

Потрахов Н.Н., Аношкин А.Н., Зуйко В.Ю., Осокин В.М., Писарев П.В., Пеленев К.А. Расчетно-экспериментальная оценка прочности сегмента композитного шпангоута с применением метода in-situ рентгеновского контроля // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 118–133. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.08

Potrakhov N.N., Anoshkin A.N., Zuiko V.Yu., Osokin V.M., Pisarev P.V., Pelenev K.A. Numerical and experimental study of composite bulkhead partition strength with in-situ x-ray monitoring. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017. No. 1. Pp. 118-133. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.08



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.1.08

УДК 629.7.036.34

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ СЕГМЕНТА КОМПОЗИТНОГО ШПАНГОУТА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА IN-SITU РЕНТГЕНОВСКОГО КОНТРОЛЯ

Н.Н. Потрахов¹, А.Н. Аношкин², В.Ю. Зуйко², В.М. Осокин²,
П.В. Писарев², К.А. Пеленев²

¹Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

²Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 10 ноября 2016 г.
Принята: 15 февраля 2017 г.
Опубликована: 30 марта 2017 г.

Ключевые слова:

рентгеновский контроль, полимерные композиционные материалы, углепластик, эксперимент, механика композиционных материалов, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов (МКЭ), жесткость, прочность, расслоение, шпангоут.

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе на примере конструктивно-подобного элемента типа «сегмент шпангоута», имеющего П-образное сечение и выполненного из углепластика по технологии пропитки под давлением (RTM), с использованием метода микрофокусной рентгенографии проведена качественная и количественная оценка микроповреждений, возникающих в конструкции при проведении механических испытаний.

В ходе эксперимента были получены рентгенографические изображения образца при фиксированных уровнях растягивающего усилия. Полученные снимки анализировались на предмет появления расслоений как основного вида повреждений, возникающих в микроструктуре испытываемой детали. Были определены места локализации и ориентировочные значения размеров межслоевых трещин при различных уровнях нагрузки. Отмечено, что после снятия нагрузки межслоевые трещины «смыкаются» и с трудом идентифицируются средствами неразрушающего контроля.

Для численного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемой конструкции была разработана трехмерная компьютерная модель с явным описанием её слоистой структуры. Такой подход позволил провести

© Потрахов Николай Николаевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: nn@eltech-med.com

Аношкин Александр Николаевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: anoshkin@pstu.ru

Зуйко Валерий Юрьевич – кандидат технических наук, заведующий испытательной лабораторией, e-mail: zuiko-kt@pstu.ru

Осокин Владимир Михайлович – младший научный сотрудник, e-mail: osokin-kt@pstu.ru

Писарев Павел Викторович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: pisarev@pstu.ru

Пеленев Константин Александрович – младший научный сотрудник, e-mail: kpelenev@yandex.ru

Nikolay N. Potrakhov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: kzhomova@gmail.com

Aleksandr N. Anoshkin – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: anoshkin@pstu.ru

Valerii Yu. Zuiko – CSc in Technical Sciences, Head of Laboratory, e-mail: zuiko-kt@pstu.ru

Vladimir M. Osokin – Junior Researcher, e-mail: osokin-kt@pstu.ru

Pavel V. Pisarev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: pisarev@pstu.ru

Konstantin A. Pelenev – Junior Researcher, e-mail: kpelenev@yandex.ru

оценку межслоевых отрывных и сдвиговых напряжений, которые определяют разрушение конструкции, зафиксированное в эксперименте. Решение данной задачи осуществлялось методом конечных элементов (МКЭ) в пакете ANSYS Workbench с использованием высокопроизводительного вычислительного комплекса.

Сравнение результатов численного моделирования механических испытаний и данных рентгенографического контроля показало хорошее качественное совпадение – области локализации максимальных межслоевых напряжений, определяющих характер разрушения детали, возникают в зонах скругления профиля. Отличие оценок несущей способности, полученных экспериментальными и численными методами, составило порядка 23 %, что может быть скорректировано после проведения натурных испытаний серии подобных образцов и уточнения прочности материала на межслойный отрыв.

© ПНИПУ

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF COMPOSITE BULKHEAD PARTITION STRENGTH WITH IN-SITU X-RAY MONITORING

N.N. Potrahov¹, A.N. Anoshkin², V.Yu. Zuiko², V.M. Osokin²,
P.V. Pisarev², K.A. Pelenev²

¹Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", St. Petersburg, Russian Federation

²Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 10 November 2016

Accepted: 15 February 2017

Published: 30 March 2017

Keywords:

x-ray inspection, polymer composite materials, carbon fiber-reinforced plastic (CFRP), test, mechanics of composite materials, stress-strain state, finite element method (FEM), stiffness, strength, delamination, bulkhead.

ABSTRACT

The current work presents a qualitative and quantitative assessment of microdamage occurring in the structure as a result of different loading tests by the example of the "U"-shaped bulkhead segment made of carbon fiber reinforced plastic (CFRP) using microfocus X-radiography. The resin transfer molding (RTM) technology was used to manufacture this structure.

X-ray images with the fixed tensile force were made during the sample tests. These images were analyzed in order to reveal a delamination as the basic damage type occurring in the tested part. The areas of interlayer cracks localization and their estimated sizes were identified at the various load levels. It was noted that the cracks were completely closed after unloading; and it was difficult to identify them by any non-destructive testing methods.

The three-dimensional computer model was created to carry out the stress-strain analysis of the sample. A detailed ply-by-ply analysis allowed us to estimate the interlaminar normal and shear stresses which determine the structural failure. The numerical simulation of this problem was carried out using the finite element method (FEM) with ANSYS Workbench software. Due to a high dimensionality of the FE model, the high-performance computing complex was used.

The numerical simulations results with regard to the mechanical tests of the bulkhead segment were compared with the X-ray radiography results, and a good qualitative correlation was found. Thus, it was shown that the areas of maximal interlaminar stresses are localized in the part's bending areas. The difference between the experimental and numerical values of the bearing strength was about 23% but it could be corrected after testing a series of similar samples and refining the material interlaminar gap strength.

© PNRPU

Введение

В настоящее время полимерные композиционные материалы (ПКМ) широко используются для создания высоконагруженных авиационных деталей и узлов. Это обеспечивает снижение массы, повышение топливной эффективности, а в ряде случаев – повышение технологичности и снижение себестоимости изготовления. В отличие от ряда конструкций ракетно-космической техники, традиционно выполняемых из ПКМ, авиационные де-

тали и узлы имеют, как правило, более сложную геометрию и технологию изготовления, они подвержены широкому спектру динамических нагрузок в течение длительного периода эксплуатации [1–3]. При этом в конструкции деталей в процессе эксплуатации неизбежно должны накапливаться повреждения, регистрация которых, а также учет их влияния на несущую способность и ресурс конструкций, является актуальной задачей.

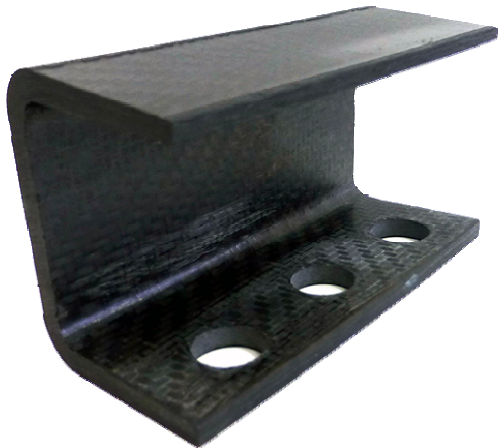


Рис. 1. Внешний вид сегмента конструктивно-подобного элемента
Fig. 1. A view of the bulkhead partition

Объектом исследования в настоящей работе является конструктивно-подобный элемент типа «сегмент шпангоута» П-образного сечения (рис. 1), выполненный по технологии пропитки смолой под давлением сухих слоев углеродной ткани, выложенных в специальную формообразующую оснастку.

В процессе эксплуатации подобные конструкции подвергаются сложной комбинированной нагрузке, которая приводит к их изгибу и кручению. При этом в местах перегибов слоев возникают высокие межслойные нормальные и касательные напряжения. Эти напряжения могут приводить к растрескиванию и последующему накоплению повреждений при сравнительно небольших

нагрузках, задолго до исчерпания несущей способности конструкции при оценке по направлению армирования [4–8]. Такие межслойные повреждения и трещины плохо идентифицируются средствами неразрушающего контроля и визуально могут быть неразличимы при отсутствии внешней приложенной нагрузки (трещины смыкаются по исходной поверхности контакта слоев).

Для исследования процессов расслоения в настоящей работе представлен метод микрофокусного рентгенографического контроля, проводимого непосредственно в процессе лабораторных механических испытаний конструктивно подобного элемента (in-situ) [9–13]. Результаты испытаний сравниваются с результатами решения задачи механики деформируемого твердого тела, моделирующей поведение исследуемого объекта при лабораторном нагружении.

1. Методика и оборудование микрофокусной рентгенографии

Микрофокусная рентгенография представляет собой метод получения рентгеновских изображений различных объектов с помощью источников рентгеновского излучения, размеры фокусного пятна которых не превышают 0,1 мм [14, 15]. В отличие от традиционных способов рентгенологических исследований, микрофокусная рентгенография обладает рядом важнейших отличительных особенностей. Первой из них является возможность получения резких увеличенных рентгеновских изображений различных объектов. При этом размер фокусного пятна, а также расстояние между источником излучения и объектом съемки существенно влияют на величину геометрической составляющей, то есть нерезкости получаемого изображения [16]. В условиях проведения испытаний на величину геометрической составляющей будет влиять форма объекта, в большинстве случаев не позволяющая приблизить контролируемый участок образца к приемнику изобра-

жения [17]. Кроме того, близкие значения плотности материала армирующих элементов и связующего вещества обуславливают низкий контраст изображения, поэтому снижается вероятность обнаружения и распознавания на рентгеновских изображениях объектов контроля возможных дефектов. Второй, не менее важной, особенностью микрофокусной рентгенографии является возможность получения информативных рентгеновских изображений одних и тех же объектов исследования при меньшей радиационной нагрузке по сравнению с классической рентгенографией [18–19]. В связи с этим для решения задачи оперативной высокоинформативной оценки в процессе проведения механических испытаний был применен микрофокусный способ получения рентгеновских изображений.

Комплект оборудования для микрофокусной рентгенографии, использованный в настоящих исследованиях, включает портативный микрофокусный комплекс рентгеновской диагностики РАП-150 с цифровой сканирующей системой регистрации CR 35 NDT [20–21] (рис. 2).

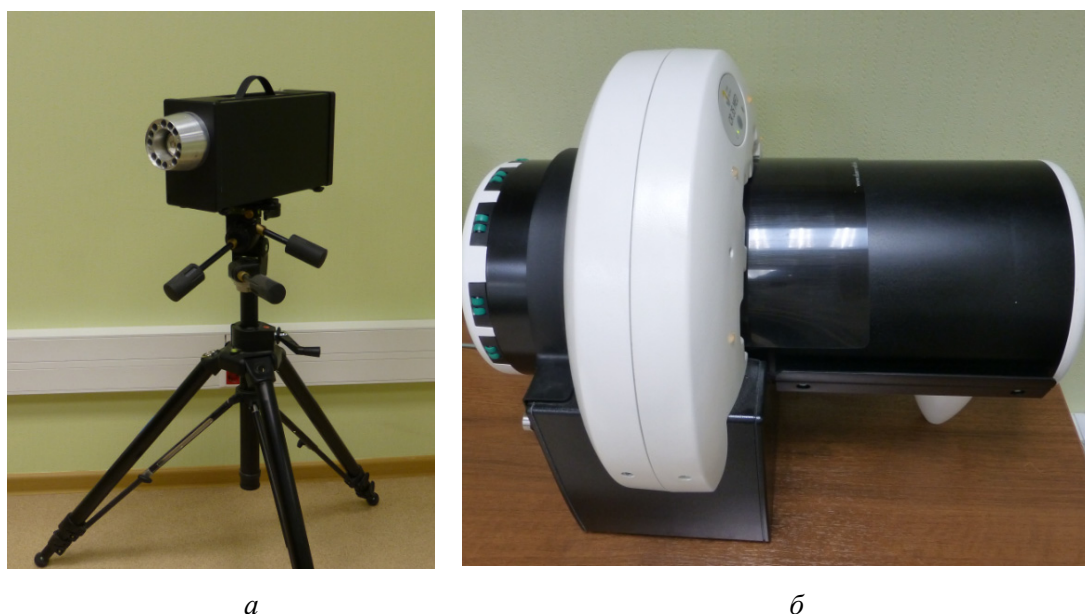


Рис. 2. Микрофокусный рентгеновский аппарат (а) и сканирующая система CR 35 NDT (б)
Fig. 2. The microfocus X-ray unit (a) and scanning system CR 35 NDT (b)

Микрофокусный рентгеновский аппарат выполнен в моноблочном исполнении, анодное напряжение аппарата не превышает 130 кВ, анодный ток не превышает 200 мкА, размер фокусного пятна находится в диапазоне от 20 до 100 мкм. В качестве цифровых приемников рентгеновских изображений были использованы запоминающие пластины с фотостимулируемым люминофором. Считывание пластин осуществлялось при помощи сканирующей системы CR 35 NDT, имеющей разрешающую способность до 15 пар линий на миллиметр.

2. Механическое испытание конструктивно-подобного элемента с применением метода *in-situ* рентгеновского контроля

Испытания исследуемого конструктивно-подобного элемента проводятся для оценки его прочности и жесткости, а также для косвенной оценки механических свойств композиционного материала, реализуемых в конструкции. В процессе эксплуатации конструк-

ция подвергается сложной комбинированной нагрузке, реализация которой в лабораторных условиях является сложной задачей. Поэтому экспериментальное исследование механического поведения исследуемого объекта проводится при более простом нагружении, характеризующем основные особенности деформирования при эксплуатации. Последующее математическое моделирование механических испытаний и сравнение с результатами эксперимента позволяют оценить адекватность математических моделей и достоверность механических свойств, используемых для расчета конструкции в процессе проектирования, а также подтвердить расчетные оценки запасов прочности. Предварительные испытания исследуемого элемента при квазистатической монотонно увеличивающейся нагрузке показали, что разрушение конструкции начинается с возникновения межслоевых трещин, которые приводят к снижению жесткости конструкции с частичным сохранением её несущей способности. Интересно отметить, что после снятия нагрузки межслоевые трещины «смыкаются» и с трудом идентифицируются средствами неразрушающего контроля [14]. Для идентификации (определение характера, местоположения, протяженности и величины раскрытия дефекта) областей расслоения в процессе испытаний сегмента шпангоута были предприняты исследования с применением рентгенографического контроля in-situ.

Нагружение элемента проводилось на испытательной машине Zwick Z100 Pro Line, входящей в состав уникальной научной установки (УНУ) «Уникальный научно-технологический комплекс автоматизированной выкладки» ПНИПУ, с помощью специально изготовленной оснастки, обеспечивающей жесткое закрепление нижней полки сегмента и приложение вертикальной растягивающей нагрузки к верхней полке (рис. 3, а). Рентгеновская съемка производилась с одного фиксированного места расположения аппарата, так что контроль объекта выполнялся с использованием одной проекции. Ввиду того что предполагаемые дефекты будут образовываться в местах загиба слоев, вдоль их армирования, микрофокусный рентгеновский аппарат располагался снизу и под углом, приблизительно равным 45 градусам, к объекту исследования (рис. 3, б). При этом чувствительная пластина располагалась в верхней части позади объекта исследования перпендикулярно рентгеновскому лучу.

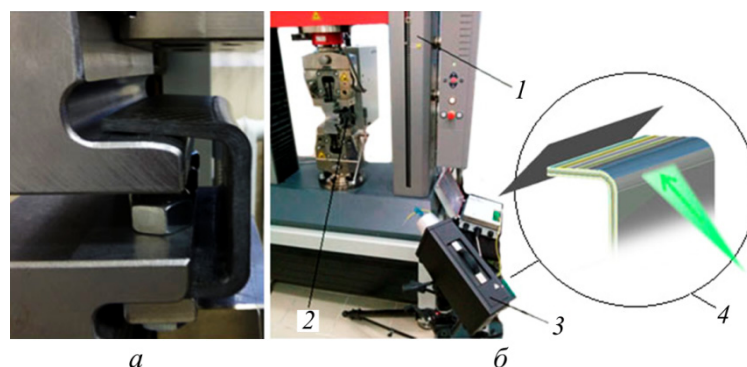


Рис. 3. Объект испытаний в оснастке (а) и общий вид комплекта экспериментального оборудования (б): 1 – испытательная машина; 2 – сегмент конструктивно-подобного элемента; 3 – микрофокусный рентгеновский аппарат; 4 – направление съемки
 Fig. 3. The testing sample in the fixture (a) and a general view of the testing equipment (b), 1 is the testing machine; 2 is the "U"-shaped bulkhead segment, 3 is the microfocus X-ray unit, 4 is the X-ray direction

Время экспозиции составляло 50 с при анодном напряжении 40 кВ и анодном токе 40 мкА. Выбранные параметры рентгеновского контроля позволили выявить межслоевые трещины, возникающие в углах сегмента шпангоута в процессе механических испытаний. С целью фиксации раскрытия трещины в момент проведения замера прикладываемое усилие к образцу в процессе испытаний оставалось постоянным.

Механические испытания исследуемого образца проводились при комнатной температуре +22 °С и с постоянной скоростью нагружения 5 мм/мин. В процессе испытаний регистрировалось усилие нагружения и перемещение захватов испытательной машины. Полученная диаграмма деформирования в осях «усилие-перемещение» показана на рис. 4.

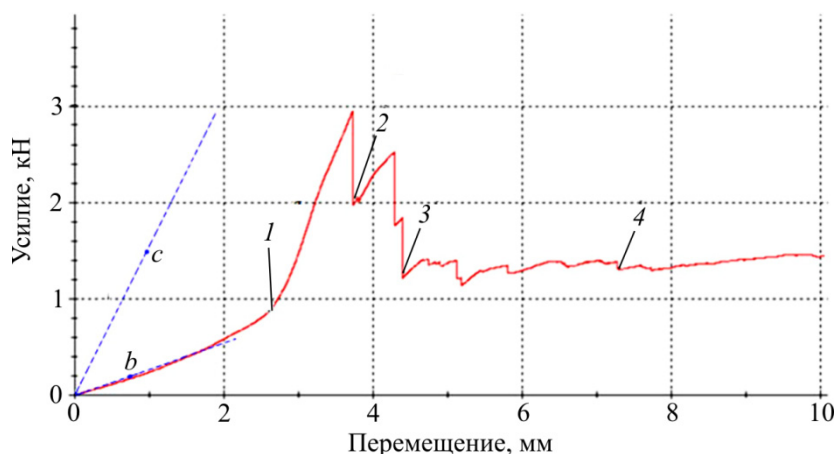


Рис. 4. Экспериментальная диаграмма деформирования испытываемого образца: 1, 2, 3, 4 – этапы выполнения контроля рентгенографическим методом и расчетные участки упругого деформирования (Ob , Oc) в зависимости от локализации площадки приложения нагрузки

Fig. 4. The test deformation curve of the sample (1, 2, 3, 4 are X-ray control points) and numerically calculated initial elastic domains (Ob , Oc) depending on the load application area

На начальном этапе процесса нагружения, до усилия приблизительно 0,8 кН, происходит деформирование исследуемого образца по механизму отгибания верхней полки шпангоута при незначительно изменяющихся параметрах зоны контакта нагружающего элемента оснастки с поверхностью верхней полки. Дальнейшее резкое изменение угла наклона диаграммы связано со значительным изменением параметров зоны контакта – зона контакта смещается к угловой точке шпангоута, её площадь уменьшается. При этом происходит смещение равнодействующей нагружающей силы ближе к угловой точке шпангоута (месту перегиба слоев), что приводит к уменьшению плеча нагружающей силы и возрастанию сопротивления деформированию образца.

В данной точке диаграммы (усилие 0,8 кН) была выполнена первая рентгенографическая съемка, показавшая отсутствие расслоений в материале (рис. 5, а). Для оптимальной визуализации рентгеновского изображения была произведена его обработка с применением линейной фильтрации, контрастирования и добавлением яркости. В процессе последующего нагружения, при достижении нагрузки ~3,0 кН стало отчетливо слышно потрескивание в образце, после чего произошло снижение усилия до 2,0 кН. Это свидетельствует о появлении в конструкции межслоевых трещин, для обнаружения которых была выполнена вторая рентгенографическая съемка (рис. 5, б). Рентгеновская съемка показала наличие двух межслоевых трещин с перехлестом (обозначено овалом) в разных слоях

и выходом на оба торца образца. Выход межслоевой трещины на торцевой участок сегмента шпангоута был обнаружен визуально (рис. 6). Трещины расположены в верхней угловой зоне сегмента вблизи наружной поверхности. По данным рентгеновской съемки можно приблизительно оценить протяженность выявленных трещин, которые составляют 42 и 61 мм, а также их раскрытие, равное 0,5 мм. Для определения площади образовавшейся трещины необходимо построение объемного рентгеновского изображения. Это будет сделано в последующих исследованиях.

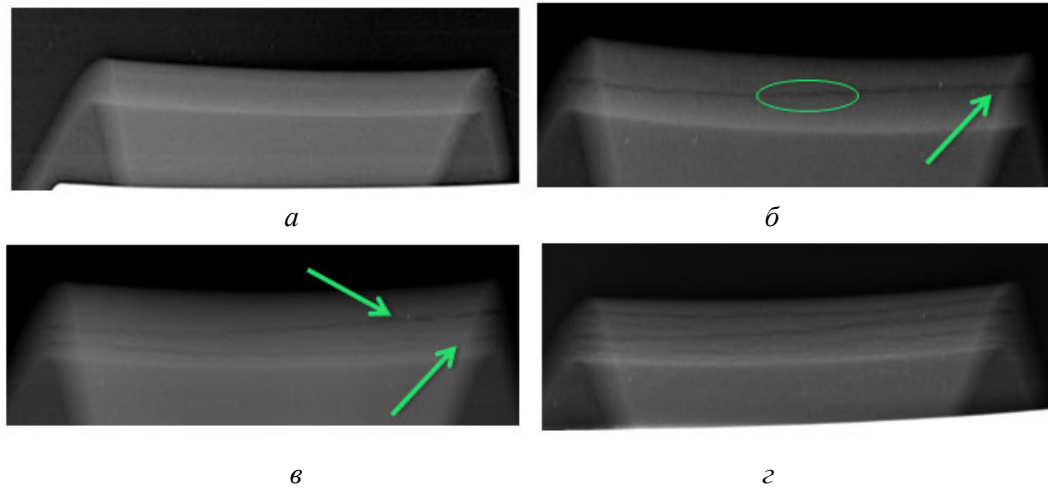


Рис. 5. Рентгеновское изображение конструктивно-подобного элемента в четырех точках контроля: *а* – перемещение захватов 2,5 мм, нагрузка 0,8 кН; *б* – перемещение захватов 3,8 мм, нагрузка 2,0 кН; *в* – перемещение захватов 4,2 мм, нагрузка 1,2 кН; *г* – перемещение захватов 7,2 мм, нагрузка 1,3 кН
 Fig. 5. X-ray images in control points: *a* – is the traverse displacement of 2.5 mm, under the load of 0.8 kN; *b* – is the traverse displacement of 3.8 mm, under the load of 2.0 k; *c* – is the traverse displacement of 4.2 mm, under the load of 1.2 kN; *d* – is the traverse displacement of 7.2 mm, under the load of 1.3 kN

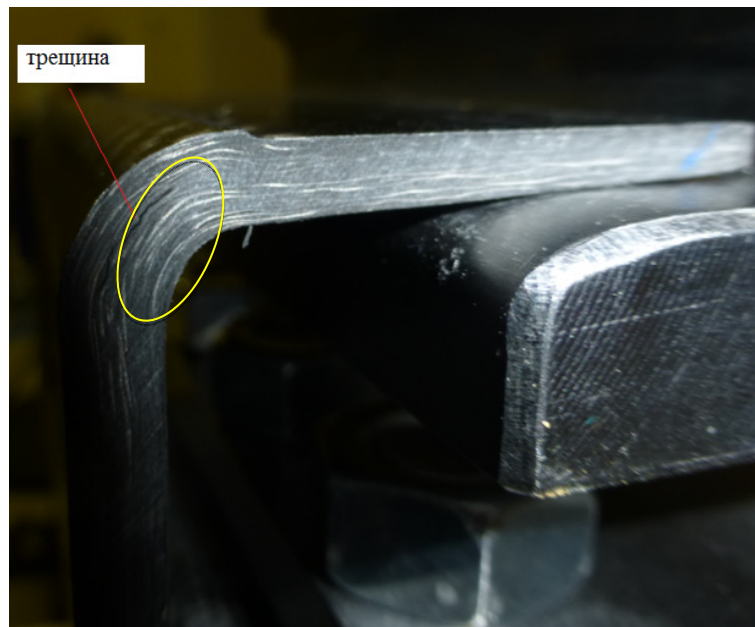


Рис. 6. Фотография выхода на торцевую поверхность межслоевой трещины в первой точке контроля: перемещение захватов 3,8 мм, нагрузка 2,0 кН
 Fig. 6. The interlaminar crack on the end surface in the 1st control point, the traverse displacement of 3.8 mm, under the load of 2.0 kN

При последующем растяжении исследуемого образца наблюдалось повышение нагрузки от 2,0 до 2,4 кН, при этом анализ диаграммы деформирования на этом участке (см. рис. 4) показывает снижение жесткости образца. При перемещении захватов до значения 4,2 мм и достижения уровня нагрузки 2,4 кН было вновь зафиксировано растрескивание образца и наблюдалось падение нагрузки до 1,2 кН. В этой точке была выполнена третья рентгенографическая съемка. Соответствующее обработанное рентгеновское изображение показано на рис. 5, в.

Третья рентгеновская съемка показала образование новой межслоевой трещины, располагающейся в верхней угловой зоне вблизи внутренней поверхности. Трещина располагается на всем протяжении образца с раскрытием 0,2 мм, при этом прежние расслоения не увеличились в размерах.

Далее при растяжении происходит дальнейшее растрескивание образца. Диаграмма деформирования при этом имеет «пилообразный» характер (см. рис. 4): наблюдается небольшое повышение нагрузки, затем при появлении новой трещины или распространении существующей – спад, наклон участков диаграммы с повышением нагрузки становится более пологим. Разрушения слоев и разрыва волокон не происходит, снижается только жесткость и несущая способность поврежденной конструкции, фиксируемая в испытаниях на уровне 1,2–1,3 кН. Четвертая точка рентгеновского контроля проводилась при этой нагрузке и перемещении захватов 7,2 мм (см. рис. 4). Обработанное рентгеновское изображение (см. рис. 5, г) показало наличие множественных межслоевых трещин в угловой зоне образца по всему радиусу закругления. Это обстоятельство снижает жесткость П-образного профиля на изгиб, деформирование его при данной нагрузке (1,2–1,3 кН) происходит по типу образования условного «пластического шарнира» в угловой зоне, при этом происходит поворот верхней полки относительно перекладины без увеличения нагрузки.

Таким образом, в результате механических испытаний совместно с проведением рентгенографической съемки определены места локализации и ориентировочные значения размеров межслоевых трещин при различных уровнях нагрузки. Показано, что конструктивно-подобный элемент П-образного профиля разрушается по типу расслоения в угловой зоне, без разрыва волокон слоев, с сохранением несущей способности от максимальной нагрузки на уровне 30 %. Выбранные ракурсы рентгеновской съемки позволяют определять расслоения в образце и могут использоваться для контроля полноразмерных натуральных конструкций подобного профиля.

3. Постановка задачи расчета напряженно-деформированного состояния композитного профиля

Для численного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемой конструкции была разработана трехмерная компьютерная модель с явным описанием её слоистой структуры. Такой подход позволил провести оценку межслоевых отрывных и сдвиговых напряжений, которые определяют разрушение конструкции, зафиксированное в эксперименте. Решение задачи осуществлялось методом конечных элементов (МКЭ) с использованием программного комплекса ANSYS Workbench.

Моделировался исследуемый образец, выполненный из углепластика на основе равнопрочного тканого наполнителя со схемой армирования (0° , 90°). Используемые в численном моделировании упругие и прочностные свойства (табл. 1, 2) анизотропных слоев

углепластика в плоскости армирования OX_1X_2 принимались по результатам испытаний стандартных образцов. Свойства перпендикулярно плоскости армирования принимались по оценочным данным из работ [22–23].

Таблица 1

Упругие свойства композиционного материала

Table 1

Elastic properties of the composite material

Материал	E_{11} , ГПа	E_{22} , ГПа	E_{33} , ГПа	G_{12} , ГПа	G_{13} , ГПа	G_{23} , ГПа	ν_{21}	ν_{13}	ν_{32}
Равнопрочный углепластик	63,9	63,9	20,0	19,5	2,7	2,7	0,04	0,3	0,3

Примечание: E_{11} – модуль упругости вдоль основы; E_{22} – модуль упругости поперек основы (вдоль утка); E_{33} – модуль поперек плоскости слоя; G_{12} , G_{13} , G_{23} – модули сдвига; ν_{21} , ν_{13} , ν_{32} – коэффициенты Пуассона.

Таблица 2

Прочностные свойства композиционного материала

Table 2

Strength properties of the composite material

Материал	S_{11}^+ , МПа	S_{11}^- , МПа	S_{22}^+ , МПа	S_{22}^- , МПа	S_{33}^+ , МПа	S_{33}^- , МПа	S_{12} , МПа	S_{13} , МПа	S_{23} , МПа
Равнопрочный углепластик	809	804	809	804	44	128	150	77	77

Примечание: S_{ii}^+ , S_{ii}^- , S_{ij} – пределы статической прочности материала на растяжение, сжатие и сдвиг соответственно в локальной системе координат слоя.

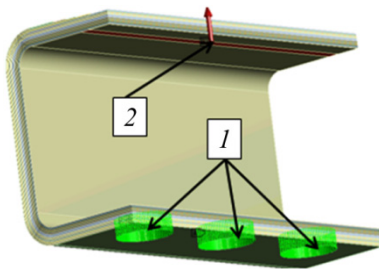


Рис. 7. Схема граничных условий: 1 – жесткое закрепление в области болтовых соединений; 2 – нагрузка 1,5 кН

Fig. 7. The scheme of boundary conditions, 1 is bolting; 2 is the load of 1.5 kN

На рис. 7 представлена геометрическая модель и схема задания граничных условий для исследуемого образца. В местах болтового крепления нижней полки образца задавалось ограничение перемещений во всех направлениях. На нижней поверхности верхней полки задавалась постоянная нагрузка. Площадь поверхности приложения нагрузки соответствует области соприкосновения образца и нагружающего элемента оснастки в процессе проведения испытаний при соответствующей нагрузке. Контакт между слоями композиционного материала в образце считался идеальным.

Такая постановка является упрощенной, поскольку при проведении испытаний происходит изменение зоны контакта нагружающего элемента оснастки с поверхностью верхней полки образца шпангоута. Это обстоятельство обуславливает нелинейный характер экспериментальной диаграммы деформирования (см. рис. 4) еще до начала растрескивания образца. Наличие двух участков на диаграмме объясняется существенным измене-

нием зоны контакта при нагрузке, приблизительно равной 0,8 кН. Расчеты проводились для двух значений суммарной нагрузки: 0,2 и 1,5 кН. При этом в каждом случае область приложения нагрузки принималась приблизительно эквивалентной области контакта нагружающего элемента и верхней полки при испытаниях. В первом варианте нагружения срединная линия области приложения нагрузки располагалась на расстоянии 10 мм от края верхней полки шпангоута, ширина области равнялась 20 мм, во втором случае – 22,5 и 5 мм соответственно.

При создании конечно-элементной (КЭ) модели использовались твердотельные трехмерные 4-узловые элементы Solid185. Была исследована зависимость решения МКЭ от плотности сетки. Считалось, что выбор оптимальных размеров КЭ завершен, если при переходе к более плотной сетке максимальные напряжения в слоях изменяются не более чем на 5 %. Для исследуемой модели максимальный размер элемента при этом составил четыре толщины слоя $4h$ (1 мм), минимальный – половину толщины слоя $h/2$ (0,125 мм). Общее количество конечных элементов, используемых для дискретизации конструкции, составило порядка 2 миллионов. На рис. 8 представлен общий вид конечно-элементной сетки, используемый в расчетах.

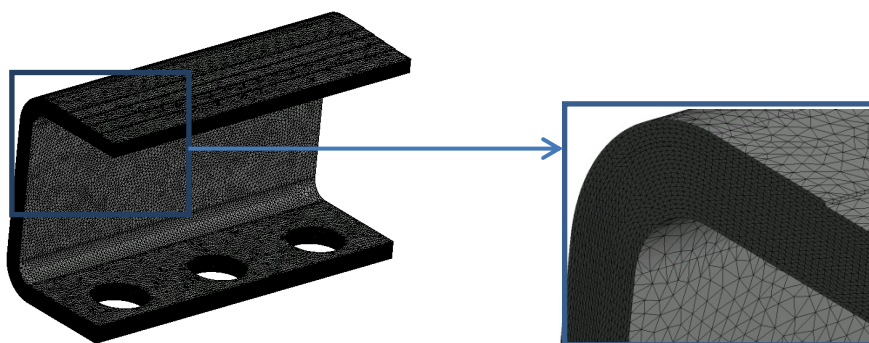


Рис. 8. Общий вид конечно-элементной сетки моделируемого образца
 Fig. 8. The general view of the finite element mesh

Математическая постановка задачи расчета НДС рассматриваемого образца, включающая соотношения теории упругости неоднородного анизотропного тела, приводилась авторами при расчетах подобных конструкций в работах [24, 25]. В вариационной формулировке эта постановка для области V с границей S заключается в отыскании минимума функционала Лагранжа [26], вариация которого имеет вид

$$\delta J_u = \int_V \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} dV - \int_{S_i} F_i \cdot \delta u_i dS,$$

где ε_{ij} и $\delta \varepsilon_{ij}$ – тензор и вариация тензора деформаций; C_{ijkl} – тензор упругих модулей; δu_i – вариация вектора перемещений; F_i – вектор внешних сил, действующих на участке границы S_i .

В области болтовых соединений задавались нулевые перемещения (см. рис.7). Для ортотропного слоя углепластика компоненты тензора модулей упругости C_{ijkl} зависят не только от материала, но также от его ориентации относительно глобальной системы координат конструкции [27]. В разработанной 3D-модели для каждого конструктивного элемента профиля – стенка, полки и скругления между ними – введены локальные системы координат, в которых ось Ox_1 совпадает с направлением основы тканого армирующе-

го наполнителя, OX_2 – с направлением утка, OX_3 – перпендикулярна плоскости слоя. Прочность конструкции оценивалась по напряжениям в слоях с помощью критерия максимальных напряжений и прочностных свойств материала, приведенных в табл. 2.

4. Анализ напряженно-деформированного состояния и оценка прочности композитного профиля

Проведенный эксперимент показал, что разрушение образца происходит при нагрузке приблизительно 3,0 кН, в областях перехода слоев со стенки профиля на его полки (зоны скругления) и имеет характер расслоения. Это свидетельствует о превышении соответствующих пределов прочности межслойными напряжениями – сдвиговыми τ_{13} , τ_{23} или нормальными σ_{33} .

Анализ результатов численного расчета, полученного с использованием разработанной модели образца шпангоута при нагрузке 1,5 кН, показал, что максимальные напряжения действительно возникают в указанных областях образца. При этом напряжения в центральном сечении образца и на его торцах отличаются незначительно (не более 3 %).

В плоскости армирования наибольшие значения растягивающих напряжений вдоль основы σ_{11} и вдоль утка σ_{22} возникают в первом слое (отсчитывая от внутренней поверхности образца) и составляют 168,7 и 42,7 МПа соответственно. Максимальные сжимающие напряжения σ_{11} и σ_{22} возникают в последнем слое (на наружной поверхности образца) и составляют –116,3 и –33,2 МПа соответственно. Сравнивая полученные значения напряжений с предельными значениями (см. табл. 2), отметим, что при нагрузке 1,5 кН конструкция должна обладать практически 5-кратным запасом прочности на разрыв армирующих слоев.

Касательные напряжения в конструкции сравнительно невелики: τ_{12} в плоскости армирования не превосходят 22,9 МПа, максимальные значения межслойных касательных напряжений $\tau_{13} = 12,8$ МПа и $\tau_{23} = 3,38$ МПа. В целом запас прочности по касательным напряжениям составляет более 6.

Наиболее опасными являются межслойные отрывные напряжения σ_{33} , максимальные значения которых наблюдаются в центральных слоях в отмеченных зонах скругления профиля и составляют порядка 29 МПа (рис. 9), что соответствует коэффициенту запаса прочности, равному 1,5 (см. табл. 2). Именно эти напряжения определяют начало расслоения конструкции при нагружении. В линейном приближении оценка соответствующего критического значения нагрузки составляет приблизительно 2,3 кН.

Расчет НДС рассматриваемого образца шпангоута при нагрузке 0,2 кН и сравнение с результатами расчета при нагрузке 1,5 кН показал, что в целом характер НДС не изменился – наиболее нагруженной является область перехода слоев со стенки профиля на полки образца. Однако изменение области приложения нагрузки в соответствии с изменением зоны контакта оснастки с поверхностью верхней полки образца приводит к увеличению его жесткости, наблюдаемой при испытаниях. На рис. 10 схематично показаны поля перемещений в среднем сечении исследуемого образца с различными областями распределения нагружающих усилий 0,2 и 1,5 кН, соответствующими зонам контакта, фиксируемым в эксперименте. Как видно из рис. 10, при деформировании образца происходит изгиб верхней полки, при этом перемещения в области приложения нагрузки изменяются, что свидетельствует об изменении зоны контакта оснастки и образца, наблюдаемом в эксперименте. Вертикальные перемещения на средней линии площадки приложения нагрузки в первом варианте нагружения равняются 0,75 мм, во втором – 0,95 мм.

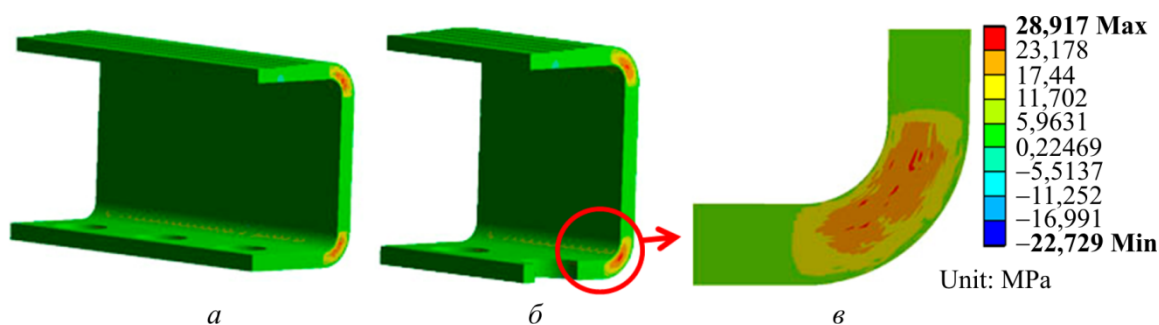


Рис. 9. Распределение межслойных нормальных напряжений σ_{33} (МПа) в зонах скруглений профиля при нагрузке 1,5 кН: *a* – общий вид образца; *б* – центральное сечение образца; *в* – область нижней полки

Fig. 9. The distribution of the interlaminar normal stresses σ_{33} (MPa) in the bending areas under the load of 1.5 kN: *a* – is the general view; *b* – is the central cross section; *c* – is the lower flange

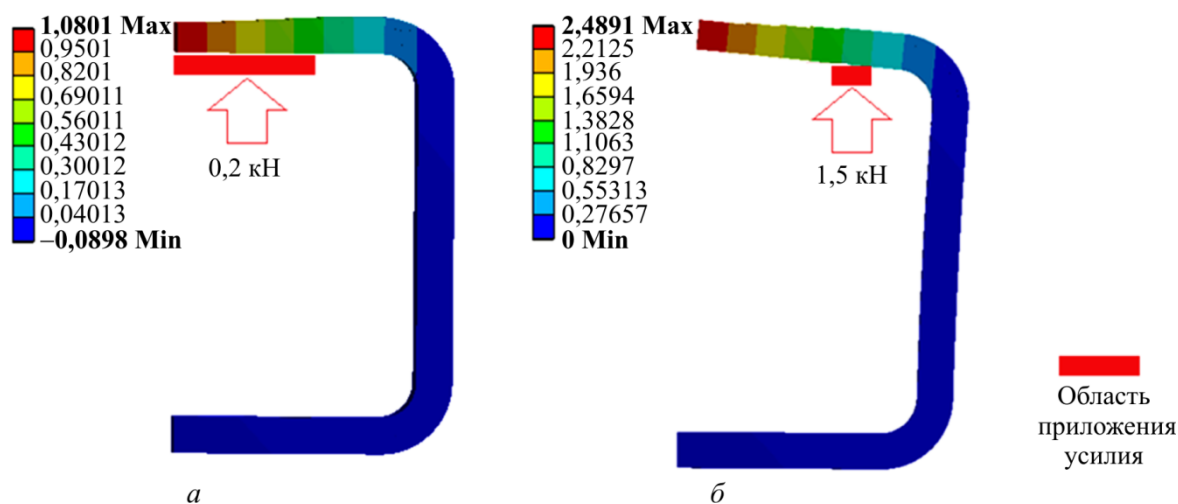


Рис. 10. Поля перемещения в среднем сечении образца шпангоута (мм) при различных условиях приложения нагрузки: *a* – нагрузка 0,2 кН на большей площади контакта; *б* – нагрузка 1,5 кН на меньшей площади контакта

Fig. 10. Displacements in the sample (mm) with different conditions of load application: *a* – is the load of 0.2 kN on the large contact area; *b* – is the load of 1.5 kN on the small contact area

Принимая значения этих перемещений в качестве перемещения оснастки и полагая, что оснастка жестко связана с траверсой испытательной машины, можно приблизительно сравнить моделируемую и экспериментальную жесткость исследуемого образца. На рис. 4 показаны точки *b* и *c*, соответствующие задаваемым усилиям и рассчитываемым перемещениям при двух рассмотренных вариантах нагружения: 0,2 кН и 0,75 мм и 1,5 кН и 0,95 мм. Линии, проведенные от начала координат, характеризуют упругое деформирование, а их наклон – расчетную жесткость образца. Сравнивая наклон расчетных кривых упругого деформирования с наклоном двух характерных участков на экспериментальной диаграмме деформирования (см. рис. 4), можно отметить хорошее соответствие моделируемой и экспериментально обнаруженной жесткости образца.

Для более точного моделирования деформирования образца при лабораторных испытаниях необходима постановка и решение нелинейной контактной задачи теории упругости, учитывающей взаимодействие образца с испытательной оснасткой.

Таким образом, математическое моделирование исследуемого конструктивно-подобного элемента П-образного сечения позволяет определить область возникновения расслоений, фиксируемых в процессе проведения лабораторных испытаний. Характер деформирования образца даже на упругом участке удается описать только приближенно в связи с изменяющейся площадкой контакта оснастки с поверхностью образца в процессе испытаний. Получаемое расчетное значение критической нагрузки начала расслоения на 23 % меньше наблюдаемой в эксперименте. Это отличие может быть вызвано погрешностью задания зоны приложения нагрузки при моделировании, ориентировочным значением предела прочности слоистого композита для межслойного отрыва (44 МПа), использованного при оценках запаса прочности конструкции, а также недостаточной статической наработкой экспериментальных данных, ограниченных испытанием одного образца. В последующих исследованиях планируется повторное испытание подобных образцов с более точным фиксированием зоны контакта образца и испытательной оснастки и одновременным проведением рентгенографической съемки с нескольких ракурсов для получения оценки площади внутреннего расслоения композита в процессе испытаний.

Заключение

В настоящей работе на примере композитного образца П-образного профиля проведена качественная и количественная оценка расслоений, возникающих в конструкции при различных уровнях нагружения с использованием метода микрофокусной рентгенографии *in-situ*. В результате механических испытаний совместно с проведением рентгенографической съемки определены места локализации и ориентировочные значения размеров межслойных трещин при различных уровнях нагрузки. Показано, что конструктивно-подобный элемент П-образного профиля разрушается по типу расслоения в угловой зоне, без разрыва волокон слоев с сохранением несущей способности от максимальной нагрузки на уровне 30 %. Выбранные ракурсы рентгеновской съемки позволяют определять расслоения в образце и могут использоваться для контроля полноразмерных натуральных конструкций подобного профиля.

Разработана методика расчета НДС и оценки статической прочности исследуемой конструкции в трехмерной постановке с учетом схемы укладки и анизотропии свойств армирующих слоев. Сравнение результатов численного моделирования механических испытаний и данных рентгенографического контроля при испытаниях показало хорошее качественное совпадение – области локализации максимальных межслойных напряжений, определяющих характер разрушения детали, возникают в зонах скругления профиля. Методика позволяет получить только приближенную оценку жесткости конструкции при условии правильного задания области приложения нагрузки в соответствии с площадкой контакта оснастки и образца в процессе испытаний. Для более точного моделирования деформирования образца при испытаниях необходима постановка и решение нелинейной контактной задачи теории упругости, учитывающей взаимодействие образца с испытательной оснасткой. Отличие оценок несущей способности, полученных экспериментальными и численными методами, составило порядка 23 %, что может быть скорректировано после получения уточненного решения нелинейной контактной задачи теории упругости, проведения натуральных испытаний серии подобных образцов и уточнения прочности материала на межслойный отрыв.

Разработанная методика расчетно-экспериментальной оценки прочности композитных образцов с применением метода in-situ микрофокусного рентгеновского контроля может быть использована для оценки прочности других образцов композитных конструкций при лабораторных механических испытаниях.

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-19-00259).

Библиографический список

1. Гагауз Ф.М. Проблемы технологии формирования соединительных узлов конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та. – 2012. – № 4 (72). – С. 15–20.
2. Иноземцев А.А., Нихамкин М.Ш., Сандрацкий В.Л. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2008. – Т. 2. – 368 с.
3. Конструкция и прочность авиационных газотурбинных двигателей / Л.П. Лозицкий [и др.]. – М.: Воздушный транспорт, 1992. – 536 с.
4. Технологии и задачи механики композиционных материалов для создания лопатки спрямляющего аппарата авиационного двигателя / А.Н. Аношкин, В.Ю. Зуйко, Г.С. Шипунов, А.А. Третьяков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 4. – С. 5–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.01.
5. Bottega W.J., Maewal A. Delamination buckling and growth in laminates // Journal Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50. – No 1. – P. 184–189. DOI:10.1115/1.3166988
6. Chai H., Babcock C.D., Knauss W.G. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling // International Journal of Solids and Structures. – 1981. – Vol. 27. – No. 11. – P. 1069–1083. DOI: 10.1016/0020-7683(81)90014-7
7. Prediction of flange debonding in composite stiffened panels using an analytical crack tip element-based methodology / Z. Mikulik, D.W. Kelly, B.G. Prusty, R.S. Thomson // Composite Structures. – 2008. – Vol. 85. – No. 3. – P. 233–244. DOI:10.1016/j.compstruct.2007.10.027
8. Березин А.В., Козинкина А.И. Особенности диагностики повреждений и оценки прочности композита // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – № 1. – С. 99–122.
9. In-situ damage monitoring of textile composites using x-ray computed tomography / W.J. Na, H.C. Ahn, K.M. Park, H.M. Kang, W.R. Yu // ECCM15: 15th European conference on composite materials. – Italy, Venice, 2012.
10. Swygenhoven H., Petegem S. In-situ mechanical testing during X-ray diffraction // Materials Characterization. – 2013. – Vol. 78. – P. 47–59. DOI:10.1016/j.matchar.2012.12.010
11. Nishino T., Hirokane D., Nakamae K. X-ray diffraction studies of the environmental deterioration of a transversely loaded carbon-fibre-reinforced composite // Composites Science and Technology. – 2001. – Vol. 61. – No. 16. – P. 2455–2459. DOI:10.1016/S0266-3538(01)00174-9
12. Microfocus radiography studies during model interlaminar fracture tests on composites / T. De Kalbermatten, R. Jäggi, P. FLüeler, H.H. Kausch, P. Davies // Journal of Materials Science Letters. – 1992. – Vol. 11. – No. 9. – P. 543–546.
13. Withers P.J., Preuss M. Fatigue and Damage in Structural Materials Studied by X-Ray Tomography // Annual Reviews. – 2012. – Vol. 42. – P. 81–103. DOI: 10.1146/annurev-matsci-070511-15511
14. Ключев В.В. Рентгенотехника: справ. – М.: Машиностроение, 1980. – Кн. 2. – 383 с.
15. Румянцев С.В. Радиационная дефектоскопия. – М.: Атомиздат, 1974. – 500 с.
16. Артемьев Б.В., Буклей А.А. Радиационный контроль: учеб. пособие // под общ. ред. В.В. Ключева. – 2-е изд. – М.: Спектр. 2013. – 192 с.
17. In-situ Analysis of Laminated Composite Materials by X-ray Micro-Computed Tomography and Digital Volume Correlation / R. Brault, A. Germaneau, C. Dupré, P. Doumalin, S. Mistou, M. Fazzini // Experimental Mechanics. – 2013. – Vol. 53. – No. 7. P. 1143–1151. DOI: 10.1007/s11340-013-9730-9

18. Потрахов Н.Н. Метод и особенности формирования теневого рентгеновского изображения микрофокусными источниками излучения // Вестник новых медицинских технологий. – 2007. – Т. 14, № 3. – С. 167–169.
19. Технология оперативного рентгеновского контроля изделий из полимерных композиционных материалов / Н.Н. Потрахов, К.К. Жамова, В.Б. Бессонов, А.Ю. Грязнов, А.В. Ободовский // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. – 2015. – № 4. – С. 97–115. DOI: 10.15593/2224-9982/2015.43.08
20. Блинов Н.Н., Леонов Б.И. Рентгеновские диагностические аппараты. – М.: Экран, 2001. – Т. 1. – С. 220.
21. Иванов С.А., Щукин Г.А. Рентгеновские трубки технического назначения. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-е., 1989. – С. 200.
22. Аношкин А.Н., Ташкинов А.А. Прогнозирование несущей способности композитных фланцев корпусных деталей авиадвигателей / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1998. – С. 101.
23. Лукина Н.Ф. Клеевые препреги на основе тканей Porcher – перспективные материалы для деталей и агрегатов из ПКМ [Электронный ресурс] // Труды ВИАМ. – 2014. – № 6. – URL:http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=677 (дата обращения: 03.11.16). DOI: 10.18577/2307-6046-2014-0-6-10-10
24. Компьютерное моделирование механического поведения композитной лопатки спрямляющего аппарата авиационного двигателя / М.А. Гринев, А.Н. Аношкин, П.В. Писарев, В.Ю. Зуйко, Г.С. Шипунов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 3. – С. 38–51. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.04
25. Исследование НДС и оценка прочности композитной лопатки спрямляющего аппарата авиационного двигателя / М.А. Гринев, А.Н. Аношкин, П.В. Писарев, В.Ю. Зуйко, Г.С. Шипунов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 293–307. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.17
26. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 287 с.
27. Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роценс К.А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1971. – 238 с.

References

1. Gagauz F.M. Problemy tekhnologii formirovaniia soedinitel'nykh uzlov konstruksii letatel'nykh apparatov iz kompozitsionnykh materialov [Problems of molding technology for joints of aircraft constructions made of composite materials]. *Voprosy proektirovaniia i proizvodstva konstruksii letatel'nykh apparatov. Sbornik nauchnykh trudov. KhAI*, 2012, № 4 (72), pp. 15-20.
2. Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.Sh., Sandratskii V.L. Osnovy konstruirovaniia aviatsionnykh dvigatelei i energeticheskikh ustanovok, Vol. 2 [Design principles of aircraft engines and power plants]. *Moscow, Mashinostroenie*, 2008. – 368 p.
3. Lozitskii L.P. et al. Konstruksiia i prochnost' aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigatelei [The design and strength of aircraft gas turbine engines]. *Moscow, Vozdushnyi transport*, 1992.
4. Anoshkin A.N., Zuiko V.Yu., Shipunov G.S., Tretyakov A.A. Tekhnologii i zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov dlia sozdaniia lopatki spriamliaiushchego apparata aviatsionnogo dvigatel'ia [Technologies and problems of composite materials mechanics for production of outlet guide vane for aircraft jet engine]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, No. 4, pp. 5-44. doi:10.15593/perm.mech/2014.4.01.
5. Bottega W.J., Maewal A. Delamination buckling and growth in laminates. *Journal Applied Mechanics*, 1983, vol. 50, no. 1, pp. 184–189. DOI:10.1115/1.3166988.
6. Chai H., Babcock C.D., Knauss W.G. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling. *International Journal of Solids and Structures*, 1981, vol. 27, no. 11., pp. 1069–1083. DOI:10.1016/0020-7683(81)90014-7.

7. Mikulik Z., Kelly D.W., Prusty B.G., Thomson R.S. Prediction of flange debonding in composite stiffened panels using an analytical crack tip element-based methodology. *Composite Structures*, 2008, vol. 85, no. 3, pp. 233–244. DOI:10.1016/j.compstruct.2007.10.027.
8. Berezin A.V., Kozinkina A.I., Osobennosti diagnostiki povrezhdeniy i otsenki prochnosti kompozita [Features of damages diagnostics and assessment of composites strength]. *Journal on composite mechanics and design*, 1999, no.1, pp. 99-122
9. Na W.J., Ahn H.C., Park K.M., Kang H.M., Yu W.R. In-situ damage monitoring of textile composites using x-ray computed tomography. *ECCM15: 15th European conference on composite materials – Venice, Italy*, 2012.
10. Swygenhoven H., Petegem S. In-situ mechanical testing during X-ray diffraction. *Materials Characterization*, 2013, vol. 78, pp. 47–59. DOI: 10.1016/j.matchar.2012.12.010.
11. Nishino T., Hirokane D., Nakamae K. X-ray diffraction studies of the environmental deterioration of a transversely loaded carbon-fibre-reinforced composite. *Composites Science and Technology*, 2001, vol. 61, no. 16, pp. 2455–2459, DOI: 10.1016/S0266-3538(01)00174-9.
12. Kalbermatten T.De, Jäggi R., FLüeler P., Kausch H.H., Davies P. Microfocus radiography studies during model interlaminar fracture tests on composites. *Journal of Materials Science Letters*, 1992, vol. 11, no. 9, pp. 543–546.
13. Withers P. J., Preuss M. Fatigue and Damage in Structural Materials Studied by X-Ray Tomography. *Annual Reviews*, 2012, vol. 42, pp. 81-103. DOI: 10.1146/annurev-matsci-070511-15511.
14. Kljuev V.V. Rentgenotekhnika: spravochnik [X-ray engineering: handbook]. *Moscow: Mashinostroenie*, 1980. Book 2. 383 p.
15. Rumyantsev S.V. Radiacionnaya defektoskopiya [X-ray flaw detection]. *Moscow Atomizdat*, 1974, 500 p.
16. Artemev B.V., Bukley A.A. Radiatsionnyy kontrol [Radioactive control]. *Moscow: Spektr*, 2013. 192 p.
17. Brault R., Germaneau A., Dupré C., Doumalin P., Mistou S., Fazzini M., In-situ Analysis of Laminated Composite Materials by X-ray Micro-Computed Tomography and Digital Volume Correlation. *Experimental Mechanics*, 2013, vol. 53, no. 7, pp. 1143–1151 DOI: 10.1007/s11340-013-9730-9.
18. Potrakhov N.N. Metod i osobennosti formirovaniya tenevogo rentgenovskogo izobrazheniya mikrofokusnymi istochnikami izlucheniya [The method and peculiarities of the forming shadow X-ray image by microfocus radiation sources]. *Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy*, 2007, vol. 14, no. 3, pp. 167-169.
19. Potrakhov N.N., Zhamova K.K., Bessonov V.B., Gryaznov A.Yu., Obodovskiy A.V. Tekhnologiya operativnogo rentgenovskogo kontrolya izdelij iz polimernykh kompozitsionnykh materialov [Technology of operative x-ray inspection of products from polymeric composite materials]. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2015, no. 4, pp. 97–115. DOI: 10.15593/2224-9982/2015.43.08.
20. Blinov N.N., Leonov B.I. (ed.). Rentgenovskie diagnosticheskie apparaty [X-ray diagnostic units]. *Moscow: Ekran*, vol. 1, 2001, p. 220.
21. Ivanov S.A., Shhukin G.A. Rentgenovskie trubki tehničeskogo naznachenija [X-ray tubes for technical purpose]. *Leningrad: Energoatomizdat*, 1989, p. 200.
22. Anoshkin A.N., Tashkinov A.A. Prognozirovaniye nesushchey sposobnosti kompozitnykh flantsev korpusnykh detaley aviadvigatelay [Prediction of carrying capacity of composite flanges for the aircraft engine casing parts]. *Perm, PSTU*, 1998, 101 p.
23. Lukina N.F. Kleevye prepregi na osnove tkanei Porcher–perspektivnye materialy dlia detalei i agregatov iz PKM [Adhesive prepregs base dontissue Porcher–perspective materials for parts and units out of polymeric composite materials]. *Trudy VIAM*, 2014, No.6, availableat: http://viamworks.ru/ru/articles?art_id=677 (accessed 03 November 2016) DOI: 10.18577/2307-6046-2014-0-6-10-10.
24. Grinev M.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Zuiko V.Yu., Shipunov G.S. Komp'yuternoe modelirovaniye mekhanicheskogo povedeniya kompozitnoj lopatki spryamlyayushchego apparata aviacionnogo dvigatelya [CAD/CAE modelling of mechanical behavior of composite outlet guide vane for aircraft jet engine]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 3, pp. 38-51. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.04.
25. Grinev M.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Zuiko V.Yu., Shipunov G.S. Issledovaniye NDS i ocenka prochnosti kompozitnoj lopatki spryamlyayushchego apparata aviacionnogo dvigatelya [Stress-strain analysis and strength prediction of composite outlet guide vane for aircraft jet engine]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, pp. 293–307. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.17.
26. Abovsky N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. Variatsionnye printsipy teorii uprugosti i teorii obolochek [Variational principles of the elasticity theory and the shell theory]. *Moscow, Nauka*, 1978, 287 p.
27. Skudra A.M., Bulavs F.Ia., Rotsens K.A. Polzuchest' i staticheskaia ustalost' armirovannykh plastikov [Creep and static fatigue of reinforced plastics]. *Riga, Zinatne*, 1971, 238 p.