

Астафуров С.В., Шилько Е.В., Псахье С.Г. О возможностях и ограничениях усредненного описания неупругого поведения хрупких пористых материалов в стесненных условиях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 208–232. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.12

Astafurov S.V., Shilko E.V., Psakhie S.G. The possibilities and limitations of the homogenized description of inelastic behavior of brittle porous materials under constrained conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017. No. 1. Pp. 208-232. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.12



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.12

УДК 51-71:51-74:539.411:539.412:539.42

## О ВОЗМОЖНОСТЯХ И ОГРАНИЧЕНИЯХ УСРЕДНЕННОГО ОПИСАНИЯ НЕУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ХРУПКИХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ В СТЕСНЕННЫХ УСЛОВИЯХ

С.В. Астафуров<sup>1,2</sup>, Е.В. Шилько<sup>1,2</sup>, С.Г. Псахье<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 04 декабря 2016 г.  
Принята: 25 марта 2017 г.  
Опубликована: 30 марта 2017 г.

#### Ключевые слова:

хрупкий пористый материал, неупругая деформация, полоса локализованного сдвига, катакластическое течение, разрушение, функция текучести, прочность, компьютерное моделирование, метод подвижных клеточных автоматов.

### АННОТАЦИЯ

В работе с использованием компьютерного моделирования методом подвижных клеточных автоматов проведено исследование особенностей неупругого деформирования и разрушения микроскопических областей пористых хрупких материалов в условиях неравноосного сжатия. Акцент в исследовании сделан на анализе применимости классических макроскопических критериев пластичности и прочности для интегрального описания механического отклика представительных объемов микроскопического масштаба. Проанализирована связь параметров интегрального механического отклика микроскопических областей с объемным содержанием пор, характером пространственного распределения в объеме материала и прочностными свойствами материала стенок каркаса. На примере осевого сжатия образцов в условиях постоянного бокового давления исследована стадийность процессов накопления и роста повреждений в стенках пористого каркаса и их связь с интегральным неупругим откликом. Показано, что с ростом величины бокового давления происходит смена характера разрушения пористого материала от упруго-хрупкого к неупругому, локализованному в форме полосы сдвига, и далее к объемному катакластическому. Значения характерных боковых давлений, при которых происходит смена механизма разрушения, существенным образом зависят от чувствительности прочности стенок каркаса к локальному давлению. Анализ результатов моделирования показал, что традиционные условия (критерии) пластичности, учитывающие вклад локального среднего напряжения в линейном приближении, адекватно описывают отклик микроскопических представительных объемов хрупких пористых материалов в стесненных условиях только от начала неупругого деформирования до стадии формирования системы относительно коротких не взаимодействующих трещин. Важно отметить, что разупрочнение представительных микро-

© Астафуров Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: svastafurov@gmail.com

Шилько Евгений Викторович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: shilko@ispms.tsc.ru

Псахье Сергей Григорьевич – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: sp@ispms.tsc.ru

Sergey V. Astafurov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: svastafurov@gmail.com

Evgeny V. Shilko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: shilko@ispms.tsc.ru

Sergey G. Psakhie – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: sp@ispms.tsc.ru.

объемов хрупких пористых материалов, деформируемых в стесненных условиях, связано не с потерей целостности, но с более поздними процессами формирования полос локализованного сдвига и коллапсом пор в уже фрагментированном материале. Это дает основания предполагать, что экспериментально измеряемые значения прочности стесненных образцов как максимума интегрального сопротивления могут быть существенно завышены по сравнению с истинными значениями (соответствующими фрагментации образцов). Установлено, что условия потери целостности хрупких пористых материалов в стесненных условиях адекватно описываются с использованием «линейных» критериев разрушения, параметры которых определены не из стандартных испытаний на одноосные сжатие/растяжение, но на основе тестирования образцов в стесненных условиях.

© ПНИПУ

## THE POSSIBILITIES AND LIMITATIONS OF THE HOMOGENIZED DESCRIPTION OF INELASTIC BEHAVIOR OF BRITTLE POROUS MATERIALS UNDER CONSTRAINED CONDITIONS

S.V. Astafurov<sup>1,2</sup>, E.V. Shilko<sup>1,2</sup>, S.G. Psakhie<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS, Tomsk, Russian Federation

<sup>2</sup>National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>3</sup>National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 04 December 2016  
Accepted: 25 March 2017  
Published: 30 March 2017

#### Keywords:

brittle porous solid, inelastic strain, shear band, cataclastic flow, fracture, yield surface, strength, computer modelling, movable cellular automaton method.

### ABSTRACT

The paper presents the results of studying inelastic deformation and fracture of microscopic regions of porous brittle materials under triaxial compression using the movable cellular automaton method. The study is focused on analyzing the applicability of the classical macroscopic criteria of plasticity and strength for the integral description of the mechanical response of microscopic representative volumes. We analyzed the dependence of the parameters of the integral mechanical response of the microscopic regions on the value of porosity, spatial distribution of pores and strength of the material in the skeleton walls. Main stages of the process of damage accumulation and growth in the skeleton walls and its manifestation in the integral inelastic response of the considered microscopic region are investigated by the example of the axial compression of the samples under constant lateral pressure. It is shown that the increase in the value of the lateral pressure leads to a change in the fracture type of the porous material from the elastic-brittle fracture to the formation of the shear localization zone (shear band) and then (at higher lateral pressures) to the spatially distributed cataclastic flow. The characteristic threshold values of the lateral pressure at which the failure mechanism starts to change, mostly depend on the sensitivity of the skeleton wall strength to the local pressure. The analysis of the simulation results showed that the conventional plasticity conditions (criteria) which take into account the contribution of the local average stress in the linear approximation, are able to adequately describe the response of the microscopic representative volumes of brittle porous materials under constrained conditions only from the beginning of inelastic deformation to the stage of the formation of the system of non-interacting relatively short cracks. It is important to note that the softening of the representative microvolumes of brittle porous materials under constrained conditions is concerned not with the loss of integrity of the sample, but with subsequent processes of forming the localized shear bands and pore collapse in the already fragmented material. This gives reason to believe that the experimentally determined strength of the constrained sample as the maximum resistance force may be significantly overestimated in comparison to the true value (corresponding to the fragmentation of the material). It is established that the conditions for the loss of integrity of brittle porous materials under constrained conditions are adequately described using the "linear" failure criteria with the parameters determined not by standard uniaxial compression/tension tests but by multiaxial compression tests.

© PNRPU

## Введение

Хорошо известно, что механический отклик хрупких, в том числе геологических, материалов и сред в значительной степени определяется особенностями их напряженного состояния, в том числе соотношением между объемными и девиаторными напряжениями

[1–8]. В частности, в условиях одноосного (нестесненного) сжатия такие материалы зачастую разрушаются хрупким образом путем динамического образования одной или нескольких макротрещин. В то же время при наличии сжимающих боковых напряжений, начиная с некоторой величины бокового давления, хрупкие геологические материалы могут демонстрировать неупругое поведение. При этом разрушение носит «квазивязкий» характер и связано с формированием полосы локализованного сдвига либо (при еще больших боковых напряжениях) реализацией объемного катакластического течения [2, 4, 8, 9–12]. Смена характера разрушения хрупких материалов с ростом характерной величины сжимающих объемных напряжений носит название хрупко-вязкого перехода (от английского brittle-to-ductile transition).

Смена характера разрушения в хрупких материалах связана с тем, что в отличие от металлов, в которых пластическая деформация протекает без потери сплошности материала и обусловлена формированием и перемещением дефектов атомного уровня (дислокаций, вакансий и т.д.) либо зернограничным проскальзыванием, в горных породах пластическая деформация, как правило, ассоциируется с формированием и ростом трещин микро- и мезоскопического масштаба. Здесь под пластической деформацией горных пород понимается способность претерпевать необратимые деформации без макроскопического разрушения [13]. Неупругое поведение хрупких геологических материалов объясняется вовлечением целого ряда специфических механизмов, таких как микрорастрескивание, проскальзывание по поверхностям существующих или вновь образующихся трещин, разрушение отдельных зерен или межзеренных границ раздела [2, 8, 14–16]. Функционирование таких механизмов не приводит к макроскопической потере сплошности материала до определенной (критической) степени приложенной деформации. Необходимо также отметить, что в экстремальных условиях (при высоких значениях давления и температуры, имеющих место на больших глубинах) в процесс необратимого деформирования могут вовлекаться и классические механизмы пластической деформации, связанные с движением дефектов атомного масштаба [2, 8, 12]. Поэтому далее термином «хрупкий материал» будут обозначаться материалы, интегральное неупругое поведение которых связано только с локальным разрушением зерен и межзеренных границ и не связано с пластической деформацией их кристаллических решеток. Микромасштабное моделирование таких материалов обычно осуществляется с использованием моделей упруго-хрупкого отклика. Представителями данного класса хрупких материалов являются многие горные породы (консолидированные песчаники, граниты, диориты, базальты и т.д.), а также искусственные керамические материалы (например, циркониевые керамики). Полученные в настоящей работе результаты справедливы в первую очередь для них.

Одним из ключевых факторов (наряду с давлением, многофазностью структуры, наличием границ раздела с особыми свойствами и т.д.), влияющих на способность хрупкого материала к пластическому деформированию, является его пористость [1, 9, 10, 17–20]. Так, переход от хрупкого отклика к пластическому деформированию в существенной степени связан с величиной начальной пористости и эволюцией порового пространства с ростом напряжений. Согласно [1, 8, 17] величина пористости, при которой хрупкий материал начинает демонстрировать неупругое поведение в условиях неравноосного сжатия, составляет не менее 3–5 % (в зависимости от вида материала и особенностей нагружения). Существенное влияние пористости на особенности механического отклика геологических материалов и сред во многом связано с тем, что поры являются концентраторами напряжений [21–23]. Начиная с определенной величины пористости, большое количество

таких концентраторов приводит к существенному искажению поля напряжений в объеме нагружаемого материала. В частности, в условиях интегрального сжатия образца вблизи пор могут возникать области локального растяжения [24]. Это, в свою очередь, влияет на процессы разрушения (растрескивания) межпоровых промежутков, которые во многом определяют характер неупругого деформирования горных пород.

Вопрос о смене характера разрушения от хрупкого к вязкому в пористых горных породах является актуальным для различных областей геологии и геофизики [25–29]. Ключевым направлением исследований в этой области является развитие механических моделей пластичности для описания особенностей интегрального механического отклика (включая разрушение) пористых хрупких геологических материалов и сред. Традиционным является использование моделей, в которых критерии пластичности учитывают вклады объемных и девиаторных напряжений в линейном приближении. К ним относятся, в частности, модели пластичности с критериями Кулона-Мора и Мизеса-Шлейхера. Несмотря на большую популярность таких моделей, область их применения ограничена относительно небольшими значениями сжимающих напряжений (ниже области хрупко-вязкого перехода) и пористости материала (в пределах 10–20 %). Данные ограничения связаны с тем, что в указанных моделях учитываются только эффекты дилатансии (необратимого увеличения объема) и не учитывается возможность компаксии (необратимого уменьшения объема материала вследствие обрушения пор). Расширение возможности описания макроскопического неупругого отклика хрупких пористых материалов на большие значения средних напряжений и пористости достигается добавлением в «линейный» критерий пластичности квадратичного вклада, убывающего с ростом неупругой деформации [30, 31], либо использованием функций пластичности эллиптической формы [2, 32–34], зависящих от квадратов первого и второго инвариантов тензора напряжений.

Несмотря на большое количество работ в этой области [35–39], до настоящего времени отсутствует однозначное понимание пределов применения «линейных» моделей пластичности для описания отклика пористых хрупких материалов в стесненных условиях. Схожие проблемы имеют место и с критериями разрушения, наиболее популярные из которых (Друкера-Прагера, Кулона-Мора и другие) также записываются в приближении линейной зависимости от первых двух инвариантов тензора напряжений. Важно также отметить, что в настоящее время отсутствует однозначное понимание связи различных стадий неупругого деформирования материала с эволюцией повреждений и порового пространства. В первую очередь, это относится к большим значениям сжимающих напряжений, при которых формирование полосы локализованного сдвига, фактически разделяющей образец на части, не обязательно сопровождается разупрочнением (снижением сопротивления по мере роста приложенной деформации).

Перечисленные проблемы актуальны не только для макроскопического анализа поведения хрупких пористых материалов, но в еще большей степени для адекватного описания неупругого отклика таких материалов на мезоскопическом масштабе. Представительными объемами на данном масштабе являются микроскопические фрагменты материала, содержащие достаточно большое количество микропор. Поэтому данная работа посвящена изучению особенностей неупругого деформирования и разрушения микроскопических образцов пористых хрупких материалов, находящихся в стесненных условиях. Исследование выполнено на основе компьютерного моделирования методом подвижных клеточных автоматов (ПКА) [40–42], являющимся представителем семейства методов дискретных элементов [43–45].

## 1. Постановка задачи

Исследование особенностей неупругого отклика хрупких пористых материалов проводилось путем численного моделирования одноосного сжатия двумерных микромасштабных образцов квадратной формы, находящихся в условиях бокового сжатия с постоянной приложенной силой. На рис. 1 приведен пример структуры и схема нагружения такого образца. Использовалась двухстадийная схема нагружения образца. На первой стадии моделируемый образец подвергался боковому обжатию с постоянной силой  $F_x$ . При этом верхняя и нижняя поверхности образца были фиксированы. После задания исходного напряженного состояния моделировалось одноосное сжатие образца с малой постоянной скоростью  $V_y$  (величина боковой нагрузки  $F_x$  при этом оставалась постоянной). Задача решалась в приближении плосконапряженного состояния, в рамках которого представлена на рис. 1 схема отвечает случаю двухосного нагружения. Выбор данного приближения связан с тем, что в двумерной постановке задачи плосконапряженное состояние обеспечивает условие постоянства величины осевых напряжений в плоскости,

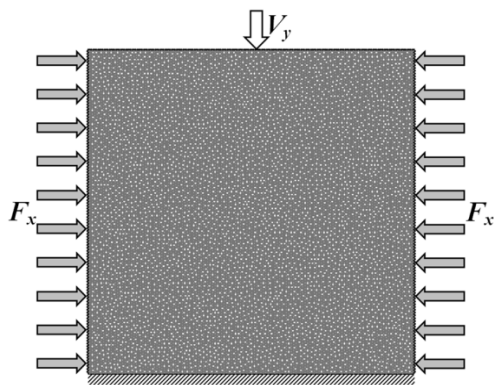


Рис. 1. Типичная структура и схема нагружения микромасштабного образца модельного пористого материала  
 Fig. 1. The typical structure and the loading scheme of the microscopic sample of the model porous material

перпендикулярной оси нагружения (в данном случае – в плоскости  $XZ$ ). Поскольку проводимый в работе анализ включал оценку величин параметров «линейных» критериев пластичности и прочности, записываемых в терминах инвариантов тензора напряжений, двухосное нагружение при постоянном боковом давлении является одним из способов получения таких оценок наряду с широко применяемым трехосным нагружением (имитируемым в двумерной постановке приближением плоскодеформированного состояния). При этом для проверки влияния особенностей напряженного состояния на получаемые результаты проводились и контрольные расчеты в приближении плоской деформации.

В работе рассматривались образцы с двумя различными значениями исходной пористости  $\nu_{pore}$ : 5 и 10 %. Данный выбор обусловлен тем, что пористость 5 % близка к нижнему пределу значений пористости, начиная с которых, согласно некоторым экспериментальным данным для песчаников, образцы демонстрируют макроскопически неупругое поведение уже при достаточно небольших сжимающих боковых нагрузках. Величина 10 % близка к значениям пористости, начиная с которых во многих горных породах эффекты коллапса пор начинают играть заметную роль в неупругом поведении материала уже при боковых нагрузках, близких к величине прочности образцов в условиях нестесненного одноосного сжатия [17, 18, 46]. Поры полагались имеющими круглую форму и одинаковый диаметр  $D_{pore}$  и задавались путем удаления отдельных автоматов (дискретных элементов).

Важным фактором, влияющим на механический отклик пористого материала, является не только объемное содержание пор, но и характер их пространственного распределения в объеме материала. Так, на рис. 2 приведены примеры внутренней структуры мо-

дельного материала с одинаковым объемным содержанием пор ( $\nu_{pore} = 10\%$ ). Можно видеть, что на рис. 2, а поры (круглые белые области в образце) достаточно равномерно распределены в объеме материала. В то же время структура, приведенная на рис. 2, б, характеризуется наличием «кластеров» с высоким локальным содержанием пор и относительно большими областями беспористого материала. В дальнейшем структуры, подобные приведенной на рис. 2, а, будем называть «некластеризованной» структурой порового пространства, а на рис. 2, б – «кластеризованной» структурой.

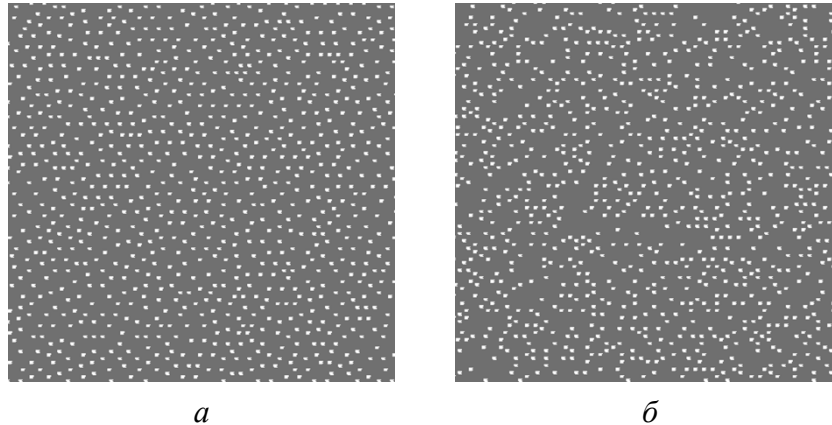


Рис. 2. Фрагменты образцов пористых материалов, характеризующихся некластеризованной (а) и кластеризованной (б) структурами порового пространства. Объемное содержание пор  $\nu_{pore} = 10\%$  в обоих случаях  
 Fig. 2. Fragments of the samples of porous materials characterized by the non-clustered (a) and clustered (b) structure of the pore space.  
 The same porosity  $\nu_{pore} = 10\%$  is in both examples

На рис. 3 показаны примеры парных корреляционных функций распределения пор в объеме материала для пар образцов с «некластеризованной» (сплошная линия) и «кластеризованной» (пунктирная линия) структурой порового пространства при  $\nu_{pore} = 10\%$ . Отметим, что данные распределения характеризуют плотность вероятности нахождения одной поры на расстоянии  $d_p$  от другой поры. На рисунке параметр  $d_p$  приведен в безразмерных единицах, полученных нормированием абсолютного расстояния на величину диаметра пор  $D_{pore}$ . Анализ распределений, приведенных на рис. 3, б, позволяет сделать вывод, что «кластеризованная» структура порового пространства характеризуется наличием двух ярко выраженных и приблизительно равных по амплитуде пиков. Это говорит о том, что для такой структуры порового пространства существует два характерных расстояния между порами. При этом «некластеризованная» структура характеризуется одним основным пиком (другими словами, для нее характерно одно доминирующее расстояние между порами). Наличие «кластеризованной» структуры порового пространства приводит к тому, что в образце существует большое количество относительно низкопрочных областей (поровых кластеров).

Материал стенок пористого каркаса полагался изотропным и упруго-хрупким. При моделировании механического отклика стенок каркаса ансамблем подвижных клеточных автоматов использовались следующие упрощения. Подвижный клеточный автомат полагался изотропным и линейно-упругим (то есть не учитывалась возможность неупругого деформирования автомата за счет возможного наличия пор, внутренних границ раздела

и неоднородностей структуры меньших масштабов). Для описания отклика такого автомата использовалась развитая авторами модель многочастичного взаимодействия подвижных клеточных автоматов, обеспечивающая их изотропный линейно-упругий отклик [40–42]. В качестве входных параметров данной модели используются упругие константы моделируемого материала (в данном случае – материала стенок каркаса). В настоящей работе использовались следующие величины упругих констант, близкие к свойствам практически беспористого песчаника [47, 48]: модуль Юнга  $E = 82$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,12$ .

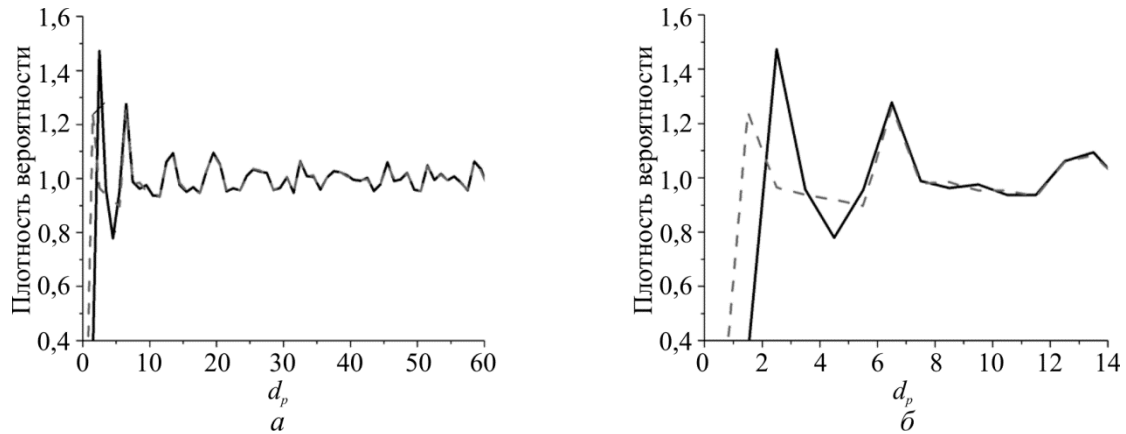


Рис. 3. Парные корреляционные функции распределения пор при  $\nu_{pore} = 10\%$ .

На рисунке (б) показан увеличенный фрагмент функций в интервале  $d_p \in [0, 14]$

— — некластеризованная структура; - - - кластеризованная структура

Fig. 3. Pair correlation functions between the centers of pores ( $\nu_{pore} = 10\%$ ).

Figure (b) shows enlarged curves within the interval  $d_p \in [0, 14]$

В рамках изложенной модели неупругое деформирование стенок каркаса (и определяемые этим эффекты неупругого поведения всего образца) связано с формированием и «функционированием» повреждений и трещин, протяженность которых равна или превышает размер подвижного клеточного автомата. Возможность формирования таких несплошностей в методах дискретных элементов реализуется через переключение состояния пары взаимодействующих элементов из связанного (химически связанные пары, оказывающие сопротивление относительно сжатию/растяжению и сдвиговому деформированию) в несвязанное (автоматы моделируют независимые фрагменты материала, между которыми возможно только контактное взаимодействие) [40–42, 44]. Условием переключения является выполнение некоторого критерия разрушения. В качестве такого критерия в работе использован широко применяемый для хрупких низкопористых материалов критерий разрушения Друкера-Прагера [49, 50]:

$$\xi \sigma_{mean} + \sigma_{eq} / \sqrt{3} = \kappa, \quad (1)$$

где  $\sigma_{eq}$  и  $\sigma_{mean}$  – локальные значения интенсивностей напряжений и средних напряжений;  $\xi$  и  $\kappa$  – материальные константы. Эти константы могут быть выражены, в частности, через пределы прочности материала в условиях одноосного сжатия ( $\sigma_c$ ) и растяжения ( $\sigma_t$ ):  $\xi = \sqrt{3} (\sigma_c - \sigma_t) / (\sigma_c + \sigma_t)$ ,  $\kappa = 2\sigma_c \sigma_t / \sqrt{3} (\sigma_c + \sigma_t)$ . В настоящей работе условие (1) используется в качестве критерия переключения состояния пары автоматов в следующей формулировке:

$$1,5(a-1)\sigma_{mean} + 0,5(a+1)\sigma_{eq} = \sigma_c, \quad (2)$$

где  $a = \sigma_c / \sigma_t$  – отношение прочности пары автоматов на сжатие к прочности на растяжение;  $\sigma_{eq}$  и  $\sigma_{mean}$  – значения интенсивности напряжений и среднего напряжения на поверхности взаимодействия автоматов. Детали реализации критерия в рамках метода подвижных клеточных автоматов приведены в работах [40–42].

Хорошо известно, что отношение прочностей на сжатие и растяжение образцов хрупких материалов зависит не только от концентрации, но и от линейных размеров несплошностей. Увеличение характерной протяженности исходных несплошностей, как правило, сопровождается сильным падением прочности на растяжение  $\sigma_t$  при существенно меньшем снижении прочности на сжатие, что приводит к возрастанию величины параметра  $a$ . В работе рассматривались два значения параметра  $a$ :  $a = 3$  и  $a = 1$  (в обоих случаях  $\sigma_c = 190$  МПа). Оба выбранных значения отвечают достаточно однородной и консолидированной структуре стенок каркаса, не содержащих значительные несплошности (для большинства макроскопических образцов горных пород характерные значения параметра  $a$  составляют более 3). При этом  $a = 1$  можно рассматривать как предельный случай, отвечающий «идеальной» или «совершенной» внутренней структуре материала стенок каркаса, обеспечивающей их равную прочность на сжатие и растяжение.

## 2. Закономерности разрушения хрупких пористых материалов в стесненных условиях

Результаты моделирования показали, что в условиях нестесненного (при  $F_x = 0$ ) одноосного сжатия или растяжения модельные микромасштабные образцы демонстрируют линейно-упругий отклик вплоть до разрушения. Разрушение таких образцов происходит путем динамического роста трещины. При этом наличие выраженной кластерной структуры порового пространства не приводит к изменению величины упругих констант и характера отклика, однако оказывает существенное влияние на значение прочности образца. В частности, как видно из рис. 4, наличие кластеризованной структуры порового пространства приводит к снижению прочности на сжатие модельных образцов до 1,5 раз. Это является следствием того, что области повышенной концентрации пор в процессе нагружения становятся локальными концентраторами сдвиговых напряжений [51].

В табл. 1 приведены полученные численно значения прочности на сжатие ( $\sigma_c^{sample}$ ) и отношения прочностей на сжатие и растяжение ( $a_{sample}$ ) для модельных образцов с «кластеризованной» и «некластеризованной» поровой структурой (каждое значение усреднено по трем образцам со статистически равнозначным распределением пор). Можно видеть,

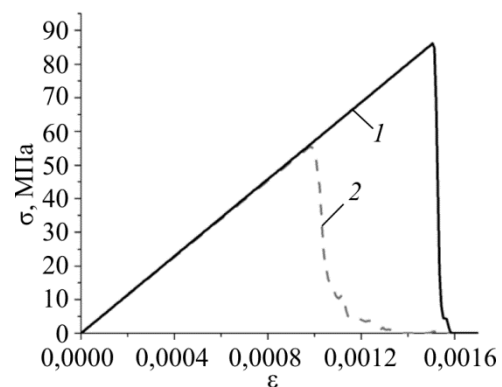


Рис. 4. Диаграммы одноосного сжатия образцов с «некластеризованной» (1) и «кластеризованной» (2) поровой структурами ( $\nu_{pore} = 10\%$ ,  $a = 3$ )

Fig. 4. Diagrams of uniaxial compression of the samples with “non-clustered” (1) and “clustered” (2) structure of pore space ( $\nu_{pore} = 10\%$ ,  $a = 3$ )



что с ростом пористости различие в значениях прочности для образцов с «кластеризованной» и «некластеризованной» поровой структурой возрастает в несколько раз. При этом отношение прочностей (величина  $a_{sample}$ ) для образцов с различными характеристиками пространственного распределения пор и величины пористости различается значительно слабее. Полученные результаты свидетельствуют о том, что влияние характера пространственного распределения пор может оказывать даже более существенное влияние на прочность хрупких материалов в нестесненных условиях, нежели абсолютная величина пористости.

Таблица 1

Параметры критерия прочности для модельных микромасштабных образцов, определенные на основе моделирования одноосного сжатия/растяжения

Table 1

Parameters of fracture criterion determined on the basis of numerical modeling of uniaxial compression/tension of the model microscopic samples

	$\nu_{pore} = 5\%$	$\nu_{pore} = 10\%$
Кластеризованная структура	$a_{sample} = 2,57$ $\sigma_c^{sample} = 100,5$ МПа	$a_{sample} = 2,62$ $\sigma_c^{sample} = 55,4$ МПа
Некластеризованная структура	$a_{sample} = 2,75$ $\sigma_c^{sample} = 109,2$ МПа	$a_{sample} = 2,88$ $\sigma_c^{sample} = 86,1$ МПа

По мере увеличения степени стеснения образцов, характеризуемой величиной приложенной боковой нагрузки  $F_x$ , в процессе одноосного сжатия образцы начинают демонстрировать интегральное неупругое поведение. Далее для удобства величина приложенной боковой нагрузки будет характеризоваться удельным значением  $\sigma_{lat}$ , называемым боковым давлением и равным отношению  $F_x$  к площади боковой поверхности образца. На рис. 5 показаны типичные диаграммы одноосного сжатия модельных образцов в стесненных условиях, полученные при использовании различных значений параметров критерия разрушения (2) стенок каркаса. Из рисунка видно, что при низких степенях стеснения (при  $\sigma_{lat}$  меньше некоторого порогового значения бокового давления  $\sigma_{thr}$ ) образцы деформируются упруго (кривые 1 и 2 на рис. 5). При  $\sigma_{lat} > \sigma_{thr}$  имеет место смена характера деформирования пористого материала от упруго-хрупкого к упругопластическому. При этом с ростом  $\sigma_{lat}$  возрастают как предел упругости, так и протяженность необратимой части диаграммы нагружения (кривые 3–6 на рис. 5). Неупругая деформация образцов связана с формированием повреждений, соединяющих соседние поры, объединением этих повреждений в небольшие трещины и в конечном счете с образованием магистральной трещины либо полосы локализованного сдвига, представляющей собой сильно фрагментированную полосу материала с низким сопротивлением сдвигу. Отметим, что конкретное значение  $\sigma_{thr}$  является убывающей функцией пористости материала и степени его кластеризации. Величина  $\sigma_{thr}$  также убывает с уменьшением величины параметра  $a$  в критерии 2, то есть с увеличением степени «совершенства» материала стенок пористого каркаса. Для рассмотренных в работе случаев характерные значения  $\sigma_{thr}$  находились в интервале 30–80 МПа, что близко к соответствующим значениям для пористых песчаников [2, 8].

При высоких боковых давлениях  $\sigma_{lat}$  (как правило, более 100–120 МПа) отдельные повреждения в образцах возникают уже на стадии задания начального напряженного со-

стояния. Не только прочностные, но и упругие свойства таких поврежденных образцов могут заметно отличаться от соответствующих характеристик неповрежденных образцов. Поэтому при дальнейшем анализе особенностей деформации и разрушения рассматриваются только те значения боковых давлений, при которых формирования повреждений на стадии предварительного нагружения образцов не происходит.

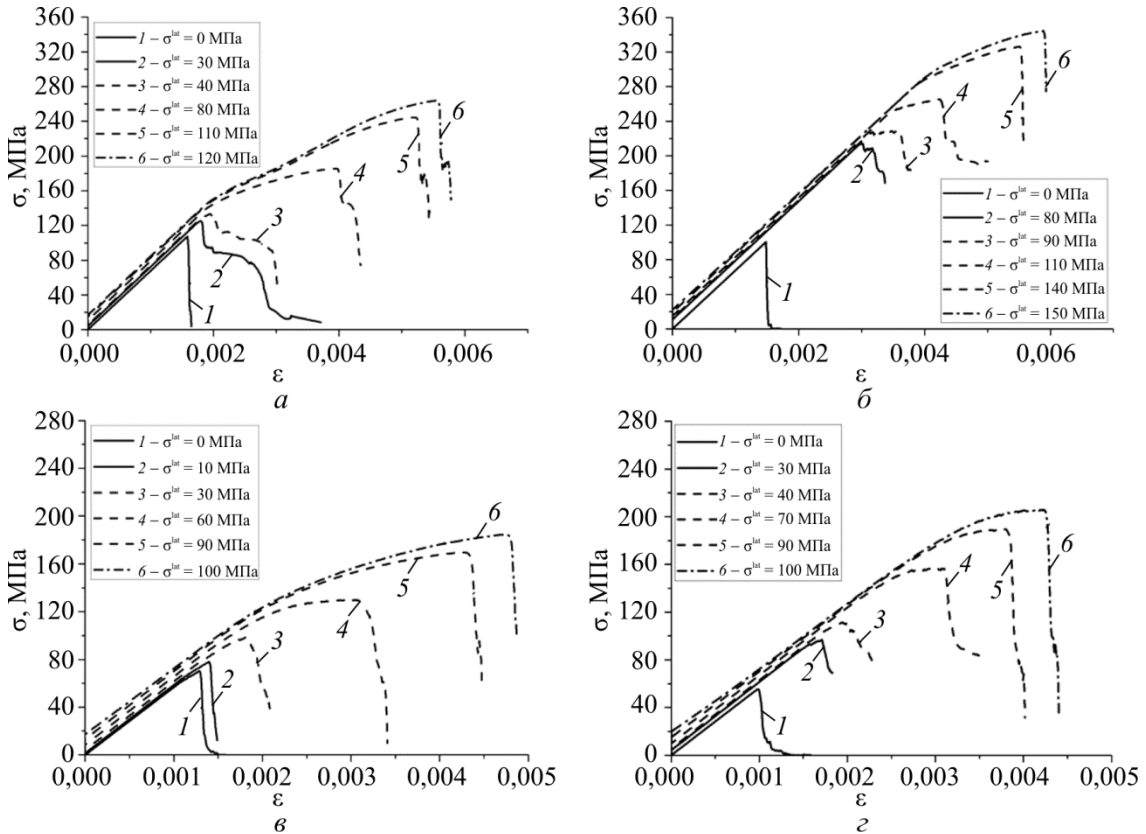


Рис. 5. Диаграммы нагружения модельных образцов с кластеризованной структурой порового пространства: (а)  $v_{pore} = 5\%$ ,  $a = 1$ ; (б)  $v_{pore} = 5\%$ ,  $a = 3$ ; (в)  $v_{pore} = 10\%$ ,  $a = 1$ ; (г)  $v_{pore} = 10\%$ ,  $a = 3$

Fig. 5. Loading diagrams for model samples with the clustered structure of pore space: (a)  $v_{pore} = 5\%$ ,  $a = 1$ ; (b)  $v_{pore} = 5\%$ ,  $a = 3$ ; (c)  $v_{pore} = 10\%$ ,  $a = 1$ ; (d)  $v_{pore} = 10\%$ ,  $a = 3$

Детальный анализ процессов деформирования и разрушения образцов в стесненных условиях показал, что характер их механического отклика (в том числе характер локализации деформации) определяется стадийностью процессов накопления и объединения повреждений. При этом стадийность накопления повреждений напрямую зависит от величины бокового давления и параметров прочности стенок пористого каркаса (характеризуемых величиной безразмерного параметра  $a$  в критерии (2)).

Как отмечалось выше, при низких значениях бокового давления  $\sigma_{lat}$  (ниже порогового значения  $\sigma_{thr}$ ) разрушение образцов имеет динамический характер и происходит путем формирования одной или нескольких магистральных трещин (рис. 6). Отметим, что разрушению образцов в таких условиях не предшествует продолжительная стадия накопления повреждений, и соответствующие диаграммы нагружения являются линейными (кривые 1 и 2 на рис. 4). Описанные закономерности являются общими для образцов с различными значениями параметров прочности стенок каркаса (характеризуемыми величиной параметра  $a$  и различным характером пространственного распределения пор.

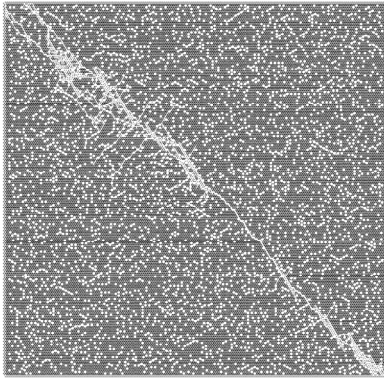


Рис. 6. Пример разрушения пористого ( $v_{pore} = 10\%$ ) образца при  $\sigma_{lat} = 10$  МПа ( $a = 1$ )  
 Fig. 6. Typical fracture pattern of the porous ( $v_{pore} = 10\%$ ) sample at  $\sigma_{lat} = 10$  МПа ( $a = 1$ )

хрупкого материала. На первой стадии формируются относительно равномерно распределенные в объеме образца «микротрещины» (трещины, соединяющие две-три соседние микропоры, рис. 7, а). При этом диаграмма нагружения начинает отклоняться от линейной зависимости. На второй стадии, помимо появления новых «микротрещин», происходит удлинение и объединение ранее сформированных (рис. 7, б). На последней стадии некоторые из них объединяются в полосу локализованного сдвига, представляющую собой узкую зону дробления материала почти до гранулированного состояния и разделяющую образец на две части (рис. 7, в). На диаграммах нагружения формирование полосы локализованного сдвига соответствует стадии разупрочнения (падения сопротивления сжатию) моделируемого стесненного образца. Отметим, что увеличение бокового давления сопровождается ростом концентрации и размера формирующихся «микротрещин», а также увеличением ширины полосы локализованного сдвига. При очень высоких боковых давлениях, в несколько раз превышающих  $\sigma_{thr}$ , формирование и последующее объединение большого количества «микротрещин» может приводить к фрагментации образца (его разделению на систему контактирующих блоков) еще до формирования полосы локализованного сдвига (рис. 8). Характерный размер таких блоков уменьшается с увеличением бокового давления, а также начальной пористости материала. Но, несмотря на фрагментацию, во всех случаях начало разупрочнения образцов (снижения сопротивления сжатию) соответствует формированию полосы локализованного сдвига.

В случае если стенки каркаса состоят из материала, прочность которого не зависит от величины локального среднего напряжения ( $a = 1$ ), разрушение образцов при  $\sigma_{lat} > \sigma_{thr}$  в целом сходно с описанным выше (при  $a = 3$ ). Однако при очень высоких значениях  $\sigma_{lat}$  локализации деформаций в форме полосы сдвига не происходит, и разрушение образцов носит пространственно распределенный характер. Здесь на первых стадиях неупругого деформирования происходит формирование и объединение «микротрещин», приводящее к фрагментации материала (рис. 9, а). Дальнейшее деформирование сопровождается дроблением фрагментов и переходом пористого материала в состояние, близкое к гранулированному (рис. 9, б). Таким образом, хрупкие пористые среды, стенки которых сложены «совершенным» материалом (прочность которого не зависит от локального давления), при высоких степенях стеснения демонстрируют катакластический характер разрушения

С ростом бокового давления ( $\sigma_{lat} > \sigma_{thr}$ ) разрушение образцов происходит в несколько стадий и имеет «квазивязкий» характер. В этой области боковых давлений неупругое поведение образцов при сжатии в значительной степени определяется степенью влияния локального среднего напряжения  $\sigma_{mean}$  на прочность стенок каркаса (данное влияние характеризуется величиной параметра  $a$  в критерии (2)).

Так, при  $a = 3$  (влияние локального среднего напряжения  $\sigma_{mean}$  на прочность стенок каркаса в (2) является значительным и преобладает над влиянием локальной интенсивности напряжений  $\sigma_{eq}$ ) можно выделить следующие стадии неупругого деформирования

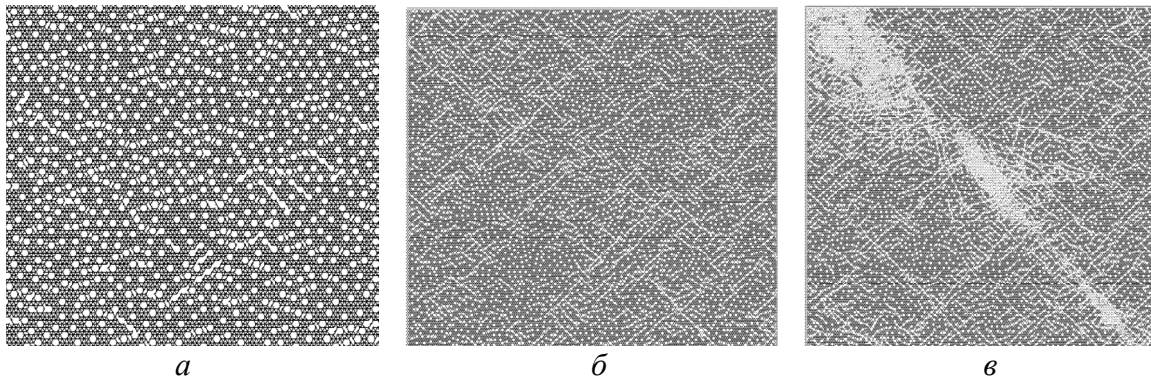


Рис. 7. Пример эволюции разрушения пористого ( $\nu_{pore} = 10\%$ ) образца при  $\sigma^{lat} = 90$  МПа ( $a = 3$ ). На рисунке (а) показан увеличенный фрагмент образца  
 Fig. 7. Typical development of fracture porous ( $\nu_{pore} = 10\%$ ) sample at  $\sigma^{lat} = 90$  МПа ( $a = 3$ ).  
 Figure (a) shows enlarged fragment of the sample

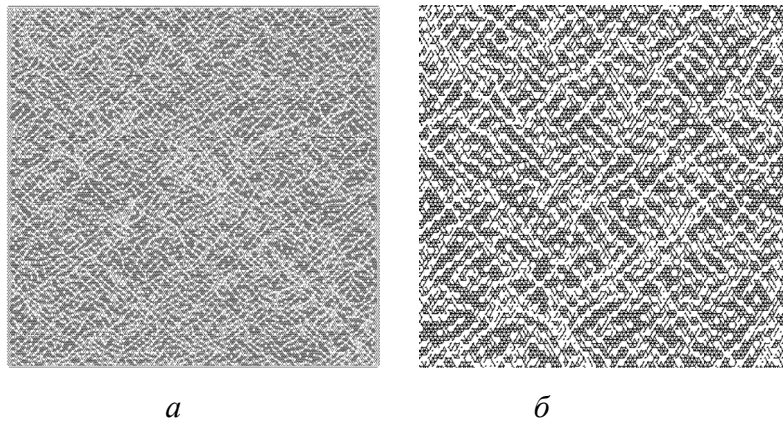


Рис. 8. Пример фрагментации пористого ( $\nu_{pore} = 10\%$ ) образца при  $\sigma^{lat} = 150$  МПа ( $a = 3$ ). На рисунке (б) показан увеличенный фрагмент образца, представленного на рисунке (а)  
 Fig. 8. Fragmentation of the porous ( $\nu_{pore} = 10\%$ ) sample at  $\sigma^{lat} = 150$  МПа ( $a = 3$ ).  
 Figure (b) shows the enlarged fragment of the sample shown in figure (a)

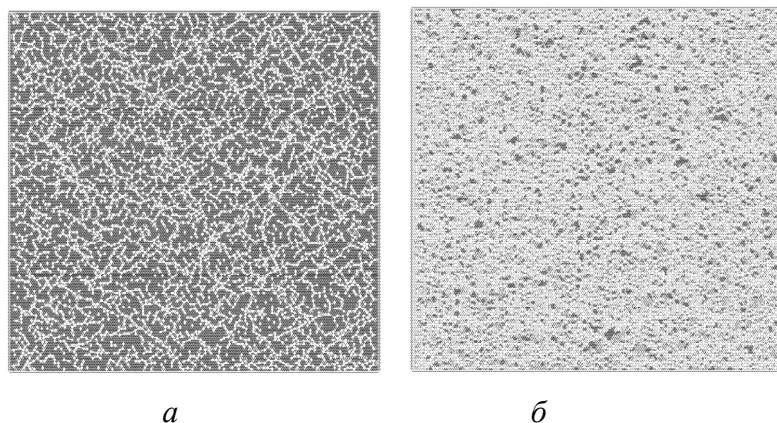


Рис. 9. Стадии разрушения модельных образцов ( $\nu_{pore} = 10\%$ ) с «совершенным» материалом ( $a = 1$ ) каркаса при  $\sigma^{lat} = 120$  МПа: (а) стадия фрагментации; (б) гранулированное состояние  
 Fig. 9. Stages of crushing the model samples ( $\nu_{pore} = 10\%$ ) with the “perfect” material of the skeleton ( $a = 1$ ) at  $\sigma^{lat} = 120$  МПа: (a) fragmented structure; (b) granular structure

(в отличие от материалов с «несовершенным» материалом каркаса). Указанные особенности характера разрушения определяют значительно более протяженную стадию неупругого деформирования образцов, слагаемых «совершенным» материалом (см. рис. 5, *a*, *b*) в сравнении с образцами, в которых стенки каркаса состоят из «несовершенного» материала (см. рис. 5, *b*, *c*).

Отметим, что, в отличие от прочностных параметров материала стенок каркаса, изменение степени кластеризации поровой структуры не изменяет стадийности и характера неупругого деформирования и разрушения образцов. Более того, при  $\sigma_{lat} > \sigma_{thr}$  различие в величинах прочности «кластеризованных» и «некластеризованных» образцов выражено значительно слабее, чем в области хрупкого поведения (при  $\sigma_{lat} < \sigma_{thr}$ ). На рис. 10 приведены типичные диаграммы осевого сжатия стесненных образцов, характеризующихся различным пространственным распределением пор и различными значениями параметра  $a$  в критерии разрушения (2). Можно видеть, что различия в величине прочности образцов с кластеризованной и некластеризованной поровой структурой при высоких значениях  $\sigma_{lat}$  составляют менее 10% (при  $\sigma_{lat} < \sigma_{thr}$  эти различия достигали 30–35 процентов, рис. 4). Также отметим, что образцы, в которых стенки каркаса состоят из материала с прочностью, не зависящей от давления ( $a = 1$ ), имеют меньшую прочность и значительно более высокую пластичность в сравнении с образцами из материала, прочность которого существенно зависит от локального давления ( $a = 3$ ).

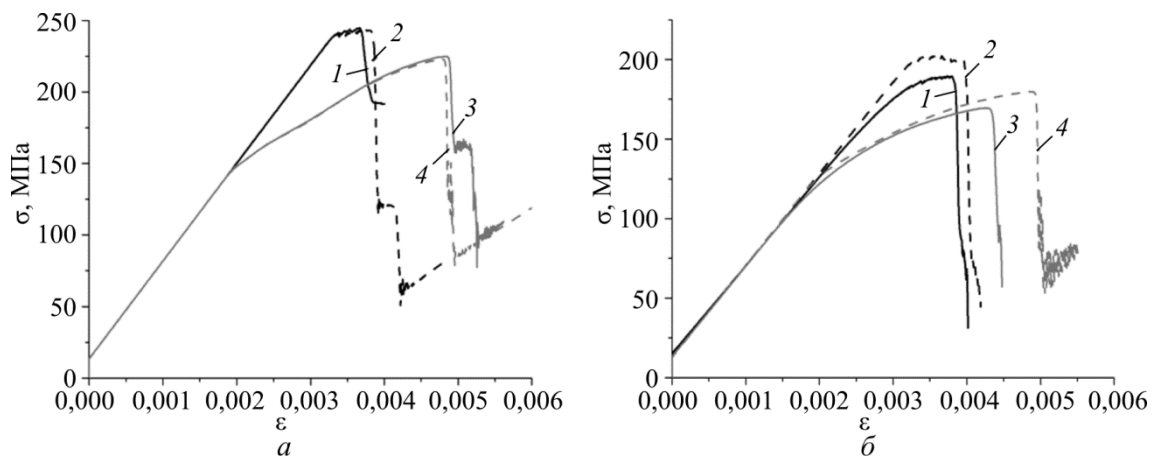


Рис. 10. Диаграммы осевого сжатия образцов, характеризующихся различным пространственным распределением пор и дефектностью стенок каркаса: (а)  $v_{pore} = 5\%$ ,  $\sigma_{lat} = 100$  МПа; (б)  $v_{pore} = 10\%$ ,  $\sigma_{lat} = 90$  МПа; 1 – кластеризованная структура,  $a = 3$ ; 2 – некластеризованная структура,  $a = 3$ ; 3 – кластеризованная структура,  $a = 1$ ; 4 – некластеризованная структура,  $a = 1$

Fig. 10. The axial compression diagrams for the samples with different types of spatial distribution of pores and different imperfections of the skeleton material: (a)  $v_{pore} = 5\%$ ,  $\sigma_{lat} = 100$  МПа; (b)  $v_{pore} = 10\%$ ,  $\sigma_{lat} = 90$  МПа. The Fig. shows the clustered pores,  $a = 3$  (1); non-clustered pores,  $a = 3$  (2); clustered pores,  $a = 1$  (3); non-clustered pores,  $a = 1$  (4)

Основной причиной данного различия является тот факт, что стенки каркаса между соседними близлежащими порами являются областями концентрации не только сдвиговых, но и объемных (средних) напряжений. Абсолютная величина средних напряжений в этих областях может на несколько десятков процентов превышать характерное значение в областях стенок каркаса вдали от поверхностей пор (причем сами значения средних напряжений являются отрицательными, то есть сжимающими). Это приводит к тому, что

в «чувствительных» к локальному давлению материалах (характеризуемых  $a > 1$ ) формирование повреждений в таких областях происходит при больших значениях приложенной нагрузки и деформации, чем в материалах, «нечувствительных» к локальному давлению ( $a = 1$ ). Сказанное объясняет и увеличение различия в величине прочности и предельной деформации между образцами из таких материалов с увеличением пористости образцов (см. рис. 10). Действительно, с ростом пористости характерное расстояние между пора́ми снижается, то есть возрастает доля областей каркаса, являющихся концентраторами сдвиговых и сжимающих объемных напряжений.

### 3. Возможности использования условия Мизеса-Шлейхера для описания неупругой деформации и разрушения хрупких пористых материалов

Общепринятым подходом к анализу и обобщению результатов экспериментальных и численных исследований неупругого поведения хрупких материалов является изучение возможности интегрального описания такого поведения с использованием критериев и моделей пластичности и прочности. Одним из широко используемых в моделях пластичности горных пород условий наступления неупругого отклика является условие Мизеса-Шлейхера

$$\beta \sigma_{mean} + \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} = Y, \quad (3)$$

где  $\beta$  – коэффициент внутреннего трения,  $Y$  – напряжение, при котором наступает предельное состояние в условиях чистого сдвига (сцепление);  $\sigma_{mean}$  и  $\sigma_{eq}$  – среднее напряжение и интенсивность напряжений соответственно. В случае материала с упрочнением величина  $Y$  является не константой, но возрастающей функцией накопленной неупругой деформации или другого параметра, характеризующего поврежденность материала [5, 10, 30, 31]. Считается, что условие (3) является применимым для хрупких материалов с относительно небольшой пористостью при значениях среднего напряжения ниже порога хрупко-вязкого перехода. В настоящей работе проанализирована возможность описания полученных численно кривых стесненного сжатия при различных величинах бокового давления  $\sigma_{lat}$  соотношением (3) с одними и теми же значениями коэффициента внутреннего трения и сцепления.

Для проведения такого анализа необходимо найти два неизвестных ( $\beta$  и  $Y$ ) в соотношении (3) путем аппроксимации этим соотношением результатов компьютерного моделирования. В работе использовался следующий способ получения такой аппроксимации. Определялись величины предела упругости моделируемых образцов на сжатие при различных значениях бокового давления ( $\sigma_{lat}$ ). Для каждого такого образца в точке начала неупругой стадии деформирования были определены конкретные значения  $\sigma_{mean}$  и  $\sigma_{eq}$ . Они вычислялись через интегральные значения компонентов тензора напряжений в образце, которые находились как отношения силы реакции образца в соответствующем направлении к площади соответствующей внешней поверхности. Полученные при разных  $\sigma_{lat}$  пары значений ( $\sigma_{mean}$ ,  $\sigma_{eq}$ ) в точке отклонения диаграмм нагружения от линейной зависимости подставлялись в критерий (3). При этом подбиралось такое значение  $\beta$ , чтобы величина  $\sigma_{MS}$  принимала одинаковое значение при всех  $\sigma_{lat}$  (данное значение  $\sigma_{MS}$  равно  $Y$ ). В случае если такого значения коэффициента  $\beta$  не существует, критерий Мизеса-Шлейхера не является условием начала неупругого поведения моделируемого хрупкого материала в стесненных условиях.

Анализ результатов компьютерного моделирования для рассматриваемых модельных пористых материалов показал, что для каждого из них такое значение  $\beta$  существует (табл. 2). Определяющее влияние на величину  $\beta$  имеют прочностные свойства материала стенок пористого каркаса (характеризуемые параметром  $a$ ), в то время как пористость материала (в рассматриваемом интервале значений) и характер пространственного распределения пор имеют несущественное значение. Таким образом, возможность определения параметра  $\beta$  с использованием предлагаемого алгоритма говорит об адекватности критерия Мизеса-Шлейхера как условия начала неупругой деформации пористых материалов в стесненных условиях нагружения.

Таблица 2

Значения коэффициента внутреннего трения ( $\beta$ )  
для рассматриваемых модельных образцов

Table 2

Coefficients of internal friction ( $\beta$ ) for the considered model samples

	$V_{pore} = 5\%$		$V_{pore} = 10\%$	
	Кластеризованная структура	Некластеризованная структура	Кластеризованная структура	Некластеризованная структура
$a = 3$	0,76	0,785	0,73	0,71
$a = 1$	0,345	0,355	0,52	0,465

В предположении независимости величины  $\beta$  от степени поврежденности материала можно, подставив полученное значение  $\beta$  в (3), не только определить величину сцепления, но и получить закон деформационного упрочнения. В работе [41] предлагалось в качестве деформационного параметра, характеризующего поврежденность системы, использовать параметр  $\varepsilon_{MS} = \varepsilon_{eq} / \sqrt{3} + \varepsilon_{mean} K\beta/3G$  ( $K$  и  $G$  – модули всестороннего сжатия и сдвига соответственно,  $\varepsilon_{eq}$  и  $\varepsilon_{mean}$  – интенсивность полных деформаций и средняя полная деформация соответственно). При этом закон деформационного упрочнения сводится к зависимости  $Y(\varepsilon_{MS})$ .

На рис. 11 представлены примеры полученных зависимостей  $Y(\varepsilon_{MS})$ , построенные для различных значений бокового давления  $\sigma_{lat}$  в образцах с разной пористостью и разным характером пространственного распределения пор в объеме материала в случае отсутствия зависимости прочности материала стенок каркаса от давления ( $a = 1$ ). Можно видеть, что неупругая деформация одного и того же образца при различных значениях  $\sigma_{lat}$  начинается при одинаковом значении  $\varepsilon_{MS}$ . Кривые  $Y(\varepsilon_{MS})$  характеризуются двумя основными участками. На первом (до некоторого критического значения  $\varepsilon_{MS}^{tr} \approx 0,00056$  для  $v_{pore} = 5\%$  и  $\varepsilon_{MS}^{tr} \approx 0,00043$  для  $v_{pore} = 10\%$ , данные значения отмечены на рис. 11 вертикальными пунктирными линиями) они имеют характер, близкий к линейному, и совпадают. Это свидетельствует о том, что на данном участке коэффициент внутреннего трения материала действительно является постоянным, и предложенная форма записи «единой кривой упрочнения» в виде зависимости  $Y(\varepsilon_{MS})$  является корректной. При  $\varepsilon_{MS} > \varepsilon_{MS}^{tr}$  кривые  $Y(\varepsilon_{MS})$  становятся существенно нелинейными и расходятся.

Такие особенности поведения кривых  $Y(\varepsilon_{MS})$  для образцов, величина прочности стенок каркаса которых не зависит от давления ( $a = 1$ ), определяются тем, что начало стадии неупругого деформирования пористого материала связано с формированием отдельных повреждений, которые постепенно объединяются в небольшие трещины (это имеет место на линейном участке данных кривых). При  $\varepsilon_{MS} > \varepsilon_{MS}^{tr}$  сформировавшиеся повреждения и мелкие трещины объединяются в систему взаимно пересекающихся более протяженных трещин, и материал теряет целостность (то есть фактически представляет собой ансамбль контактирующих блоков). Неупругое поведение образца на участке  $\varepsilon_{MS} > \varepsilon_{MS}^{tr}$  связано с измельчением блоков и их относительно малыми по амплитуде сдвиговыми перемещениями. Таким образом, участок расхождения кривых  $Y(\varepsilon_{MS})$  фактически отвечает деформированию не целостного, но уже разрушенного (то есть разделенного на части) образца, хотя формально сопротивление сжатию такой системы продолжает возрастать. Начало интегрального разупрочнения связано с формированием в блочной среде магистральной полосы локализованного сдвига, а снижение интегрального сопротивления сжатию объясняется локализованным сдвигом по этой полосе, сопровождающимся коллапсом пор.

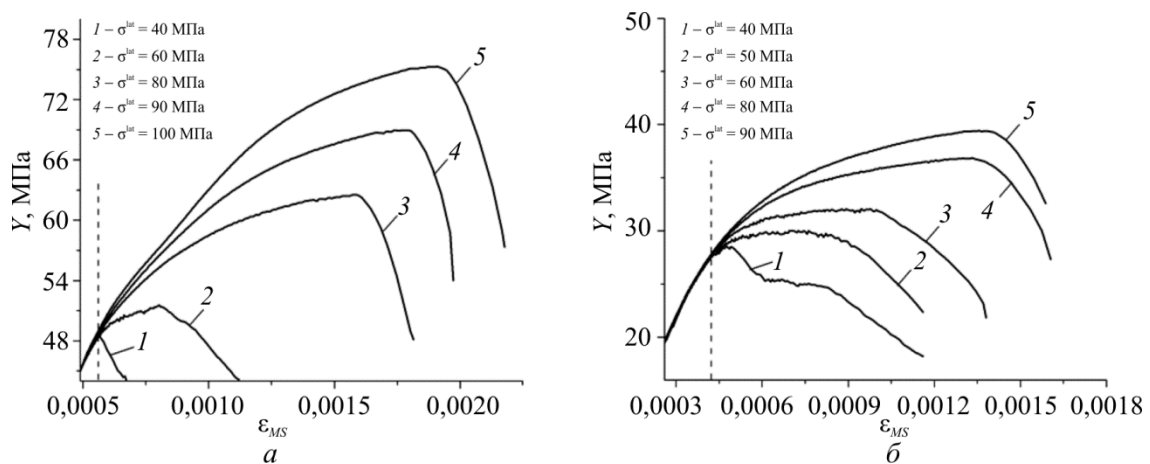


Рис. 11. Примеры зависимостей  $Y(\varepsilon_{MS})$ , полученные для модельных образцов с кластеризованной структурой порового пространства, прочность стенок каркаса которых не зависит от величины локального давления ( $a = 1$ ): (а)  $v_{pore} = 5\%$ ; (б)  $v_{pore} = 10\%$

Fig. 11. Diagrams  $Y(\varepsilon_{MS})$  for the model samples that are characterized by the clustered structure of the pore space and pressure which is insensitive to the strength of the skeleton walls ( $a = 1$ ):  $v_{pore} = 5\%$  (a);  $v_{pore} = 10\%$  (b)

Необходимо отметить, что в случае материала стенок каркаса, прочность которого чувствительна к величине давления ( $a = 3$ ), зависимости  $Y(\varepsilon_{MS})$  имеют вид, отличный от представленного на рис. 11. На рис. 12 приведены примеры таких зависимостей для образцов с разной исходной пористостью. Можно видеть, что хотя кривые  $Y(\varepsilon_{MS})$  имеют общий линейный участок на начальной стадии неупругого деформирования, в отличие от случая с  $a = 1$ , они расходятся не из одной точки. Анализ динамики накопления повреждений показал, что отклонение зависимостей  $Y(\varepsilon_{MS})$  от единой кривой упрочнения связано не с разделением образца на фрагменты, но с более ранней стадией деградации,



а именно с началом формирования относительно протяженных внутренних трещин (длиной до 10–15 характерных расстояний между порами). При этом образец еще не является фрагментированным. Фрагментация образца (с которой ассоциируется разрушение) происходит при больших значениях  $\varepsilon_{MS}$ .

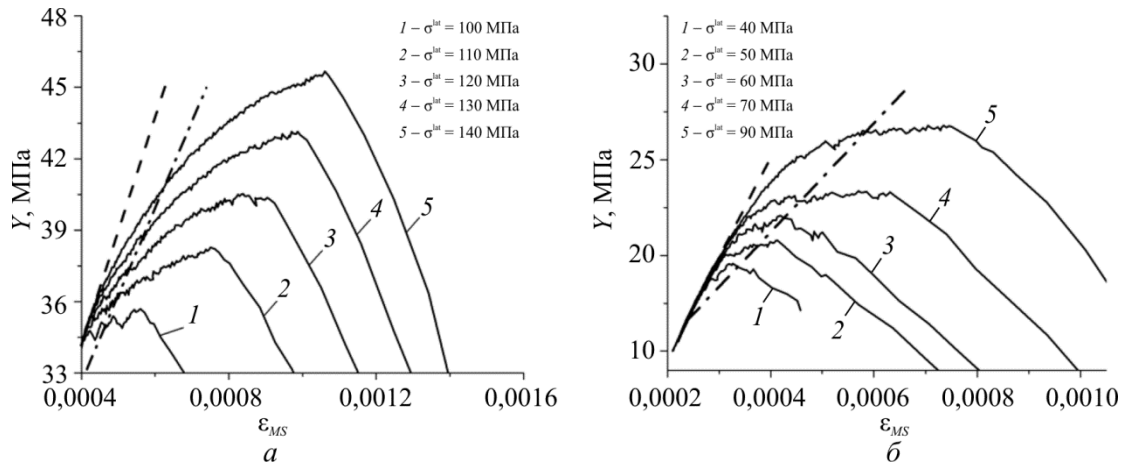


Рис. 12. Примеры зависимостей  $Y(\varepsilon_{MS})$ , полученные для модельных образцов с кластеризованной структурой порового пространства, прочность стенок каркаса которых чувствительна к величине локального давления ( $a = 3$ ): (а)  $v_{pore} = 5\%$ ; (б)  $v_{pore} = 10\%$ . Штриховые линии показывают наклон общего для различных кривых начального участка неупругого деформирования. Штрихпунктирные линии соединяют критические значения  $Y$  при различных  $\sigma_{lat}$

Fig. 12. Diagrams  $Y(\varepsilon_{MS})$  for the model samples that are characterized by the clustered structure of the pore space and pressure which is sensitive to the strength of skeleton walls ( $a = 3$ ):  $v_{pore} = 5\%$  (a);  $v_{pore} = 10\%$  (b). Dashed lines show the common slope of the initial inelastic segment of all curves. Dash-dotted lines connect the critical values of  $Y$  at different  $\sigma_{lat}$

Важно отметить, что для каждого «семейства» кривых  $Y(\varepsilon_{MS})$  все значения  $Y$ , соответствующие моменту потери целостности образца, то есть разделению его на систему блоков (фрагментов), лежат на одной прямой. Здесь термин «семейство» кривых означает набор зависимостей  $Y(\varepsilon_{MS})$ , полученных при разных боковых давлениях  $\sigma_{lat}$ , но одинаковых значениях пористости и однотипном характере пространственного распределения пор. Далее критические значения  $Y$ , ассоциируемые с моментом разрушения (то есть с потерей целостности образца), будем обозначать символом  $Y_c$ .

Анализ результатов моделирования показал, что критическое значение сцепления ( $Y_c$ ) является линейной функцией величины среднего напряжения в образце в момент потери его целостности ( $\sigma_{mean}^c$ ). Это говорит о том, что в качестве условия разрушения (разделения на фрагменты) микромасштабных областей хрупких пористых материалов в стесненных условиях может использоваться «линейный» критерий Друкера-Прагера. Для моделируемых в работе микромасштабных областей, подвергнутых осевому сжатию в стесненных условиях, были определены значения констант этого критерия (назовем их  $a'_{sample}$  и  $\sigma_c^{sample}$ ), записанного в форме (2). Они приведены в табл. 3. Сравнение этих значений с аналогичными значениями ( $a_{sample}$  и  $\sigma_c^{sample}$ ), определенными в результате моделирования одноосного сжатия и растяжения нестесненных модельных образцов (см.

табл. 1), показывает, что величины параметров критерия прочности Друкера-Прагера, полученные на основе результатов испытаний нестесненных и стесненных образцов, существенно различаются. Так, для всех рассмотренных случаев  $a'_{sample} > a_{sample}$ , а  $\sigma_c^{'sample} < \sigma_c^{sample}$ . Наиболее «драматическим» является отличие параметров  $\sigma_c^{sample}$  и  $\sigma_c^{'sample}$  для образцов с низкой пористостью (в данном случае с  $\nu_{pore} = 5\%$ ), которое может достигать двукратной величины. С ростом пористости разница между значениями соответствующих параметров для нестесненных и стесненных образцов уменьшается.

Таблица 3

Параметры критерия прочности для модельных образцов, определенные на основе моделирования стесненного сжатия/растяжения

Table 3

Parameters of the fracture criterion determined on the basis of numerical modeling of the constrained compression/tension of the model samples

	$\nu_{pore} = 5\%$	$\nu_{pore} = 10\%$
Кластеризованная структура	$a'_{sample} = 3,27$ $\sigma_c^{'sample} = 60,5$ МПа	$a'_{sample} = 3,17$ $\sigma_c^{'sample} = 36,7$ МПа
Некластеризованная структура	$a'_{sample} = 3,38$ $\sigma_c^{'sample} = 52,8$ МПа	$a'_{sample} = 2,95$ $\sigma_c^{'sample} = 61,3$ МПа

Приведенные в табл. 2–3 значения параметров условия пластичности Мизеса-Шлейхера и критерия прочности Друкера-Прагера получены в условиях двухосного сжатия. Для проверки влияния вида напряженного состояния на интегральные характеристики неупругого отклика микромасштабных областей хрупких пористых материалов проводились контрольные расчеты, аналогичные описанным выше, в приближении плоскодеформированного состояния. Полученные оценки значений сцепления, внутреннего трения и параметров критерия прочности (2) в приближении плоской деформации были близки к оценкам, полученным в плосконапряженном приближении. Это подтверждают сделанные выше выводы об условиях применимости классических «линейных» критериев пластичности и прочности для описания условий наступления предельного состояния хрупких пористых материалов на микромасштабном уровне.

Отметим, что, несмотря на распространенное применение классического критерия Друкера-Прагера [49], во многих экспериментальных исследованиях указывается на его ограниченные возможности предсказывать наступление разрушения хрупких материалов (в том числе низкопористых) в условиях трехосного неравноосного нагружения [50, 52–54]. В качестве основной причины этого называется чрезмерная чувствительность критерия к промежуточному главному напряжению, что приводит к переоценке величины прочности. Как отмечается в [50, 52–54], наибольшие ошибки в оценке прочности имеют место при больших различиях величин промежуточного и минимального главных напряжений. Приведенные результаты моделирования показывают, что критерий Друкера-Прагера является адекватным критерием для оценки значений прочности низкопористых хрупких материалов как минимум в отрицательном интервале величин главных напряже-

ний (например, при неравноосном сжатии). При этом возможной причиной неудовлетворительных результатов применения критерия для описания экспериментально определенных значений прочности является использование параметров критерия (1), полученных из испытаний нестесненных или слабостесненных образцов. Действительно, приведенные в табл. 1 и 3 данные свидетельствуют о существенном различии параметров критерия разрушения Друкера-Прагера, полученных из испытаний на сжатие при высоких боковых напряжениях и испытаний на одноосное сжатие/растяжение. Это является естественным следствием описанного в данной работе качественного различия характера отклика образцов при низких и высоких степенях стеснения. Другой возможной причиной расхождения экспериментальных значений прочности и их оценок с помощью классического критерия Друкера-Прагера является определенный произвол в определении момента разрушения образцов при трехосном сжатии.

## **Заключение**

Интерпретация и обобщение результатов экспериментального исследования поведения хрупких пористых материалов в стесненных условиях являются ключевыми проблемами не только геомеханики, но и в целом механики разрушения. К факторам, определяющим неупругое поведение таких материалов, традиционно относят структурные (дисперсия и пространственное распределение пор), материальные (прочностные характеристики материала стенок пор) и механические (характерные значения внешнего давления). Экспериментальный анализ индивидуальных вкладов данных факторов является достаточно затрудненным. Поэтому в настоящей работе такой анализ был проведен с использованием результатов численного моделирования осевого сжатия модельных пористых образцов при различных значениях бокового давления. При проведении данного анализа рассматриваемый интервал значений бокового давления был ограничен областью ниже порога хрупко-вязкого перехода (так называемой областью хрупкого разрушения).

Результаты моделирования показали, в частности, что в стесненных условиях, обеспечивающих неупругое поведение пористых материалов при осевом сжатии, максимальное сопротивление сжатию не связано с фактическим разрушением образца (определяемым как его фрагментация, то есть разделение на систему контактирующих или слабо связанных блоков). Переход от упрочнения к разупрочнению стесненного образца происходит позднее фактического разрушения образца и связан с формированием в блочной среде полосы локализованного сдвига и её компакцией в процессе относительного сдвигового перемещения разделяемых данной полосой частей образца. Полученные результаты дают основания предполагать, что значения прочности и предельной деформации стесненных макроскопических пористых образцов, определяемые в эксперименте как максимальное сопротивление сжатию, могут являться существенно завышенными в сравнении с истинными значениями.

Проведенный анализ возможности построения единой кривой упрочнения, описывающей неупругое деформирование образцов при различных значениях боковой нагрузки, показал, что использование для этих целей функций текучести с линейной зависимостью от величины первого и второго инвариантов тензора напряжений является ограниченным. В частности, рассмотренное в настоящей работе условие пластичности Мизеса-Шлейхера может корректно применяться только для описания начального участка неупругого деформирования хрупких материалов (до стадии формирования внутренних трещин протя-

женностью до 10–15 характерных межпоровых расстояний). Для определения границы этого участка необходимо проведение нескольких экспериментов при различных степенях стеснения образцов. Более полное описание неупругого деформирования пористых хрупких материалов вплоть до стадии фрагментации или начала разупрочнения, очевидно, должно осуществляться с использованием нелинейных (например, эллиптических) функций текучести.

Результаты моделирования также свидетельствуют о том, что при проведении макрокопического описания пористых хрупких материалов в стесненных условиях необходимо с осторожностью использовать в качестве входных параметров значения прочности образцов, полученные в стандартных испытаниях на одноосное сжатие, растяжение и/или чистый сдвиг. В частности, на примере критерия Друкера-Прагера показано, что определяемые таким образом константы применяемого критерия разрушения могут до двух раз отличаться от реально соответствующих функционированию материала в стесненных условиях. Для получения адекватных значений констант необходимо осуществление специальных тестов в условиях, близких к тем, в которых будет изучаться поведение пористого материала или среды.

При переносе полученных в работе результатов на реальные системы следует принимать во внимание следующие важные ограничения модели. В настоящей работе рассмотрена идеализированная структура хрупкого пористого материала. В частности, не учитывались дисперсия пор (например, наличие в распределении нескольких максимумов различного масштаба), исходные несплошности плоскостного типа в стенках каркаса и межзеренные границы со свойствами, отличными от свойств зерен. Более того, размеры моделируемого образца соответствуют микроскопическому объему реального материала, что не позволяет учитывать неоднородности и дефекты более высоких масштабов. Такие неоднородности и дефекты способны оказывать определяющее влияние на локализацию деформаций в макрокопических образцах, в том числе способствовать формированию полос локализованной деформации при достаточно низкой степени общей поврежденности и отсутствии макрокопической фрагментации. Поэтому представленные закономерности в первую очередь характеризуют поведение микроскопических представительных объемов пористых материалов. Тем не менее полученные результаты представляются важными для углубления понимания общих закономерностей неупругой деформации и разрушения хрупких пористых материалов в условиях действия сжимающих объемных напряжений.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы.

### **Библиографический список**

1. Brace W.F. Volume changes during fracture and frictional sliding: a review // *Pure Appl. Geophys.* – 1978. – Vol. 116. – P. 603–614.
2. Wong T.-f., David C., Zhu W. The transition from brittle faulting to cataclastic flow in porous sandstones // *J. Geophys. Res.* – 1997. – Vol. 102. – P. 3009–3025.
3. Baud P., Vajdova V., Wong T.-f. Shear-enhanced compaction and strain localization: mechanical data and constitutive parameters for porous sandstones // *J. Geophys. Res.* – 2006. – Vol. 111. – P. B12401-1–B12401-17.

4. Influence of grain size and geothermal gradient on the ductile-to-brittle transition in arenaceous sedimentary rocks: implications for fault structure and fluid flow / Q.J. Fisher, S.D. Harris, M. Casey, R.J. Knipe // Geological Society, London, Special Publications. – 2007. – Vol. 289. – P. 105–121.

5. Стефанов Ю.П. Численное моделирование деформирования и разрушения горных пород на примере расчета поведения образцов песчаника // ФТПРПИ. – 2008. – № 1. – С. 73–83.

6. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Модель хрупкого разрушения пористых материалов при сжатии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. – 2009. – № 17. – С. 47–57.

7. Deformation bands in porous carbonate grainstones: field and laboratory observations / A. Cilona, P. Baud, E. Tondi, F. Agosta, S. Vinciguerra, A. Rustichelli, C.J. Spiers // J. Struct. Geol. – 2012. – Vol. 45. – P. 137–157.

8. Wong T.-f., Baud P. The brittle-ductile transition in porous rock: A review // J. Struct. Geol. – 2012. – Vol. 44. – P. 25–53.

9. Rutter E.H., Glover C.T. The deformation of porous sandstones; are Byerlee friction and the critical state line equivalent? // J. Struct. Geol. – 2012. – Vol. 44. – P. 129–140.

10. Стефанов Ю.П. Моделирование поведения консолидированных и высокопористых геологических сред в условиях сжатия // Вестник Перм. гос. техн. ун-та. – 2007. – № 15. – С. 156–169.

11. Jaeger C. Rock Mechanics and Engineering. – Cambridge University Press, 2009. – 523 p.

12. Николаевский В.Н. Собрание трудов. Геомеханика. Т. 3. Землетрясения и эволюция коры. Скважины и деформации пласта. Газоконденсат / НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. – М.–Ижевск, 2012. – 644 с.

13. Paterson M.S., Wong T.-f. Experimental rock deformation – the brittle field. – Springer-Verlag, New York, 2005. – 347 p.

14. Frank F.C. On dilatancy in relation to seismic sources // Rev. Geophys. – 1965. – Vol. 3. – P. 485–503.

15. Brace W.F., Paulding B.W. Jr., Scholz C. Dilatancy in the fracture of crystalline rocks // J. Geophys. Res. – 1966. – Vol. 71. – P. 3939–3956.

16. Nur A. A note on the constitutive law of dilatancy // Pure Appl. Geophys. – 1975. – Vol. 113. – P. 197–206.

17. Baud P., Schubnel A., Wong T.-f. Dilatancy, compaction and failure mode in Solnhofen limestone // J. Geophys. Res. – 2000. – Vol. 105. – P. 19289–19303.

18. Vajdova V., Baud P., Wong T.-f. Compaction, dilatancy and failure in porous carbonate rocks // J. Geophys. Res. – 2004. – Vol. 109. – P. B05204-1–B05204-16.

19. 3D simulation of dependence of mechanical properties of porous ceramics on porosity / A.Yu. Smolin, N.V. Roman, Ig.S. Konovalenko, G.M. Eremina, S.P. Buyakova, S.G. Psakhie // Eng. Fract. Mech. – 2014. – Vol. 130. – P. 53–64.

20. Давыдова М.М., Уваров С.В., Наймарк О.Б. Пространственно-временная масштабная инвариантность при динамической фрагментации квазихрупких материалов // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 100–107.

21. Sammis C.G., Ashby M.F. The failure of brittle porous solids under compressive stress states // Acta. Metall. – 1986. – Vol. 34. – P. 511–526.

22. Ashby M.F., Sammis C.G. The damage mechanics of brittle solids in compression // Pure Appl. Geophys. – 1990. – Vol. 133. – P. 489–521.

23. Tsukrov I, Kachanov M. Stress concentrations and microfracturing patterns in a brittle elastic solid with interacting pores of diverse shapes // Int. J. Solids Struct. – 1997. – Vol. 34. – P. 2887–2904.

24. Романова В.А., Балохонов Р.Р. 3D-анализ напряженного состояния пористой керамики на основе диоксида циркония на начальной стадии сжатия // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 63–67.

25. Shipton Z.K., Cowie P.A. Damage zone and slip-surface evolution over mkm to km scales in high-porosity Navajo sandstone, Utah // J. Struct. Geol. – 2001. – Vol. 23. – P. 1825–1844.

26. Makowitz A., Milliken K.L. Quantification of brittle deformation in burial compaction. Frio and Mount Simon Formation sandstones // *J. Sediment. Res.* – 2003. – Vol. 73. – P. 1007–1021.
27. The impact of constitutive modeling of porous rocks on 2-D wellbore stability analysis / L. Coelho, A.C. Soares, N.F.F. Ebecken, J.L. Drummond Alves, L. Landau // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2005. – Vol. 46. – P. 81–100.
28. Sheldon H.A., Barnicoat A.C., Ord A. Numerical modelling of faulting and fluid flow in porous rocks: an approach based on critical state soil mechanics // *J. Struct. Geol.* – 2006. – Vol. 28. – P. 1468–1482.
29. Yarushina V., Podladchikov Y. Low-frequency attenuation due to pore-scale inelasticity // *Geophysics.* – 2010. – Vol. 75. – P. 51–63.
30. Стефанов Ю.П. Некоторые особенности численного моделирования поведения упруго-хрупкопластических материалов // *Физическая мезомеханика.* – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 129–142.
31. Нелинейная механика геоматериалов и геосред / П.В. Макаров [и др.] / отв. ред. Л.Б. Зуев. – Новосибирск: Гео, 2007. – 235 с.
32. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material model for granular soils // *J. Eng. Mech. ASCE.* – 1971. – Vol. 97. – P. 935–950.
33. Carroll M.M. A critical state plasticity theory for porous reservoir rock. In: M. Massoudi, K.R. Rajagopal (Eds.), *Recent Advances in Mechanics of Structured Continua.* – ASME AMD, 1993. – Vol. 117. – P. 1–5.
34. Стефанов Ю.П. Методы численного моделирования деформации и разрушения в геомеханике // *Современная тектонофизика. Методы и результаты. Школа-2015: материалы четвертой молодежной тектонофизической школы-семинара.* – 2015. – Т. 2. – С. 77–103.
35. Rudnicki J.W., Rice J.R. Condition for localization of plastic deformation in pressure sensitive dilatant materials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1975. – Vol. 23. – P. 371–390.
36. Замышляев Б.В., Евтерев Л.С. Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. – М.: Наука, 1990. – 215 с.
37. Hazzard J.F., Young R.P., Maxwell S.C. Micromechanical modeling of cracking and failure in brittle rocks // *J. Geophys. Res.* – 2000. – Vol. 105. – P. 16683–16697.
38. Grueschow E., Rudnicki J.W. Elliptic yield cap constitutive modeling for high porosity sandstone // *Int. J. Solids Struct.* – 2005. – Vol. 42. – P. 4574–4587.
39. Dynamics of inelastic deformation of porous rocks and formation of localized compaction zones studied by numerical modeling / Y.P. Stefanov, M.A. Chertov, G.R. Aidagulov, A.V. Myasnikov // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2011. – Vol. 59. – P. 2323–2340.
40. Развитие подхода к моделированию деформирования и разрушения иерархически организованных гетерогенных, в том числе контрастных, сред / С.Г. Псахье [и др.] // *Физическая мезомеханика.* – 2011. – Т. 14, № 3. – С. 27–54.
41. A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials / S.G. Psakhie, E.V. Shilko, A.S. Grigoriev, S.V. Astafurov, A.V. Dimaki, A.Yu. Smolin // *Eng. Fract. Mech.* – 2014. – Vol. 130. – P. 96–115.
42. Overcoming the limitations of distinct element method for multiscale modeling of materials with multimodal internal structure / E.V. Shilko, S.G. Psakhie, S. Schmauder, V.L. Popov, S.V. Astafurov, A.Yu. Smolin // *Comp. Mater. Sci.* – 2015. – Vol. 102. – P. 267–285.
43. Mustoe G.G.W. A generalized formulation of the discrete element method // *Eng. Computation.* – 1992. – Vol. 9. – P. 181–190.
44. Potyondy D.O., Cundall P.A. A bonded-particle model for rock // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* – 2004. – Vol. 41. – P. 1329–1364.
45. Jing L., Stephansson O. *Fundamentals of discrete element method for rock engineering: theory and applications.* – Elsevier, 2007. – 562 p.
46. Micromechanics of inelastic compaction in two allochemical limestones / V. Vajdova, P. Baud, L. Wu, T.-f. Wong // *J. Struct. Geol.* – 2012. – Vol. 43. – P. 100–117.

47. Detournay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*. Vol. II. Analysis and Design Method / ed. C. Fairhurst. – Pergamon Press, 1993. – P. 113–171.

48. Labuz J.F., Dai S.-T., Papamichos E. Plane-strain compression of rock-like materials // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* – 1996. – Vol. 33. – P. 573–584.

49. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // *Механика. Новое в зарубежной науке*. Вып. 2. Определяющие законы механики грунтов. – М.: Мир, 1975. – С. 166–177.

50. Alejano L.R., Bobet A. Drucker-Prager criterion // *Rock. Mech. Rock Engrg.* – 2012. – Vol. 45. – P. 995–999.

51. Sevostianov I., Kushch V. Effect of pore distribution on the statistics of peak stress and overall properties of porous material // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – Vol. 46. – P. 4419–4429.

52. Zhang L., Cao P., Radha K.C. Evaluation of rock strength criteria for wellbore stability analysis // *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.* – 2010. – Vol. 47. – P. 1304–1316.

53. Al-Ajmi A.M., Zimmerman R.W. Stability analysis of vertical boreholes using the Mogi-Coulomb failure criterion // *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.* – 2006. – Vol. 43. – P. 1200–1211.

54. Colmenares L.B., Zoback M.D. A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks // *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.* – 2002. – Vol. 39. – P. 695–729.

## References

1. Brace W.F. Volume changes during fracture and frictional sliding: a review. *Pure Appl. Geophys.*, 1978, vol. 116, pp. 603-614.

2. Wong T.-f., David C., Zhu W. The transition from brittle faulting to cataclastic flow in porous sandstones. *J. Geophys. Res.*, 1997, vol. 102, pp. 3009-3025.

3. Baud P., Vajdova V., Wong T.-f. Shear-enhanced compaction and strain localization: mechanical data and constitutive parameters for porous sandstones. *J. Geophys. Res.*, 2006, Vol. 111, pp. B12401-1–B12401-17.

4. Fisher Q.J., Harris S.D., Casey M., Knipe R.J. Influence of grain size and geothermal gradient on the ductile-to-brittle transition in arenaceous sedimentary rocks: implications for fault structure and fluid flow. *Geological Society, London, Special Publications.*, 2007, vol. 289, pp. 105-121.

5. Stefanov Yu.P. Numerical modeling of deformation and failure of sandstone specimens. *J. Min. Sci.*, 2008, vol. 44, pp. 64-72.

6. Goldstein R.V., Osipenko N.M. Model' hрупкого razrusheniia poristih materialov pri szhatii [The model of brittle fracture of porous materials under compression]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2009, no. 17, pp. 47-57.

7. Cilona A., Baud P., Tondi E., Agosta F., Vinciguerra S., Rustichelli A., Spiers C.J. Deformation bands in porous carbonate grainstones: field and laboratory observations. *J. Struct. Geol.*, 2012, vol. 45, pp. 137-157.

8. Wong T.-f., Baud P. The brittle-ductile transition in porous rock: A review. *J. Struct. Geol.*, 2012, vol. 44, pp. 25-53.

9. Rutter E.H., Glover C.T. The deformation of porous sandstones; are Byerlee friction and the critical state line equivalent? *J. Struct. Geol.*, 2012, vol. 44, pp. 129-140.

10. Stefanov Yu.P. Modelirovanie povedeniia konsolidirovannih I visokoporistih geologicheskikh sred v usloviiah szhatii [Modeling the behavior of consolidated and high-porous geological media under the condition of compression]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2007, no. 15, pp. 156-169.

11. Jaeger C. *Rock Mechanics and Engineering*, Cambridge University Press, 2009, 523 p.

12. Nikolaevskii V.N. *Sobranie trudov. Geomekhanika. Tom 3. Zemletriaseniia I evoliutsiia kori. Skvazhini I deformatsii plasta. Gazokondensat* [Collected works. Geomechanics. Volume 3. Earthquakes and evolution of the Earth's Crust. Boreholes and strain distribution in beds. Gas Condensate]. *Moscow-Izhevsk, NIC "Reguliarnaiia I khaoticheskaiia dinamika"*, Institut komp'uternikh issledovani, 2012, 644 p.

13. Paterson M.S., Wong T.-f. Experimental rock deformation – the brittle field. *Springer-Verlag, New York*, 2005, 347 p.

14. Frank F.C. On dilatancy in relation to seismic sources. *Rev. Geophys.*, 1965, vol. 3, pp. 485-503.

15. Brace W.F., Paulding B.W. Jr., Scholz C. Dilatancy in the fracture of crystalline rocks. *J. Geophys. Res.*, 1966, vol. 71, pp. 3939-3956.

16. Nur A. A note on the constitutive law of dilatancy. *Pure Appl. Geophys.*, 1975, vol. 113, pp. 197-206.
17. Baud P., Schubnel A., Wong T.-f. Dilatancy, compaction and failure mode in Solnhofen limestone. *J. Geophys. Res.*, 2000, vol. 105, pp. 19289-19303.
18. Vajdova V., Baud P., Wong T.-f. Compaction, dilatancy and failure in porous carbonate rocks. *J. Geophys. Res.*, 2004, vol. 109, pp. B05204-1–B05204-16.
19. Smolin A.Yu., Roman N.V., Konovalenko Ig.S., Eremina G.M., Buyakova S.P., Psakhie S.G. 3D simulation of dependence of mechanical properties of porous ceramics on porosity. *Eng. Fract. Mech.*, 2014, vol. 130, pp. 53–64.
20. Davydova M.M., Uvarov S.V., Naimark O.B. Space-Time Scale Invariance under Dynamic Fragmentation of Quasi-Brittle Materials. *Phys. Mesomechanics.*, 2016, vol. 19, pp. 86-92.
21. Sammis C.G., Ashby M.F. The failure of brittle porous solids under compressive stress states. *Acta Metall.*, 1986, vol. 34, pp. 511-526.
22. Ashby M.F., Sammis C.G. The damage mechanics of brittle solids in compression. *Pure Appl. Geophys.*, 1990, vol. 133, pp. 489-521.
23. Tsukrov I, Kachanov M. Stress concentrations and microfracturing patterns in a brittle elastic solid with interacting pores of diverse shapes. *Int. J. Solids Struct.*, 1997, vol. 34, pp. 2887-2904.
24. Romanova V.A., Balokhonov R.R. 3D-analiz napriazhonnogo sostoiianiia poristoi keramiki na osnove dioksida zirkoniia na nachal'noi stadii szhatiia [3D-analysis of the stress state of porous zirconia-based ceramics at the initial stage of compression]. *Fizicheskaia Mezomekhanika – Physical Mesomechanics*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 63-67.
25. Shipton Z.K., Cowie P.A. Damage zone and slip-surface evolution over mkm to km scales in high-porosity Navajo sandstone, Utah. *J. Struct. Geol.*, 2001, vol. 23, pp. 1825-1844.
26. Makowitz A., Milliken K.L. Quantification of brittle deformation in burial compaction. Frio and Mount Simon Formation sandstones. *J. Sediment. Res.*, 2003, vol. 73, pp. 1007-1021.
27. Coelho L., Soares A.C., Ebecken N.F.F., Drummond Alves J.L., Landau L. The impact of constitutive modeling of porous rocks on 2-D wellbore stability analysis. *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2005, vol. 46, pp. 81-100.
28. Sheldon H.A., Barnicoat A.C., Ord A. Numerical modelling of faulting and fluid flow in porous rocks: an approach based on critical state soil mechanics, *J. Struct. Geol.*, 2006, vol. 28, pp. 1468-1482.
29. Yarushina V., Podladchikov Y. Low-frequency attenuation due to pore-scale inelasticity. *Geophysics.*, 2010, vol. 75, pp. 51-63.
30. Stefanov Yu.P. Nekotore osobennosti chislenogo modelirovaniia povedeniia uprugokhrupkoplachesticheskikh materialov [On some features of numerical simulation of the behavior of elastic-brittle-plastic materials]. *Fizicheskaia Mezomekhanika – Physical Mesomechanics*, 2005, vol. 8, no. 3, pp. 129-142.
31. Makarov P.V., Smolin I.Yu., Stefanov Yu.P. et al. Nelineinaia mehanika geomaterialov I geosred [Nonlinear mechanics of geological materials and media]. Novosibirsk, Akademicheskoe izdatel'stvo "Geo", 2007, 235 p.
32. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material model for granular soils. *J. Eng. Mech. ASCE.*, 1971, vol. 97, pp. 935-950.
33. Carroll M.M. A critical state plasticity theory for porous reservoir rock. In: M. Massoudi, K.R. Rajagopal (Eds.), *Recent Advances in Mechanics of Structured Continua*, ASME AMD, 1993, vol. 117, pp. 1-5.
34. Stefanov Yu.P. Metodi chislenogo modelirovaniia deformatsii i razrusheniia v geomekhanike [Method of numerical simulation of deformation and fracture in geomechanics]. *Sovremennaia tektonofizika. Metodi i rezul'tati. Shkola 2015: Materiali chetviortoi molodiozhnoi tektonofizicheskoi shkoli-seminara* (Modern tectonophysics. Methods and results. School 2015: Proceedings of the fourth youth tectonophysical school). Moscow, 2015, vol. 2, pp. 77-103.
35. Rudnicki J.W., Rice J.R. Condition for localization of plastic deformation in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1975, vol. 23, pp. 371-390.
36. Zamishlyaev B.V., Evtrev L.S. Modeli dinamicheskogo deformirovaniia i razrusheniia gruntovikh sred [Models of dynamic deformation and fracture of soils]. Moscow, *Nauka*, 1990, 215 p.
37. Hazzard J.F., Young R.P., Maxwell S.C. Micromechanical modeling of cracking and failure in brittle rocks. *J. Geophys. Res.*, 2000, vol. 105, pp. 16683-16697.
38. Grueschow E., Rudnicki J.W. Elliptic yield cap constitutive modeling for high porosity sandstone. *Int. J. Solids Struct.*, 2005, vol. 42, pp. 4574-4587.
39. Stefanov Y.P., Chertov M.A., Aidagulov G.R., Myasnikov A.V. Dynamics of inelastic deformation of porous rocks and formation of localized compaction zones studied by numerical modeling. *J. Mech. Phys. Solids.*, 2011, vol. 59, pp. 2323-2340.



40. Psakhie S.G., Shilko E.V., Smolin A.Yu., Dimaki A.V., Dmitriev A.I., Konovalenko I.S., Astafurov S.V., Zavsek S. Approach to simulation of deformation and fracture of hierarchically organized heterogeneous media, including contrast media. *Phys. Mesomechanics*, 2011, vol. 14, pp. 224-248.
41. Psakhie S.G., Shilko E.V., Grigoriev A.S., Astafurov S.V., Dimaki A.V., Smolin A.Yu. A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials. *Eng. Fract. Mech.*, 2014, vol.130, pp. 96-115.
42. Shilko E.V., Psakhie S.G., Schmauder S., Popov V.L., Astafurov S.V., Smolin A.Yu. Overcoming the limitations of distinct element method for multiscale modeling of materials with multimodal internal structure. *Comp. Mater. Sci.*, 2015, vol. 102, pp. 267-285.
43. Mustoe G.G.W. A generalized formulation of the discrete element method. *Eng. Computation.*, 1992, vol. 9, pp. 181-190.
44. Potyondy D.O., Cundall P.A. A bonded-particle model for rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2004, vol 41, pp. 1329-1364.
45. Jing L., Stephansson O. Fundamentals of discrete element method for rock engineering: theory and applications, Elsevier, 2007, 562 p.
46. Vajdova V., Baud P., Wu L., Wong T.-f. Micromechanics of inelastic compaction in two allochemical limestones. *J. Struct. Geol.*, 2012, vol. 43, pp. 100-117.
47. Detournay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects. Vol. II. Analysis and Design Method* / ed. C. Fairhurst. Pergamon Press, 1993, pp. 113-171.
48. Labuz J.F., Dai S.-T., Papamichos E. Plane-strain compression of rock-like materials. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 1996, vol. 33, pp. 573-584.
49. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Appl. Math.*, 1952, vol. 10, pp 157-165.
50. Alejano L.R., Bobet A. Drucker-Prager criterion. *Rock. Mech. Rock Engrg.*, 2012, vol. 45, pp. 995-999.
51. Sevostianov I., Kushch V. Effect of pore distribution on the statistics of peak stress and overall properties of porous material. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, pp. 4419-4429.
52. Zhang L., Cao P., Radha K.C. Evaluation of rock strength criteria for wellbore stability analysis. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 2010, vol. 47, pp. 1304-1316.
53. Al-Ajmi A.M., Zimmerman R.W. Stability analysis of vertical boreholes using the Mogi-Coulomb failure criterion. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 2006, vol. 43, pp. 1200-1211.
54. Colmenares L.B., Zoback M.D. A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 2002, vol. 39, pp. 695-729.