients of the Williams series expansion obtained from the finite element analysis with the coefficients known from the theoretical solution based on the complex variable theory in plane elasticity. It is shown that the coefficients of the Williams series expansion match with good accuracy. The higher-order terms in the Williams series expansion for the semi-circular notch disk are found.

© PNRPU

Введение

Наряду с экспериментальными методами построения многопараметрического разложения М. Уильямса у вершины трещины в настоящее время коэффициенты асимптотического разложения находят с помощью вычислительного эксперимента в программных комплексах, реализующих метод конечных элементов [1–14]. В данных работах предложены различные схемы расчета, нацеленные на извлечение параметров разрушения из конечно-элементного анализа. Следует заметить, что в большинстве работ определяются первые два коэффициента многопараметрического разложения М. Уильямса, а именно – коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжение. Определение коэффициентов высших приближений вызывает математические сложности и имеются отдельные результаты [8–11] для ряда конфигураций тел с трещинами и надрезами.

В настоящей статье с помощью конечно-элементного моделирования вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины в пластине с центральной трещиной и у вершины надреза в круговом полудиске, предназначенном на испытание на трехточечный изгиб. В разложении М. Уильямса удержаны высшие приближения (пятнадцать слагаемых), что позволяет 1) дать более точную оценку компонент тензо-

ров напряжений, деформаций и вектора перемещений; 2) расширить область доминирования асимптотического представления М. Уильямса.

1. Проблема определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса

Целью настоящего исследования является численное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m r^{k/2-1} f_{m,ij}^{(k)}(\theta), \quad (1.1)$$

где индекс m принимает значение, равное 1 для нормального отрыва, и равное 2 – для поперечного сдвига; a_k^m – амплитудные, масштабные множители, отражающие влияние геометрии образца и системы приложенных нагрузок; $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ – угловые распределения компонент тензора напряжений [15, 16]. Универсальные угловые распределения $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ хорошо известны из решения краевых задач и приведены в [15, 16].

Как отмечалось в первой части работы, все разнообразие задач о трещинах проявляется в масштабных, амплитудных множителях a_k^m , зависящих от конфигу-

рации образца и комбинации приложенных нагрузок. В настоящее время сложилось четкое представление о необходимости удержания высших приближений в асимптотическом разложении (1.1). В целом ряде работ [17–29] показано, что удержание высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса позволяет расширить область действия асимптотического разложения. Поэтому в последнее время появляются работы, в которых авторы пытаются определить коэффициенты разложения в замкнутой форме, используя известные теоретические решения [15–22]. Так, для бесконечной пластины с центральной трещиной в [15] впервые найдены аналитические выражения для всех коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса:

– для трещины нормального отрыва

$$a_{2n+1}^1 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)! \sigma_{22}^\infty}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1) a^{n-1/2}}, \quad (1.2)$$

$$a_2^1 = -\sigma_{22}^\infty / 4, \quad a_{2k}^1 = 0$$

– поперечного сдвига

$$a_{2n+1}^2 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)! \sigma_{12}^\infty}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1) a^{n-1/2}}, \quad a_{2k}^2 = 0. \quad (1.3)$$

Целью настоящей работы является численное определение амплитудных коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса для прямоугольной пластины с центральной трещиной. Формулы (1.2) будут использованы ниже для верификации результатов извлечения масштабных множителей из конечно-элементного анализа. Соотношения (1.2) будут служить начальным приближением для определения коэффициентов разложения (1.1) для пластины конечных размеров с помощью процедуры минимизации функционала.

2. Извлечение параметров механики разрушения из конечно-элементного эксперимента: восстановление асимптотического разложения М. Уильямса из конечно-элементных вычислений

2.1. Особенности конечно-элементного эксперимента

С целью проверки результатов обработки экспериментальных данных, полученных с помощью метода фотоупругости, была проведена серия конечно-элементных вычислений в программном комплексе Simulia Abaqus. Вычислительный эксперимент был проведен для восстановления коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения поля напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном линейно упругом материале (1.1). Для проведения вычислений была использована пластина высотой 40 см и шириной 20 см с центральной трещиной длиной 1 см в условиях одноосного растяжения. Следует отметить,

что такое соотношение геометрических параметров пластины было выбрано для последующего сравнения коэффициентов многопараметрического разложения М. Уильямса, получаемых из конечно-элементного решения, с коэффициентами разложения М. Уильямса, известными из имеющегося аналитического решения задачи (1.2) и (1.3). Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины в серии вычислений полагались равными 2350 МПа и 0,35 соответственно. В рамках конечно-элементного эксперимента для моделирования окрестности вершины трещины и сингулярности поля напряжений были использованы метод контурного интеграла и сингулярные конечные элементы. В качестве базового конечного элемента использовался восьмиузловой биквадратный конечный элемент CPE8R. Общее количество конечных элементов варьировалось от 12 000 до 44 320 элементов. Для построения детальной сетки выбрано достаточно мелкое разбиение, состоящее из 72 секторов, раствор каждого сектора равен 5 градусам. Внутри круговой области имеются 75 концентрических окружностей. Типичное конечно-элементное разбиение вблизи трещины показано на рис. 1.

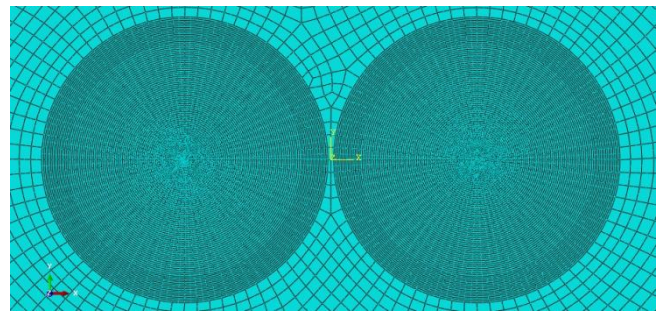


Рис. 1. Типичная конечно-элементная сетка вблизи двух вершин трещин в пластине с центральной трещиной

Fig. 1. Typical mesh containing singular elements near the crack tips

Следует также отметить, что проведение вычислительного эксперимента для данного типа геометрии образца связано также с имеющимися многочисленными оценками коэффициентов интенсивности напряжений [30–33]. Наряду с автоматическим вычислением коэффициентов интенсивности напряжений, многофункциональный комплекс Simulia Abaqus дает возможность вычислить также Т-напряжения в окрестности вершины трещины. Однако многочисленные исследования вклада высших приближений в асимптотическое разложение М. Уильямса [15–29] показали необходимость удержания и следующих регулярных слагаемых в (1.1). Таким образом, основной целью данной части исследования является извлечение коэффициентов асимптотического разложения из конечно-элементных расчетов. Результаты конечно-элементных вычислений приведены на рис. 2–16. На рис. 2, 3 представлены полученные распределения интенсивности напряжений и нормальные компоненты тензора напряжений. На рис. 4–16 показаны сравнения аналитического решения задачи для рас-

тягиваемой бесконечной пластины с центральной трещиной и конечно-элементное решение, а также аналитические решения, построенные с помощью различного количества удерживаемых слагаемых в асимптотическом решении.

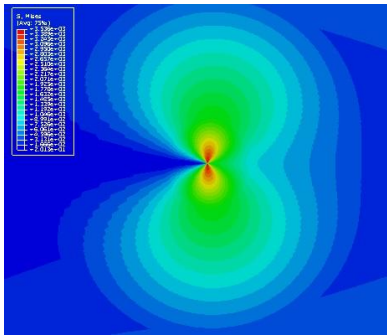


Рис. 2. Распределение интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины малой длины по сравнению с шириной пластины (конечно-элементное решение)

Fig. 2. Distribution of the von Mises equivalent stress in the vicinity of the right crack tip

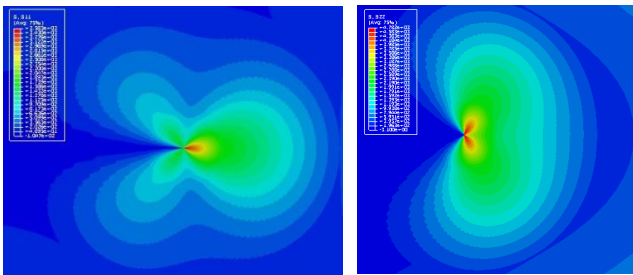
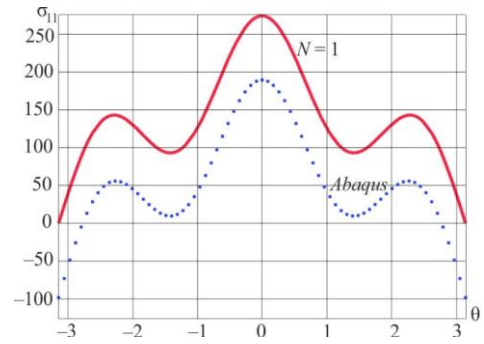


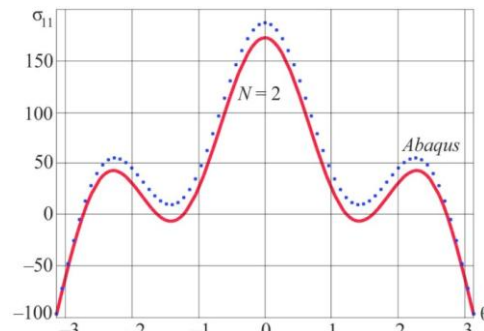
Рис.3. Распределение компонент тензора напряжений σ_{11} и σ_{22} у вершины трещины

Fig. 3. Distribution of the stress components σ_{11} and σ_{22} in the vicinity of the crack tip

На рис. 4, 5 приведены распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} в прямоугольной пластине с центральной трещиной длины, много меньшей по сравнению с шириной пластины, на расстоянии $r = 0,033$ см от вершины трещины, где красным цветом изображено аналитическое решение (1.1) с коэффициентами, вычисленными по формуле (1.2). Синими точками отображено конечно-элементное решение, полученное методом конечных элементов в программном комплексе Simulia Abaqus. На рис. 4, *a* изображено асимптотическое решение, в котором удерживается лишь одно слагаемое с коэффициентом интенсивности напряжений. На рис. 4, *б* красным цветом показано двучленное асимптотическое разложение. Видно, что на указанном расстоянии двучленного асимптотического разложения недостаточно для описания тензора напряжений. На рис. 5 красным цветом показано трехчленное асимптотическое разложение компоненты тензора напряжений σ_{11} . Видно, что на данном расстоянии трех слагаемых достаточно для описания поля напряжений.



a



б

Рис. 4. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} у вершины трещины на расстоянии $r = 0,033$ см: красным цветом показано одночленное асимптотическое разложение М. Уильямса (*a*), двучленное асимптотическое разложение М. Уильямса (*б*), синим цветом показано конечно-элементное решение

Fig. 4. Distribution of the stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,033$ cm: the red curve shows the one-term asymptotic solution (*a*), the two-term asymptotic solution (*b*), the blue points show the FEM solution

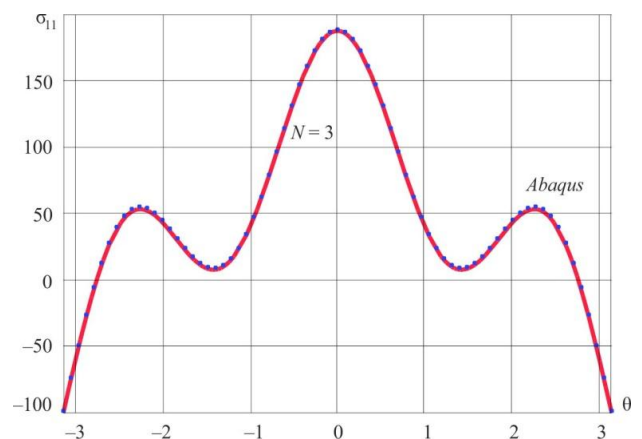


Рис. 5. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} у вершины трещины на расстоянии $r = 0,033$ см: красным цветом показано трехчленное асимптотическое разложение М. Уильямса, синим цветом – конечно-элементное решение

Fig. 5. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,033$ cm: the red curve shows the three-term asymptotic solution, the blue points show the FEM solution

На рис. 6 представлено распределение компоненты σ_{11} на расстоянии $r = 0,059$ см от кончика трещины. На рис. 6, *a* показано двучленное разложение, на рис. 6, *б* – семичленное асимптотическое разложение (1.1). Из рис. 6 ясно, что на расстоянии $r = 0,059$ см от вершины трещины Т-напряжений недостаточно, трех- и пятичленные асимптотические разложения все еще отличаются от конечно-элементного решения и необходимо удерживать семь слагаемых в асимптотическом разложении.

Из рис. 7–9 видно, что на расстоянии $r = 0,199$ см от кончика трещины следует удерживать семь слагаемых в многопараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса. На рис. 9 показано, что семичленное асимптотическое разложение полностью совпадает с конечно-элементным решением. Проведенные сравнения четко показывают, что наряду с коэффициентом интенсивности напряжений и Т-напряжениями в асимптотическом решении М. Уильямса следует удерживать высшие приближения и правильно описать напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины

трещины можно, имея коэффициенты при высших приближениях и удерживая несингулярные слагаемые.

На рис. 10–13 показаны распределения компоненты σ_{11} тензора напряжений на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, полученные в многоцелевом комплексе программ Simulia Abaqus, реализующем метод конечного элемента. Численное решение показано синими точками. На рис. 10–13 также приведено аналитическое асимптотическое решение задачи – многопараметрическое разложение М. Уильямса, в котором удерживается различное количество слагаемых: на рис. 10, *a* красная кривая построена с помощью одночленного асимптотического разложения. Очевидно, что на указанном расстоянии от вершины трещины однопараметрического разложения недостаточно и следует удерживать несингулярные слагаемые. На рис. 10, *б* красным цветом показано двучленное асимптотическое разложение М. Уильямса. Таким образом, в решении учитываются Т-напряжения. На рассматриваемом расстоянии от кончика трещины двухпараметрического разложения, учитывающего Т-напряжения, также недостаточно.

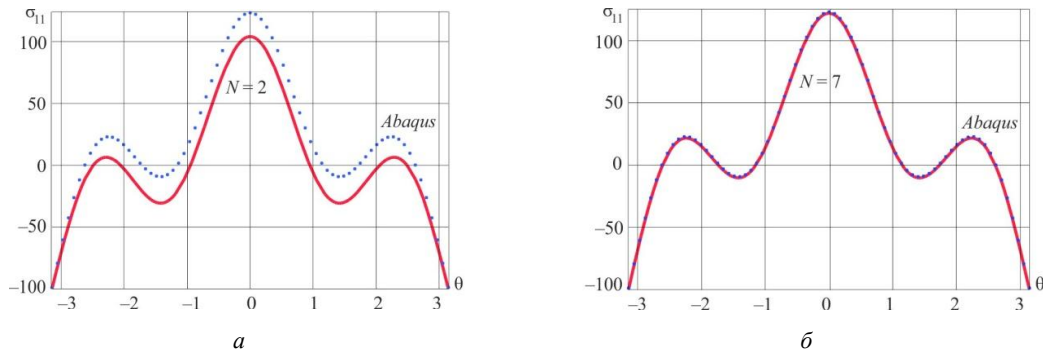


Рис. 6. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,059$ см от вершины трещины, построенное с помощью двучленного асимптотического разложения М. Уильямса (*a*) и семичленного асимптотического разложения (*б*), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 6. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,059$ cm : the red curve shows the two-term asymptotic solution (*a*), the seven-term asymptotic solution (*b*), the blue points show the FEM solution

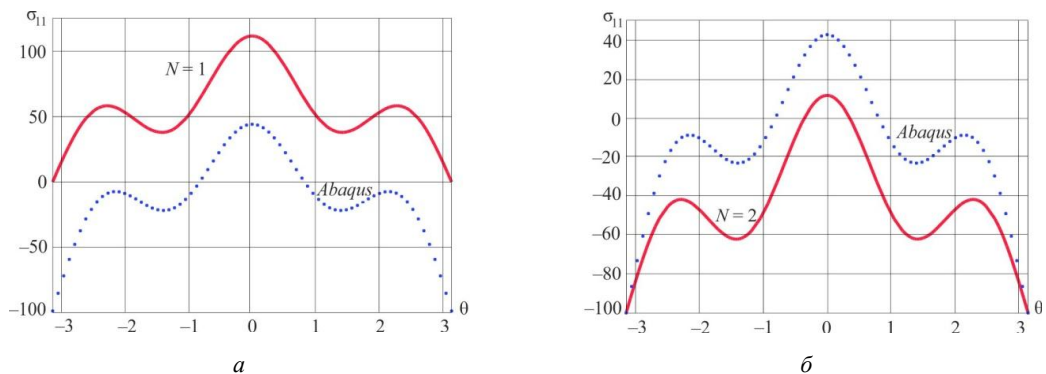


Рис. 7. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,199$ см от вершины трещины, построенное с помощью одночленного асимптотического разложения М. Уильямса (*a*) и двучленного асимптотического разложения (*б*), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 7. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,199$ cm : the red curve shows the one-term asymptotic solution (*a*), the two-term asymptotic solution (*b*); the blue points show the FEM solution

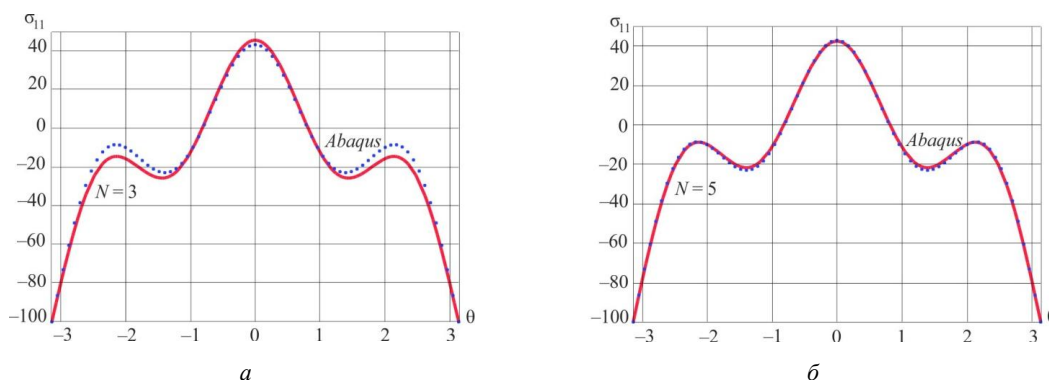


Рис. 8. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,199$ см от вершины трещины, построенное с помощью трехчленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и пятичленного асимптотического разложения (б), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 8. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,199$ cm : the red curve shows the three-term asymptotic solution (a), the five-term asymptotic solution (b); the blue points show the FEM solution

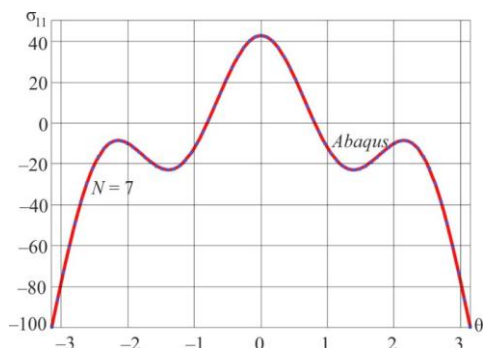


Рис. 9. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,199$ см от вершины трещины, построенное с помощью семичленного асимптотического разложения М. Уильямса, синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 9. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,199$ cm : the red curve shows the seven-term asymptotic solution, the blue points show the FEM solution

На рис. 11 приведены трех- и пятичленные асимптотические разложения поля напряжений. Видно, что кривые приближаются к численному решению, но следует в асимптотическом представлении поля напряжений удерживать следующие слагаемые. Поэтому на рис. 12 построены семи- и девятичленные асимптотические разложения компоненты тензора напряжений σ_{11} у вершины трещины, а на рис. 13 красные кривые иллюстрируют распределения поля напряжений, полученные с помощью одиннадцатичленного и тринадцатичленного асимптотических разложений у вершины трещины. Только для последнего случая конечно-элементное решение и асимптотическое решение, содержащее 13 слагаемых, совпадают. Таким образом, можно заключить, что на указанном расстоянии для асимптотического описания поля напряжений необходимо знать 13 коэффициентов многопараметрического разложения М. Уильямса. Необходимость удержания высших при-

ближений также иллюстрируют рис. 14–16, где приведены распределения касательного напряжения σ_{12} на том же расстоянии от вершины трещины. Можно было бы ожидать, что существенным будет Т-напряжение в окрестности вершины, фигурирующее в нормальном напряжении σ_{11} . Однако распределения касательного напряжения еще раз доказывают необходимость удержания высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса. В силу этой причины, возвращаясь к экспериментальным данным, можно утверждать, что, если точка изохроматической полосы находится на расстояниях порядка полудлины трещины и более, следует удерживать высшие приближения, вплоть до 13–15 коэффициентов. Даже для расстояний, не превышающих 10 % от половины длины трещины, уже недостаточно одночленного и двучленного асимптотического разложений (см. рис. 4, 5). Поэтому при обработке всей совокупности экспериментальной информации нужно иметь в виду, что, ограничиваясь только одночленным или двучленным асимптотическими разложениями, мы не сможем правильно описать поле напряжений в окрестности вершины трещины и следует сразу прибегать к многопараметрическому асимптотическому разложению. Очевидно, что поле изохроматических полос, приведенное на рис. 2–4 первой части статьи, не может быть правильно описано с помощью одночленного или двучленного асимптотического разложения.

С целью извлечения коэффициентов многопараметрического разложения из конечно-элементного эксперимента были собраны экспериментальные точки, принадлежащие концентрическим окружностям с разными радиусами: всего для вычислений параметров механики разрушения были использованы различные множества точек: от 219 до 1314. Для вычислений коэффициентов высших приближений асимптотического разложения М. Уильямса были использованы соотношения (1.1)–(1.3), которые в матричной форме могут быть представлены в виде

$$\sigma_p = CA, \quad (2.1)$$

где σ_p – вектор-строка, состоящий из компонент тензора напряжений; A – вектор-столбец, состоящий из амплитудных множителей – коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений.

Уравнения (2.1) представляют собой систему M линейных алгебраических уравнений относительно K масштабных множителей $A = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1)$, которые подлежат определению (где M – число взятых из вычислительного эксперимента точек).

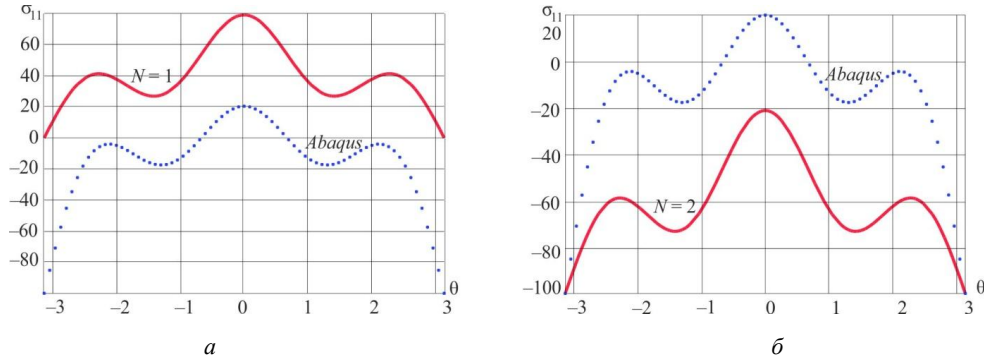


Рис. 10. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, построенное с помощью одночленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и двучленного асимптотического разложения (б), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 10. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,399$ cm : the red curve shows the one-term asymptotic solution (a), the two-term asymptotic solution (b)

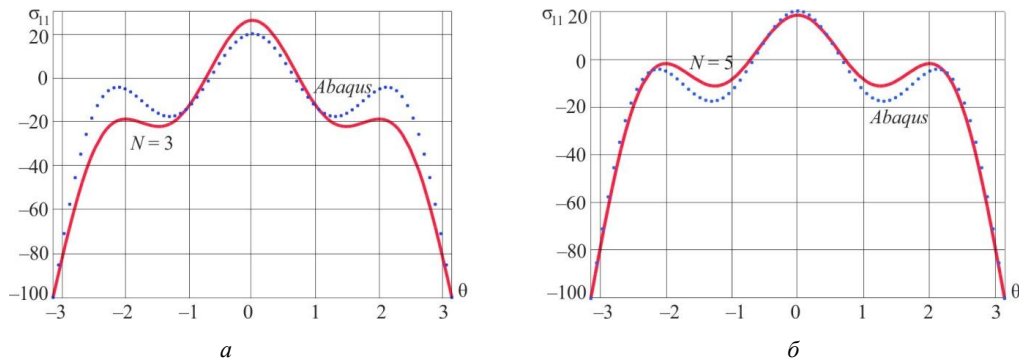


Рис. 11. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, построенное с помощью трехчленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и пятичленного асимптотического разложения (б)

Fig. 11. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,399$ cm : the red curve shows the three-term asymptotic solution (a), the five-term asymptotic solution (b)

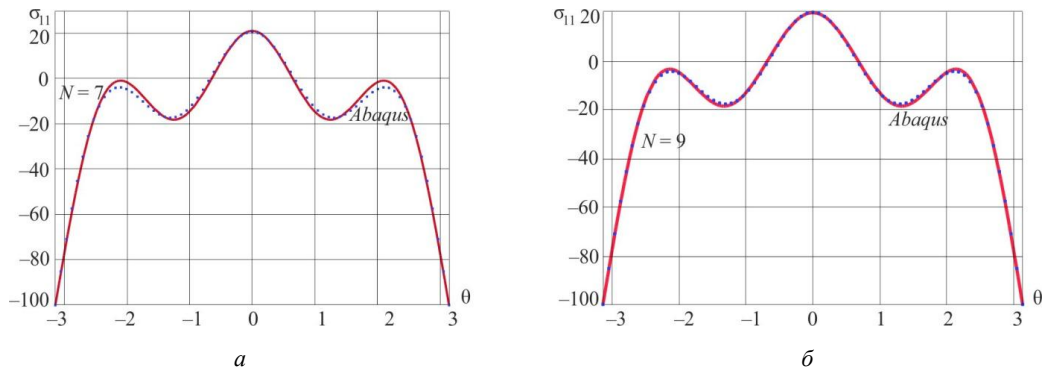


Рис. 12. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, построенное с помощью семичленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и девятичленного асимптотического разложения (б)

Fig. 12. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,399$ cm : the red curve shows the seven-term asymptotic solution (a) and, the nine-term asymptotic solution (b)

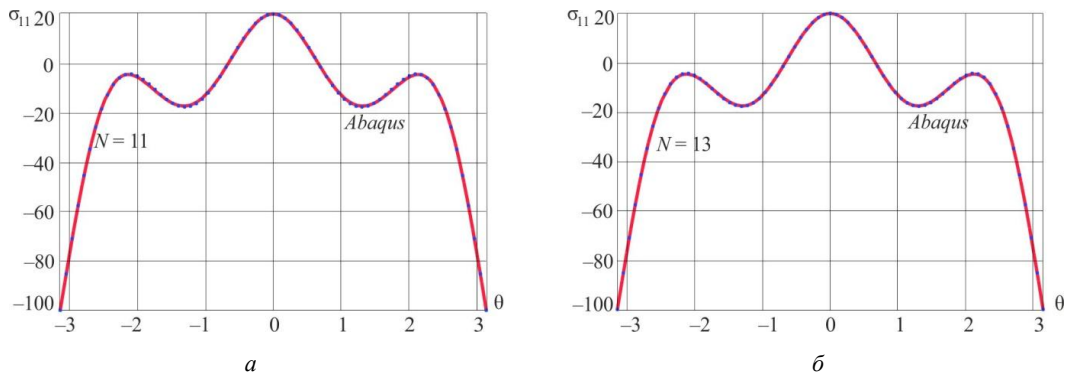


Рис. 13. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{11} на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, построенное с помощью одиннадцатичленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и тринадцатичленного асимптотического разложения (б), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 13. Distribution of stress component σ_{11} at the distance from the crack tip $r = 0,399$ cm : the red curve shows the eleven-term asymptotic solution (a), the thirteen-term asymptotic solution (b); the blue points show the FEM solution

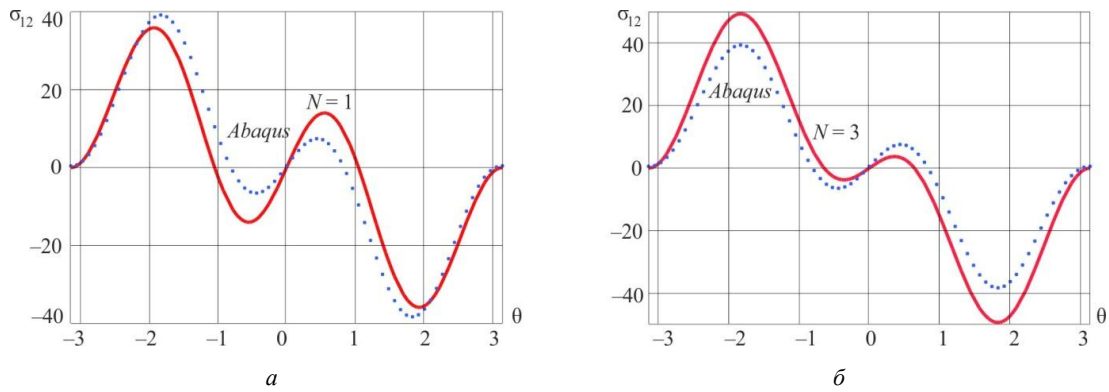


Рис. 14. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{12} на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, построенное с помощью одночленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и трехчленного асимптотического разложения (б), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 14. Distribution of stress component σ_{12} at the distance from the crack tip $r = 0,399$ cm : the red curve shows the one-term asymptotic solution (a) and the three-term asymptotic solution (b)

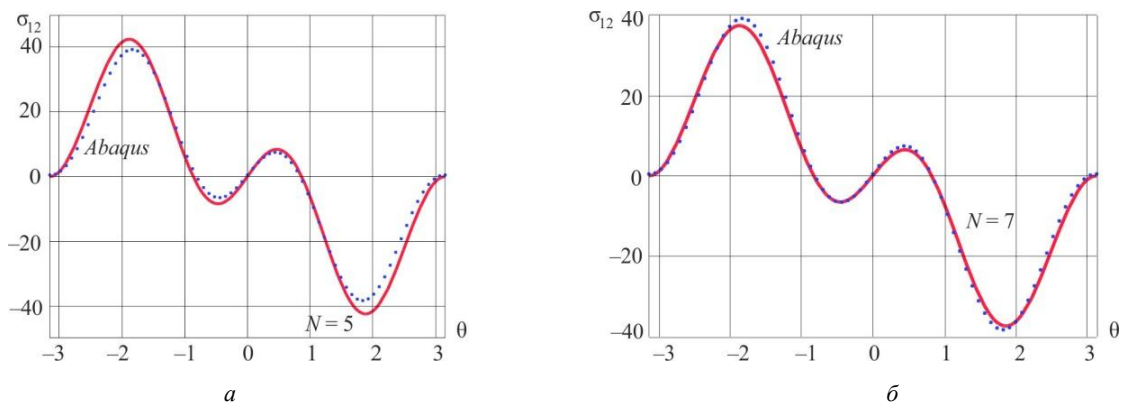


Рис. 15. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{12} на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, построенное с помощью пятичленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и семичленного асимптотического разложения (б), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 15. Distribution of stress component σ_{12} at the distance from the crack tip $r = 0,399$ cm : the red curve shows the five-term asymptotic solution (a), the seven-term asymptotic solution (b); the blue points show the FEM solution

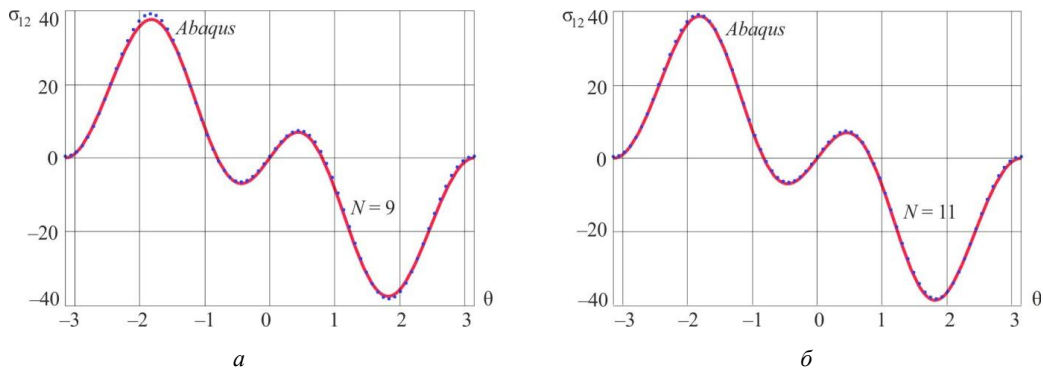


Рис. 16. Распределение компоненты тензора напряжения σ_{12} на расстоянии $r = 0,399$ см от вершины трещины, построенное с помощью девятичленного асимптотического разложения М. Уильямса (а) и одиннадцатичленного асимптотического разложения (б), синим цветом изображено конечно-элементное решение

Fig. 16. Distribution of the stress component σ_{12} at the distance from the crack tip $r = 0,399$ cm : the red curve shows the nine-term asymptotic solution (a), the eleven-term asymptotic solution (b)

В общем случае число M известных из натурального или вычислительного эксперимента значений компонент тензора напряжений может быть больше числа неизвестных масштабных множителей K . Очевидно, что, выбрав какое-то число экспериментальных точек, мы всегда можем выбрать следующее дополнительное множество точек, лежащих на следующей изохроматической полосе, или узлов из конечно-элементного анализа, в которых известны все компоненты тензора напряжений. Следовательно, при обработке всей совокупности экспериментальной информации или анализе конечно-элементного расчета возникает задача решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (3.1).

Следует отметить, что система линейных алгебраических уравнений (2.1) имеет замкнутое решение:

$$A = (C^T C)^{-1} C^T \sigma_p. \quad (2.2)$$

Задачу отыскания амплитудных множителей можно свести к задаче минимизации функционала – целевой функции

$$J(A) = \frac{1}{2} (\sigma_p - CA)^T (\sigma_p - CA). \quad (2.3)$$

В ходе вычислительного эксперимента целевая функция (2.3) была использована для нахождения значений амплитудных масштабных множителей $A = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_k^1)$. В качестве вектора $\sigma_p = (\sigma_{ij})$ были использованы значения, вычисленные для пластины с центральной трещиной. Как было указано выше, число компонент вектора $\sigma_p = (\sigma_{ij})$ менялось от 219 до 1314, что отвечает разному количеству исследованных круговых контуров, охватывающих вершину трещины. Всего были проанализированы 60 концентрических окружностей с 73 точками на каждой. Результаты вычислений сведены в табл. 1, 2. В табл. 1 приведены данные обработки результатов конечно-элементного расчета для

пластины с размерами, совпадающими с размерами пластины в натурном эксперименте (в эксперименте на фотоупругость, обсуждаемом в первой части статьи).

Таблица 1

Коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса для пластины, идентичной натурному эксперименту с помощью метода фотоупругости [34–45], определенные с помощью метода конечных элементов

Table 1

Coefficients of William’s expansion obtained by the FEM analysis

$a_1^1 = 72,527 \text{ кГ/см}^{3/2}$
$a_2^1 = -27,516 \text{ кГ/см}^2$
$a_3^1 = 20,163 \text{ кГ/см}^{5/2}$
$a_4^1 = -0,302 \text{ кГ/см}^3$
$a_5^1 = -2,757 \text{ кГ/см}^{7/2}$
$a_6^1 = -0,985 \text{ кГ/см}^{7/2}$
$a_7^1 = 0,712 \text{ кГ/см}^{9/2}$
$a_8^1 = 0,019 \text{ кГ/см}^5$
$a_9^1 = -0,315 \text{ кГ/см}^{11/2}$
$a_{10}^1 = -0,016 \text{ кГ/см}^6$
$a_{11}^1 = 0,077 \text{ кГ/см}^{13/2}$
$a_{12}^1 = 0,012 \text{ кГ/см}^7$
$a_{13}^1 = 0,050 \text{ кГ/см}^{15/2}$
$a_{14}^1 = 0,0007 \text{ кГ/см}^8$
$a_{15}^1 = 0,014 \text{ кГ/см}^{17/2}$

В табл. 2 приведены данные расчета для пластины с малой по сравнению с шириной пластины трещиной. Для этой пластины значения масштабных множителей сравнивались с имеющимся точным аналитическим решением для бесконечной пластины. Вычисленные с помощью процедуры минимизации функционала значения коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса

представлены в табл. 3. Во втором столбце табл. 2 приведена погрешность, с которой вычислены определенные значения (отличие от значений аналитического решения для бесконечной пластины).

Таблица 2

Значения масштабных множителей – коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса для пластины с трещиной малой длины

Table 2

Coefficients of multi-parameter William’s series expansion for a plate with a central crack of a small length

Амплитудный коэффициент, размерность коэффициентов	Погрешность, %
$a_1^1 = 50,059 \text{ кГ/см}^{3/2}$	0,01
$a_2^1 = -24,972 \text{ кГ/см}^2$	0,09
$a_3^1 = 24,943 \text{ кГ/см}^{5/2}$	0,13
$a_5^1 = -6,236 \text{ кГ/см}^{7/2}$	0,22
$a_7^1 = 3,112 \text{ кГ/см}^{9/2}$	0,31
$a_9^1 = -1,951 \text{ кГ/см}^{11/2}$	0,35
$a_{11}^1 = 1,361 \text{ кГ/см}^{13/2}$	0,44
$a_{13}^1 = -1,056 \text{ кГ/см}^{15/2}$	0,54
$a_{15}^1 = 0,786 \text{ кГ/см}^{17/2}$	0,68

Таблица 3

Коэффициенты асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в полудиске с вертикальным надрезом для испытаний на трехточечный изгиб

Table 3

Coefficients of the William’s series expansion in SCB specimen

Конечно-элементный анализ
$a_1^1 = 111,59587 \text{ кГ/см}^{3/2}$
$a_2^1 = -0,878439 \text{ кГ/см}^2$
$a_3^1 = -1,99458 \text{ кГ/см}^{5/2}$
$a_4^1 = 0,021217 \text{ кГ/см}^3$
$a_5^1 = -0,00880 \text{ кГ/см}^{7/2}$
$a_6^1 = -0,003137 \text{ кГ/см}^4$
$a_7^1 = 0,017415 \text{ кГ/см}^{9/2}$
$a_8^1 = 0,02738 \text{ кГ/см}^5$
$a_9^1 = -0,010154 \text{ кГ/см}^{11/2}$
$a_{10}^1 = -0,009851 \text{ кГ/мм}^6$
$a_{11}^1 = -0,008144 \text{ кГ/см}^{13/2}$
$a_{12}^1 = 0,005142 \text{ кГ/см}^7$
$a_{13}^1 = 0,002779 \text{ кГ/см}^{15/2}$
$a_{14}^1 = -0,001581 \text{ кГ/см}^8$
$a_{15}^1 = 0,000756 \text{ кГ/см}^{17/2}$

Коэффициенты с четными номерами, как показал вычислительный эксперимент, обращаются в нуль. Таким образом, можно заключить, что подход, основанный на минимизации функционала (2.3), предоставляет удобное средство для вычисления всех коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины. Как показывает табл. 2, данный подход позволяет построить пятнадцатичленное асимптотическое разложение, коэффициенты в котором определяются с погрешностью, не превышающей 0,68 %, для пятнадцатичленного асимптотического разложения, и с точностью, не превышающей 0,54 %, для тринадцатичленного асимптотического разложения. Поэтому подход для вычисления коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, основанный на минимизации функционала (2.3), следует считать эффективным. Проведя данные вычисления на примере пластины с малой центральной трещиной, можно обратиться к компьютерному моделированию пластины с разрезом, изображенной на рис. 2–4 первой части статьи. Результаты вычислений показаны в табл. 1.

2.2 Вычисление Т-напряжений

Многофункциональный комплекс Simulia Abaqus позволяет провести вычисления Т-напряжений для образцов с различным отношением полудлины трещины a к ширине пластины L и дать аппроксимационную оценку Т-напряжений в пластине с центральной трещиной. Для получения оценки Т-напряжений была выполнена большая серия расчетов для прямоугольных пластин с одинаковыми размерами сторон, но с различным отношением полудлины трещины к ширине пластины. Отношение полудлины трещины к половине ширины пластины менялось от 0,01 до 0,9. Для каждого значения отношения вычислялось Т-напряжение. Результаты вычислений и приближенная кривая показаны на рис. 17. Синим цветом показаны точки, полученные методом конечно-элемента в пакете Simulia Abaqus. Красным цветом показана аппроксимирующая кривая.

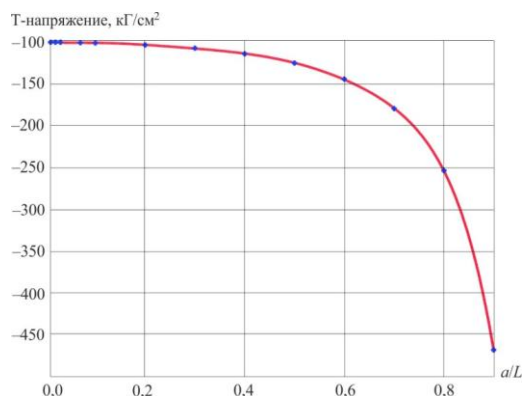


Рис. 17. Зависимость Т-напряжений от отношения длины трещины к ширине образца a / L

Fig. 17. Variation of T-stress as function of ratio a / L

Для вычисления T -напряжений использовалось представление

$$T = \sigma_{22}^{\infty} Y(a/L), \quad (2.4)$$

где $Y(a/L)$ – тарировочная функция, которая в случае пластины с центральной трещиной зависит только от отношения полудлины трещины a к половине ширины пластины L ,

$$Y(a/L) = -0,99861 - 0,60405v + 10,88927v^2 - 91,33252v^3 + 349,90393v^4 - 695,48121v^5 + 685,00314v^6 - 286,27244v^7, \quad v = a/L. \quad (2.5)$$

С помощью выражений (2.4) и (2.5) можно найти T -напряжение в пластине шириной $2L$ с центральной трещиной длины $2a$, не прибегая к конечно-элементному анализу.

3. Численное определение коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса для полудиска с надрезом из фотоупругого эксперимента и конечно-элементного анализа

Наряду с пластиной с центральной трещиной в настоящей работе рассмотренная методика была применена к сравнительно новому образцу с надрезом – полудиску с вертикальным надрезом, который используется для испытаний на трехточечный изгиб. Целью настоящего экспериментально-численного подхода является определение коэффициентов высших приближений многопараметрического разложения М. Уильямса для данной геометрии. Размеры образца следующие: радиус полудиска 5 см, длина надреза 1,92 см, толщина образца 4,9 мм.

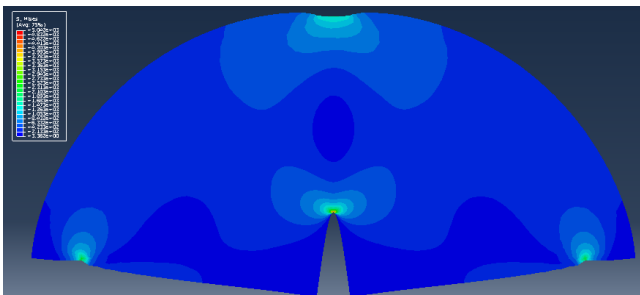


Рис. 18. Распределение интенсивности касательных напряжений в полудиске с вертикальным надрезом

Fig. 18. Distribution of the von Mises equivalent stress

Для проверки полученных экспериментальных результатов был выполнен расчет напряженно-деформированного состояния в полудиске с надрезом с теми же геометрическими размерами в конечно-элементном пакете Simulia Abaqus. Конечно-элементный пакет позволяет непосредственно (сразу после расчетов, не прибегая к написанию дополнительных процедур) получить значения коэффициента интенсивности напряжений и

T -напряжения. Полученные в Simulia Abaqus значения коэффициента интенсивности напряжений и T -напряжения были сравнены с экспериментальными значениями. Различия не превышают 0,01 %. Коэффициенты высших приближений были вычислены с помощью соотношений (2.2) и с помощью минимизации функционала (2.3). Результаты вычислений сведены в табл. 3. Результаты минимизации функционала (2.3) и значения коэффициента интенсивности напряжений и T -напряжения полностью совпадают, что свидетельствует о достоверности расчетов для коэффициентов высших приближений.

Сравнение результатов, полученных с помощью методов цифровой упругости и конечных элементов, показывает их хорошее соответствие.

Выводы

В работе с помощью конечно-элементного анализа, проведенного в многофункциональном комплексе Simulia Abaqus, вычислены коэффициенты многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины для двух различных конфигураций: для пластины с центральной трещиной в поле одноосного растяжения и полудиска с надрезом в условиях трехточечного изгиба. Из конечно-элементного расчета с помощью описанного алгоритма извлечены коэффициенты высших приближений многопараметрического разложения М. Уильямса. Алгоритм основан на рассмотрении точек, лежащих на концентрических окружностях с центром в вершине трещины. Методика позволяет в целом рассматривать любое количество концентрических окружностей и получать переопределенную систему линейных уравнений. Показано, что для определения коэффициентов разложения может быть введена целевая функция – квадратичная относительно определяемых коэффициентов, процедура ее минимизации также приводит к коэффициентам высших приближений разложения М. Уильямса. Вычислены первые пятнадцать коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений у вершины трещины как для пластины с центральной трещиной, так и для полукругового диска с надрезом. Дано сравнение вычисленных коэффициентов разложения М. Уильямса с теоретическим решением, имеющимся для бесконечной пластины с центральной трещиной. Извлеченные из конечно-элементного решения коэффициенты совпадают с точным решением, что свидетельствует о достоверности алгоритма расчета.

Получена аппроксимационная формула для T -напряжений в пластине с трещиной, позволяющая вычислить T -напряжений, не прибегая к экспериментальному или конечно-элементному анализу.

Проведенный анализ полей напряжений у вершины трещины и острого надреза показал эффективность экспериментального метода цифровой фотоупругости, подкрепленного конечно-элементным моделированием.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00631).

Библиографический список

1. Evaluation of the SIF and T-stress values of the Brazilian disc with a central notch by hybrid method / P. Miarka, A.S. Cruces, S. Seidl, L. Malikova, P. Lopez-Crespo // *International Journal of Fatigue*. – 2020. – Vol. 135. – P. 105562.
2. Li H., Guo R., Cheng H. Calculation of stress intensity factors of matrix crack tip in particle reinforced composites using the singular Voronoi cell finite element method // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 101. – P. 269–278.
3. Evaluation of notch stress intensity factors by the asymptotic expansion technique coupled with the finite element method / S. Yao, C. Chen, Z. Niu, Z. Hu // *Applied Mathematical Modelling*. – 2018. – Vol. 61. – P. 682–692.
4. DIC identification and X-FEM simulation of fatigue crack growth based on the Williams' series / C. Roux – Langlois, A. Gravouil, M.-C. Baietto, J. Rethore, F. Mathieu, F. Hild, S. Roux // *International Journal of Solids and Structures*. – 2015. – Vol. 53. – P. 38–47.
5. Akhondzadeh Sh., Khoei A.R., Broumand P. An efficient strategy for modelling stress singularities in isotropic composite materials with X-FEM technique // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2017. – Vol. 169. – P. 201–225.
6. Evaluation of the T-stress for cracks in functionally graded materials by the FEM / J. Sladek, V. Sladek, M. Repka, C.L. Tan // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2016. – Vol. 86, part I. – P. 332–341.
7. Patil P., Vysasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2017. – Vol. 93. – P. 182–194.
8. Dolgikh V.S., Stepanova L.V. A photoelastic and numeric study of the stress field in the vicinity of two interacting cracks: Stress intensity factors, T-stresses and higher order terms // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2216. – P. 020014.
9. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2020. – Vol. 126. – P. 105855.
10. Yuan Y., Sheng C., Zhang Z. Unified Theoretical Model of Caustic Method for the Interfacial Cracks // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 233. – P. 107006.
11. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 99. – P. 104–117.
12. Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidisks using the photoelasticity method and finite element method // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2216. – P. 020013.
13. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments // *AIP Conference*. – 2016. – Vol. 1785. – P. 030029.
14. Liao M., Zhang P. An improved approach for computation of stress intensity factors using the finite element method //

Acknowledgement

The reported study was funded by RFBR, project number 19-01-00631".

Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 101. – P. 185–190.

15. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. – 2012. – Vol. 49. – P. 556–566.

16. Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 144–145. – P. 265–275.

17. Косыгина Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент // *Вестник Самарского университета. Естественнаучная серия*. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 55–66.

18. Stepanova L.V., Roslyakov P., Lomakov P. A photoelastic study for multiparametric analysis of the near crack tip stress field under mixed mode loading // *Procedia Structural Integrity*. – 2016. – Vol. 2. – P. 1797–1804.

19. Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Interference-optical methods in mechanics for the multi-parameter description of the stress fields in the vicinity of the crack tip // *Journal of Physics: Conference series*. – 2018. – Vol. 1096(1). – P. 012117.

20. Stepanova L., Bronnikov S. A computational study of the mixed-mode crack behavior by molecular dynamics method and the multi-Parameter crack field description of classical fracture mechanics // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 109. – P. 102691.

21. Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2019. – Т. 22, № 3. – С. 345–361.

22. Stepanova L.V., Dolgikh V.S., Turkova V.A. Digital photoelasticity for calculating coefficients of the Williams series expansion in plate with two collinear cracks under mixed mode loading // *Ceur Workshop Proceedings*. – 2017. – Vol. 1904. – P. 200–208.

23. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B. Asymptotic stress field and the coefficients of singular and higher order terms for V-notches with end holes under mixed – mode loading // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. – Vol. 172–173. – P. 51–69.

24. Stepanova L., Bronnikov S. Mathematical modeling of the crack growth in linear isotropic materials by conventional fracture mechanics approaches and by molecular dynamics method: Crack propagation direction angle under mixed mode loading // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – Vol. 973. – P. 012046.

25. Elastic stress analysis of blunt V-notches under mixed mode loading by considering higher order terms / A.M. Mirzaei, M.R. Ayatollahi, B. Bahrami, F. Berto // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 78. – P. 665–684.

26. Malikova L., Miarka P., Simonova H. Utilization of Williams power series for estimation of crack behavior under mixed-mode loading // *Key Engineering Materials*. – 2020. – Vol. 827. – P. 203–208.

27. Multi-parameter fracture mechanics: crack path in a mixed-mode specimen / L. Malikova, H. Simonova, B. Kucharczykova, P. Miarka // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2019. – Vol. 13. – P. 65–73.
28. Ruzicka V., Malikova L., Seitl S. Over-deterministic method: The influence of rounding numbers on accuracy of the values of Williams' expansion terms // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2017. – Vol. 11, no. 42. – P. 128–135.
29. Stepanova L. Influence of higher-order terms of the Williams expansion on the crack-tip stress field for mixed-mode loadings: Asymptotic solutions and interference-optical methods of solid mechanics // *ICF 2017 – 14th International Conference on Fracture*. – 2017. – Vol. 2. – P. 110–111.
30. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. The stress analysis of cracks handbook. – New York: ASME, 2000. – 696 p.
31. Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I. Handbook of Elasticity Solutions. – Netherlands: Springer, 2003. – 329 p.
32. Savruk M.P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Switzerland, Springer, 2017. – 510 p.
33. Murakami Y. Theory of elasticity and stress concentration. – John Wiley & Sons, 2017. – 446 p.
34. Ren Z., Xie H., Ju Y. Quantification of photoelastic fringe orders using polarized light camera and continuous loading // *Optic and Lasers in Engineering*. – 2020. – Vol. 134. – P. 106263.
35. Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2020. – P. 106186.
36. Liu P., Fu G., Ren Z. Visualization of full-field stress evolution during 3D penetrated crack propagation through 3D printing and frozen stress techniques // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 236. – P. 107222.
37. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of crack interaction effects under thermal loading by digital photoelasticity and finite elements // *Experimental Mechanics*. – 2020. – Vol. 60(3). – P. 295–316.
38. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 99. – P. 104–117.
39. Solaguren-Beascoa Fernández M. Evaluation of uncertainty in the measurement of the crack-tip stress field using photoelasticity // *J Strain Anal Eng Des*. – 2019. – Vol. 54. – P. 24–35.
40. Leśniewska D., Radosz I., Pietrzak M. Photo-Elastic Observation of Loading and Crushing of a Single Grain // In: Giovine P, editor. *Micro to Macro Math. Model. Soil Mech. Trends Math*. – Switzerland: Springer Nature, 2019. – P. 213–223
41. Fernández M.S.B. Metrological considerations in the measurement of contact stress parameters using photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2019. – Vol. 117. – P. 29–39.
42. Zerkal S.M., Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of stress concentration near the vertices of the crack-cuts // *Innovation in life*. – 2019. – № 2(29). – P. 126–133.
43. Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts) // *Key Engineering Materials*. – 2020. – Vol. 827. – P. 330–335.
44. Thomre M., Ramesh K. Evaluation of Fracture Parameters of Cracks in Compressor Blade Root Using Digital Photoelasticity // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. – 2020. – P. 557–566.
45. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the rigid line inclusion tip embedded in an epoxy matrix using digital image correlation // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 106. – P. 102425.

References

1. Miarka P., Cruces A.S., Seitl S., Malikova L., Lopez-Crespo P. Evaluation of the SIF and T-stress values of the Brazilian disc with a central notch by hybrid method. *International Journal of Fatigue*, 2020, vol. 135, 105562. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105562
2. Li H., Guo R., Cheng H. Calculation of stress intensity factors of matrix crack tip in particle reinforced composites using the singular Voronoi cell finite element method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, vol. 101, pp. 269-278. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.03.008
3. Yao S, Chen C., Niu Z., Hu Z. Evaluation of notch stress intensity factors by the asymptotic expansion technique coupled with the finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 61, pp. 682-692. DOI: 10.1016/j.apm.2018.05.011
4. Roux – Langlois C., Gravouil A., Baietto M.-C., Rethore J., Mathieu F., Hild F., Roux S. DIC identification and X-FEM simulation of fatigue crack growth based on the Williams' series. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 53, pp. 38-47. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.10.026
5. Akhondzadeh Sh., Khoei A.R., Broumand P. An efficient strategy for modelling stress singularities in isotropic composite materials with X-FEM technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 169, pp. 201-225. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.11.019
6. Sladek J., Sladek V., Repka M., Tan C.L. Evaluation of the T-stress for cracks in functionally graded materials by the FEM. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2016, vol. 86, Part I, pp. 332-341. DOI: 10.1016/j.tafmec.2016.09.004
7. Patil P., Vysasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017 vol. 93, pp. 182-194. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2017.02.003
8. Dolgikh V.S., Stepanova L.V. A photoelastic and numeric study of the stress field in the vicinity of two interacting cracks: Stress intensity factors, T-stresses and higher order terms. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2216, 020014. DOI: 10.1063/5.0003507
9. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 126, 105855. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2019.105855
10. Yuan Y., Sheng C., Zhang Z. Unified Theoretical Model of Caustic Method for the Interfacial Cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 233, 107006.
11. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, vol. 99, pp. 104-117. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.011
12. Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidisks using the photoelasticity method and finite element method. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2216, 020013. DOI: 10.1063/5.0003506
13. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments. *AIP Conference*, 2016, vol. 1785, 030029. DOI: 10.1063/1.4967050

14. Liao M., Zhang P. An improved approach for computation of stress intensity factors using the finite element method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, vol. 101, pp. 185-190. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.02.019
15. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, pp. 556-566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032
16. Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 144-145, pp. 265-275. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012
17. Kosygina L.N. Asymptotic presentation of the stress field near the crack tip of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches: theoretical study and computational experiment. *Vestnik of Samara University*, 2018, vol. 24(2), pp. 55-66. DOI: 10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66
18. Stepanova Larisa V., Roslyakov Pavel, Lomakov Pavel A photoelastic study for multiparametric analysis of the near crack tip stress field under mixed mode loading. *Procedia Structural Integrity*, 2016, vol. 2, pp. 1797-1804. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.226
19. Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Interference-optical methods in mechanics for the multi-parameter description of the stress fields in the vicinity of the crack tip. *Journal of Physics: Conference series*, 2018, vol. 1096(1), 012117. DOI: 10.1088/1742-6596/1096/1/012117
20. Stepanova L., Bronnikov S. A computational study of the mixed-mode crack behavior by molecular dynamics method and the multi-Parameter crack field description of classical fracture mechanics. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 109, 102691. DOI: 10.1016/j.tafmec.2020.102691
21. Stepanova L.V. Asymptotic analysis of the crack tip stress field (Consideration of higher order terms). *Numerical Analysis and Applications*, 2019, vol. 12(3), pp. 284-296. DOI: 10.1134/S1995423919030078
22. Stepanova L.V., Dolgikh V.S., Turkova V.A. Digital photoelasticity for calculating coefficients of the Williams series expansion in plate with two collinear cracks under mixed mode loading. *Ceur Workshop Proceedings*, 2017, vol. 1904, pp. 200-208. DOI: 10.18287/1613-0073-2017-1904-200-208
23. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B. Asymptotic stress field and the coefficients of singular and higher order terms for V-notches with end holes under mixed – mode loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 172-173, pp. 51-69. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.05.011
24. Stepanova L., Bronnikov S. Mathematical modeling of the crack growth in linear isotropic materials by conventional fracture mechanics approaches and by molecular dynamics method: Crack propagation direction angle under mixed mode loading. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 973, 012046. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012046
25. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B., Berto F. Elastic stress analysis of blunt V-notches under mixed mode loading by considering higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, vol. 78, pp. 665-684. DOI: 10.1016/j.apm.2019.09.049
26. Malikova L., Miarka P., Simonova H., Utilization of Williams power series for estimation of crack behavior under mixed-mode loading. *Key Engineering Materials*, 2020, vol. 827, pp. 203-208. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.827.203
27. Malikova L., Simonova H., Kucharczykova B., Miarka P. Multi-parameter fracture mechanics: crack path in a mixed-mode specimen. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2019, vol. 13, pp. 65-73. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.07
28. Ruzicka V., Malikova L., Seitl S. Over-deterministic method: The influence of rounding numbers on accuracy of the values of Williams' expansion terms. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 2017, vol. 11, no. 42, pp. 128-135. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.42.14
29. Stepanova L. Influence of higher-order terms of the Williams expansion on the crack-tip stress field for mixed-mode loadings: Asymptotic solutions and interference-optical methods of solid mechanics. *ICF 2017 -14th International Conference on Fracture*, 2017, vol. 2, pp. 110-111.
30. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. The stress analysis of cracks handbook. *ASME. New York*, 2000, 696 p.
31. Kachanov M., Shafiro B., Tsurkov I. Handbook of Elasticity Solutions. *Netherlands: Springer*, 2003, 329 p.
32. Savruk M.P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. *Switzerland, Springer*, 2017, 510 p.
33. Murakami Y. Theory of elasticity and stress concentration. *John Wiley & Sons*, 2017, 446 p.
34. Ren Z., Xie H., Ju Y. Quantification of photoelastic fringe orders using polarized light camera and continuous loading. *Optic and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 134, 106263. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2020.106263
35. Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, 106186. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2020.106186
36. Liu P., Fu G., Ren Z. Visualization of full-field stress evolution during 3D penetrated crack propagation through 3D printing and frozen stress techniques// *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 236, 107222. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107222
37. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of crack interaction effects under thermal loading by digital photoelasticity and finite elements. *Experimental Mechanics*, 2020, vol. 60(3), pp. 295-316. DOI: 10.1007/s11340-019-00561-9
38. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, vol. 99, pp. 104-117. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.11.011
39. Solaguren-Beascoa Fernández M. Evaluation of uncertainty in the measurement of the crack-tip stress field using photoelasticity. *Journal of Strain Analysis Eng Des*, 2019, vol. 54, pp. 24–35. DOI: 10.1177/0309324718807828.
40. Leśniewska D, Radosz I, Pietrzak M. Photo-Elastic Observation of Loading and Crushing of a Single Grain. In: Giovine P, editor. *Micro to Macro Math. Model. Soil Mech. Trends Math., Switzerland: Springer Nature*, 2019, p. 213–23. DOI: 10.1007/978-3-319-99474-1_22.
41. Fernández MSB. Metrological considerations in the measurement of contact stress parameters using photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2019, vol. 117, pp. 29–39. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2019.01.009 .
42. Zerkal S.M., Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of stress concentration near the vertices of the crack-cuts. *Innovation in life*, 2019, no. 2(29), 126-133.
43. Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts). *Key Engineering Materials*, 2020, vol. 827, pp. 330-335. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330.
44. Thomre M., Ramesh K. Evaluation of Fracture Parameters of Cracks in Compressor Blade Root Using Digital Photoelasticity. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2020, pp. 557-566.
45. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the rigid line inclusion tip embedded in an epoxy matrix using digital image correlation. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 106, 102425. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.102425