

Багмутов В.П., Денисевич Д.С., Захаров И.Н., Иванников А.Ю. Об учете нелинейных и связанных эффектов тепловой задачи и фазовых переходов при моделировании технологии контактного термосилового поверхностного упрочнения металлических сплавов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 233–250. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.13

Bagmutov V.P., Denisevich D.S., Zakharov I.N., Ivannikov A.Yu. Nonlinear and coupled thermal effects during finite element simulation of contact thermo-force surface hardening. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017. No.1. Pp. 233-250. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.13



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2017

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2017.1.13

УДК 539.319-539.377

## ОБ УЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И СВЯЗАННЫХ ЭФФЕКТОВ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ И ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕХНОЛОГИИ КОНТАКТНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО ПОВЕРХНОСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ

**В.П. Багмутов, Д.С. Денисевич, И.Н. Захаров, А.Ю. Иванников**

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 28 января 2017 г.  
Принята: 25 марта 2017 г.  
Опубликована: 30 марта 2017 г.

#### Ключевые слова:

метод конечных элементов, метод Галеркина, нестационарная теплопроводность, связанные эффекты, структурно-фазовые превращения, поверхностное упрочнение, контактное термосиловое нагружение.

### АННОТАЦИЯ

Представлена новая постановка задачи о статическом расширении. Рассмотрена постановка контактной термосиловой задачи с учетом фазовых превращений и численное решение её термоструктурной подзадачи, возникающей при моделировании процесса поверхностного упрочнения электромеханической обработкой (ЭМО). Предложена математическая модель формирования структуры металлических сплавов при ЭМО на основе совместного анализа расчетных данных о динамике температурных полей и термокинетической диаграммы на примере титанового сплава Ti6Al2V. Кинетика характерна для ЭМО мартенситного превращения при этом описана с использованием эмпирического уравнения Койстина-Марбургера.

Приведен алгоритм решения тепловой задачи на основе метода конечных элементов в слабой форме Галеркина. При аппроксимации расчетной области, представленной в виде полупространства, использовались специальные конечные элементы типа Зенкевича.

На основе серии вычислительных экспериментов исследовано влияние величины временного шага на точность решения задачи. Проведен анализ значимости связанных и нелинейных эффектов, характерных для высокоскоростных высокотемпературных тепловых процессов, в частности изменения теплофизических свойств металла, наличия скрытой теплоты фазовых переходов, теплового излучения и зависимости теплофизических свойств металла от температуры.

© **Багмутов Вячеслав Петрович** – доктор технических наук, профессор, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru)

**Захаров Игорь Николаевич** – доктор технических наук, доцент, e-mail: [zaxap@mail.ru](mailto:zaxap@mail.ru)

**Денисевич Денис Сергеевич** – аспирант, e-mail: [adven148@ya.ru](mailto:adven148@ya.ru)

**Иванников Александр Юрьевич** – старший научный сотрудник, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru)

**Vjacheslav P. Bagmutov** – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru)

**Igor N. Zakharov** – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: [zaxap@mail.ru](mailto:zaxap@mail.ru)

**Denis S. Denisevich** – Postgraduate Student, e-mail: [adven148@ya.ru](mailto:adven148@ya.ru)

**Alexander Yu. Ivannikov** – Senior Researcher, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru)

Учет рассматриваемых эффектов в процессе решения термоструктурной задачи осуществлялся с применением двух методик: решение полностью связанной нелинейной задачи на основе прямого итерационного метода Пикара, использованного совместно с формулой релаксации для ускорения сходимости; решение квазилинейным способом, когда значения нелинейных членов вычисляются на основе распределения температуры, полученного на предыдущем временном шаге.

На основе численных экспериментов приведен анализ возникающих нестационарных температурных полей, а также картины распределения структурных областей, характерных для ЭМО титановых псевдоальфа-сплавов.

© ПНИПУ

## NONLINEAR AND COUPLED THERMAL EFFECTS DURING FINITE ELEMENT SIMULATION OF CONTACT THERMO-FORCE SURFACE HARDENING

V.P. Bagmutov, D.S. Denisevich, I.N. Zakharov, A.Yu. Ivannikov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 28 January 2017  
Accepted: 25 March 2017  
Published: 30 March 2017

#### Keywords:

finite element method, Galerkin method, transient conduction, coupled effects, phase transitions, surface hardening, contact thermo-force loading.

### ABSTRACT

The article considers the problem setting of the coupled thermal-structural problem arising in the process of modelling the surface hardening using electromechanical treatment (EMT). A mathematical model is presented with respect to forming the structure of metallic alloys with EMT based on a joint analysis of the calculated data on the dynamics of temperature fields and continuous cooling transformation diagram by using the Ti6Al2V titanium alloy as an example. Kinetics of the martensitic transition during EMT is described using Koistinen-Marburger equation.

An algorithm of solving the thermal problem based on the finite element method in the weak Galerkin form is given. The calculated area is approximated by Zienkiewicz type infinite elements.

Based on a series of computational experiments, the influence of the magnitude of the time step on the accuracy of the problem solution was investigated. The significance of the considered coupled and nonlinear effects which are specific for high-speed high-temperature thermal processes are analyzed, e.g. the change of the thermophysical properties of the metal, latent heat of phase transitions, thermal radiation and dependence between the metal physical properties and temperature. Two methods are used to consider the effects aiming to solve the thermo-structural problems: a totally coupled non-linear problem using the direct iteration method of Picard in a combination with the relaxation formulae for the convergence acceleration; the quasilinear solution when the values of the nonlinear terms are calculated on the basis of the temperature distribution obtained in the previous time step.

Based on the series of numerical experiments, we analyzed the unsteady temperature fields, as well as the distribution of structural domains after EMT in the titanium pseudo-alpha-alloys.

© PNRPU

## Введение

Развитие современных высокоэнергетических методов обработки материалов, позволяющих получать изделия с заданными эксплуатационными свойствами, требует построения связанных термоструктурно-деформационных математических моделей. Достаточно широкое распространение численное моделирование получило при исследовании таких высокотемпературных технологических процессов, как сварка [1–5], литье [6–9], закалка [10–12], поверхностное упрочнение [13–15] и др.

В работе [13], развитием которой можно считать данную статью, рассматриваются основные особенности построения систем математического моделирования интенсивных температурных и силовых воздействий, характерных для процессов поверхностного уп-

рочнения металлов концентрированными потоками энергии (при электромеханической, лазерной, плазменной обработке и т.д.). При расчётном анализе напряженно-деформированных состояний (НДС) и механического поведения таких систем в каждый момент времени приходится иметь дело, по сути, с новым телом, структура и свойства которого непрерывно трансформируются в ходе технологического процесса под действием эволюционирующих полей температуры, структуры и напряжений. Это требует привлечения моделей смежных с механикой дисциплин, описывающих процессы тепло- и массопереноса, структурно-фазовых превращений, образования дефектов и др. В данной работе в рамках общей постановки контактной связанной задачи механики по определению НДС неоднородных тел при высокоэнергетических воздействиях выделены задачи теплопроводности и изменения фазового состава, связанного с мартенситным превращением в металлическом сплаве, характерные для исследуемого технологического процесса поверхностного упрочнения деталей.

Точность решения таких задач во многом определяется обоснованностью и адекватностью учета наиболее значимых нелинейных эффектов при анализе тепловых процессов (зависимость теплофизических свойств от температуры, нелинейность граничных условий), а также связанностью эффектов, возникающих, например, в результате быстротекущей трансформации структуры (скрытая теплота фазовых превращений, движение межфазных границ). Учет таких особенностей может приводить как к количественному, так и к качественному уточнению результатов [16–19]. Кроме того, в ряде случаев накладываются определенные ограничения на методы и параметры решения нестационарного уравнения теплопроводности, например, при выборе схем интегрирования.

В рамках данной статьи на основе метода конечных элементов (МКЭ) излагаются особенности решения термоструктурной задачи о поверхностном упрочнении электромеханической обработкой (ЭМО) титанового сплава Ti6Al2V. Проводится анализ влияния зависимости теплофизических свойств от температуры, радиационного теплообмена, скрытой теплоты фазовых превращений при различных способах их учета, а также величины выбранного временного шага на точность решения связанной задачи. При этом задача расчета активных и остаточных напряжений при контактном термосиловом нагружении в ходе поверхностной упрочняющей обработки металлических тел будет рассмотрена авторами дополнительно.

## 1. Постановка задачи

### 1.1. Основные уравнения и граничные условия

Решение комплексной задачи основывается на системе дифференциальных уравнений, которые содержат в явном виде связанные члены.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) + Q_{\text{дж}} + Q_{\text{фаз}} + Q_{\text{мех}} = \text{ср} \dot{T}, \quad (2)$$

где  $\nabla$  – оператор набла в актуальной конфигурации деформируемого тела;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши;  $\mathbf{f}$  – вектор объемных сил;  $\boldsymbol{\lambda}$  – тензор теплопроводности;  $T$  – температура;  $Q_{\text{дж}}$  – джоулево тепло;  $Q_{\text{фаз}}$  – скрытая теплота фазовых превращений;  $Q_{\text{мех}}$  – теплота, соответствующая диссипации механической энергии при пластическом деформировании.

Основные уравнения дополняются начальными и граничными условиями применительно к импульсной (переменным током) ЭМО детали твердосплавным инструментом в форме ролика (рис. 1).

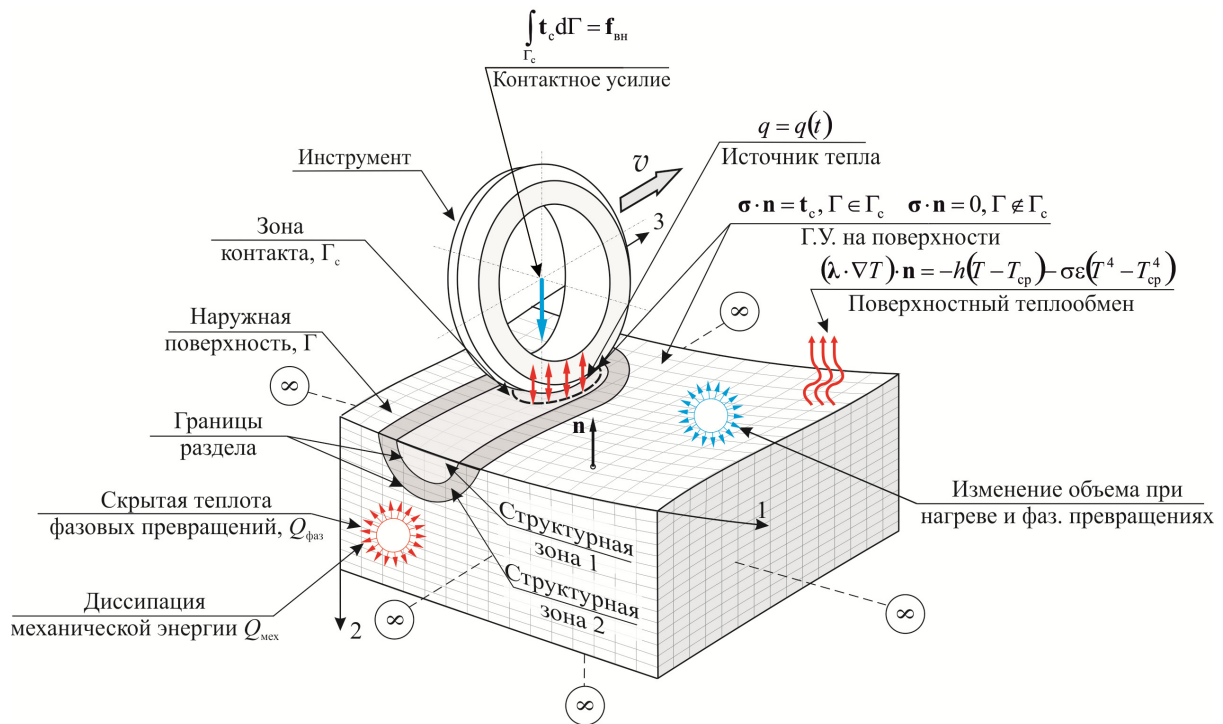


Рис. 1. Расчетная схема неоднородного тела с трансформирующейся структурой и граничные условия при контактном температурно-силовом воздействии (в ходе ЭМО)

Fig. 1. Computational scheme for the heterogeneous body with a transformed structure and boundary conditions under thermo-force contact loading (during EMT)

Контактный инструмент моделируется абсолютно жёстким эллипсоидным штампом. Силовые граничные условия задаются равенством нулю на свободной поверхности соответствующих нормальных и касательных напряжений, которые дополняются краевыми условиями Герца-Синьорини. На границе структурных областей записываются условия совместности перемещений и поперечных (к поверхности раздела с нормалью в данной точке) нормальных и касательных напряжений. На бесконечности устанавливается равенство перемещений и напряжений нулю. Принимается гипотеза о естественном, ненагруженном состоянии тела в начальный момент времени – напряжения и деформации отсутствуют.

$$\left. \begin{aligned} \sigma \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0}, & \Gamma \notin \Gamma_c, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_c, \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_c d\Gamma = \mathbf{f}_{\text{вн}}, & \Gamma \in \Gamma_c, \\ g_n &\geq 0, \sigma_n \geq 0, g_n \sigma_n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности деформируемого тела в текущей конфигурации;  $\mathbf{f}_{\text{вн}}$  – вектор внешней нагрузки, действующей на ролик;  $\mathbf{t}_c$  – интенсивность нагрузки в контактной зоне;  $g_n$  – функция расстояния;  $\sigma_n = \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}$  – контактное давление.

Расчетная область вследствие малой кривизны поверхности и локальности воздействия рассматривается в виде полупространства с подобластями (зонами) с различающимися фи-

зико-механическими характеристиками. Границы данных зон соответствуют областям металла с разной структурой, формирующейся в ходе термосилового нагружения (например, фрагментам со структурой закалки и исходного состояния; зоны 1, 2 на рис. 1). Их текущее положение устанавливается на каждом расчетном шаге из решения связанной задачи.

В зоне контакта эллипсоидного штампа и детали задается эквивалентный равномерно-распределенный поверхностный источник тепла  $q$ . Температура в начальный момент времени  $T^0$  и на бесконечности  $T^\infty$  равна температуре окружающей среды  $T_{cp}$ , а также краевые условия на поверхности для уравнения (2) заданы системой.

$$\left. \begin{aligned} (\lambda \cdot \nabla T) \cdot \mathbf{n} &= -h(T - T_{cp}) - \sigma \varepsilon (T^4 - T_{cp}^4), \quad \Gamma \in \Gamma_c, \\ q &= q(t), \quad T^0 = T_{cp}, \quad T^\infty = T_{cp}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $h$  – коэффициент конвективного теплообмена;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $\varepsilon$  – коэффициент теплового излучения. В случае ЭМО переменным током удельная мощность источника определяется по формуле

$$q(t) = 2kUI \sin^2(2\pi vt), \quad (5)$$

где  $I$  – действующее значение силы тока;  $U$  – действующее значение контактного напряжения;  $k$  – коэффициент, учитывающий теплообмен инструмента и детали;  $v$  – частота тока.

В данной статье основной акцент делается на методах и особенностях решения уравнения (2) как составной части общей постановки. Решение термоструктурной составляющей рассматривается без учета диссипации механической энергии при пластическом деформировании. Отметим, что при численном решении задачи теплопроводности область действия теплового источника  $q$  принималась эллиптической в соответствии с размерами пятна контакта инструмента с деталью, установленными экспериментально.

## 1.2. Модель структурно-фазовых превращений

Математическая модель трансформации микроструктуры при тепловом воздействии в ходе ЭМО титанового псевдо- $\alpha$ -сплава Ti6Al2V представляет собой моделирование фазового  $\alpha \rightarrow \beta$  превращения при нагреве и  $\beta \rightarrow \alpha'$  ( $\alpha''$ ) (мартенситного) превращения при охлаждении на основе анализа термокинетической диаграммы распада переохлажденной  $\beta$ -фазы [20–23].

В текущий момент времени в рассматриваемой точке температура начала и конца мартенситного превращения, а также фазовый состав сплава определяются по термокинетической диаграмме в зависимости от скорости охлаждения (рис. 2).

В связи с высокой скоростью роста мартенсита в процессе трансформации (близкой к скорости звука) [20] принято считать, что превращение происходит мгновенно. В этом случае кинетика образующейся мартенситной фазы в зависимости от температуры может быть описана эмпирическим законом Койстинена – Марбургера [10]

$$\psi = 1 - \exp(-b(M_s - T)), \quad (6)$$

где  $\psi$  – объемная доля мартенситной фазы;  $M_s$  – температура начала мартенситного превращения;  $b$  – эмпирический коэффициент (для Ti6Al2V  $b = -0,05$ ).

При исследовании высокоскоростных процессов термической обработки необходимо учитывать зависимость величины критических температур  $T_{кр}$  (температур фазовых пре-

вращений) от скорости нагрева. Для титановых сплавов с ростом скорости нагрева характерно смещение критических точек  $\Delta T_{кр}$  при  $\alpha \rightarrow \beta$  превращении за счет подавления роста  $\beta$ -фазы, фазовый переход при этом осуществляется только путем образования новых зародышей в области более высоких значений температур [24]. Максимальное смещение при скорости нагрева порядка  $10^5-10^7$  °C/c составляет 90 °C [20].

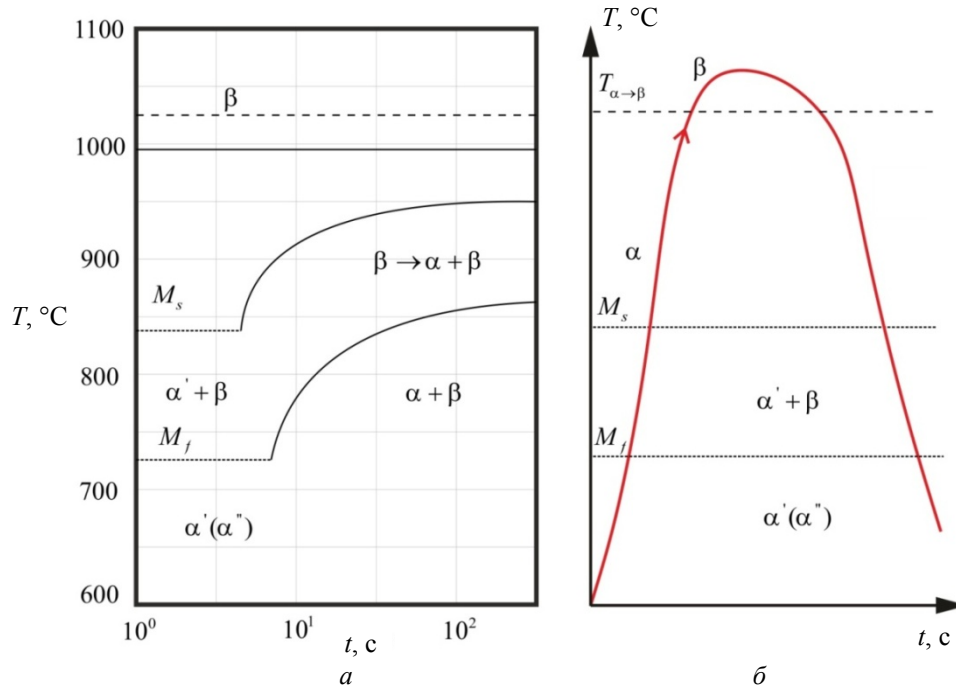


Рис. 2. Термокинетическая диаграмма (а) и пример термического цикла при ЭМО Ti6Al2V (б) ( $\alpha, \alpha', \alpha''$  – стабильные и метастабильные фазы, образующиеся при распаде  $\beta$ -фазы в процессе непрерывного охлаждения;  $M_s, M_f$  – температуры начала и конца мартенситного превращения;  $T_{\alpha \rightarrow \beta}$  – температура  $\alpha \rightarrow \beta$  превращения) [20, 21]

Fig. 2. Continuous cooling diagram (a) and an example of the thermal cycle of the Ti6Al2V alloy during EMT, (b) ( $\alpha, \alpha', \alpha''$  are stable and metastable phases formed during the decay of  $\beta$ -phase in the process of a continuous cooling;  $M_s, M_f$  are the temperatures at the beginning and end of the martensite transformation;  $T_{\alpha \rightarrow \beta}$  is the temperature of  $\alpha \rightarrow \beta$  transformation) [20, 21]

При этом зависимость  $\Delta T_{кр}$  от скорости нагрева  $\dot{T}$  для диапазона  $200 \text{ °C/c} < \dot{T} < 3,5 \cdot 10^4 \text{ °C/c}$  близка к линейной и может быть представлена в виде

$$\Delta T_{кр} = m + n \cdot \dot{T}.$$

## 2. Методика численного решения термоструктурной задачи

### 2.1. Решение нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов

В основе решения лежит вариационная формулировка уравнения теплопроводности, полученная методом взвешенных невязок [25, 26]:

$$\int_{\Gamma} \omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \lambda \cdot \nabla T d\Omega + \int_{\Omega} \omega(Q - c\rho \dot{T}) d\Omega = 0. \quad (7)$$

После процедуры дискретизации и ансамблирования удобно записать уравнение (6) в матричной форме:

$$[H] \cdot \{\dot{T}\} + [C] \cdot \{T\} = \{F\}, \quad (8)$$

где  $[H]$  – матрица теплоемкости;  $[C] = [C_c] + [C_h]$ ,  $[C_c]$  – матрица теплопроводности;  $[C_h]$  – матрица конвективного теплообмена;  $\{F\} = \{F_q\} + \{F_h\} + \{F_Q\}$ ,  $\{F_q\}$  – приведенный вектор тепловой нагрузки, соответствующий поверхностному источнику;  $\{F_h\}$  – приведенный вектор тепловой нагрузки, соответствующий конвективного теплообмену;  $\{F_Q\}$  – приведенный вектор тепловой нагрузки, соответствующий удельному объемному тепловому источнику;  $\{T\}$  – вектор температуры в узлах КЭ-сетки;  $\{\dot{T}\}$  – вектор производной температуры по времени.

Данные матрицы для соответствующих конечных элементов могут быть вычислены с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} [C_c^e] &= \int_{\Omega^e} \lambda [B]^T [B] d\Omega, & [C_h^e] &= \int_{\Gamma} h [N]^T [N] d\Gamma & [H^e] &= \int_{\Omega^e} c\rho [N]^T [N] d\Omega, \\ \{F_Q^e\} &= \int_{\Omega^e} Q [N]^T d\Omega, & \{F_q^e\} &= \int_{\Gamma} q [N]^T d\Gamma, & \{F_h^e\} &= \int_{\Gamma} h T_{cp} [N]^T d\Gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $[N]$ ,  $[B]$  – матрица функций и производных функций формы соответственно.

Разрешающее уравнение можно получить после интегрирования матричного соотношения (8) по времени. Для этого применяется метод Галеркина на исследуемом временном интервале  $\Delta t$ :

$$\int_0^{\Delta t} ([H] \cdot \{\dot{T}\} + [C] \cdot \{T\} - \{F\}) \cdot \partial \{T\} dt = 0. \quad (10)$$

Интегрирование уравнения (10) на интервале  $\Delta t$  приводит к системе линейных уравнений на  $i+1$  временном шаге следующего вида:

$$\left( \frac{1}{\Delta t} [H] + \frac{2}{3} [C] \right) \{T\}_{i+1} = \left( \frac{1}{\Delta t} [H] - \frac{1}{3} [C] \right) \{T\}_i + \frac{1}{3} (\{F\}_i + 2\{F\}_{i+1}). \quad (11)$$

Данная схема является полунеявной и обладает безусловной устойчивостью для линейной постановки, кроме того, она меньше подвержена осцилляциям на первых шагах решения, чем другие схемы [9].

## 2.2. Учет нелинейных и связанных эффектов

К нелинейным эффектам относятся зависимости членов дифференциальных уравнений и граничных условий от температуры, а к эффектам связанности – зависимости от других переменных и дополнительных условий. Для данной задачи, в частности, принимались в расчет следующие нелинейности и связанности:

- 1) зависимость физических свойств от температуры  $c(T)$ ,  $\rho(T)$ ,  $\lambda(T)$ ;
- 2) зависимость коэффициента теплоотдачи от температуры  $h(T)$  и тепловое излучение в бесконечную среду  $q(T) = \sigma \varepsilon (T^4 - T_{cp}^4)$ ;

3) скрытая теплота фазовых превращений  $Q(T, \psi)$ .

При этом конкретный вид функций, определяющих зависимость соответствующих теплофизических свойств от температуры, находится экспериментальным путем.

### 2.2.1. Нелинейность физических свойств

Зависимость теплофизических коэффициентов для сплава Ti-6Al-2V представлена в виде квадратичной сплайн-интерполяции известных экспериментальных данных (рис. 3) [27] вида

$$c_p = \sum_{r=1}^n a_r N(T), \quad \lambda = \sum_{r=1}^n b_r N(T),$$

где  $n$  – число интерполяционных участков;  $N$  – квадратичные базисные функции;  $a_r, b_r$  – весовые коэффициенты. При расчете на каждом шаге определяется номер интерполяционного участка и вычисляется значение необходимых коэффициентов в рамках соответствующего интервала температур. Необходимо отметить, что на стадии охлаждения происходит только мартенситное превращение без существенного изменения теплоемкости. На аналогичной зависимости отсутствуют пики (кривая 2, рис. 3), расчет при этом ведется при одинаковом для всей временной области шаге  $\Delta t$ .

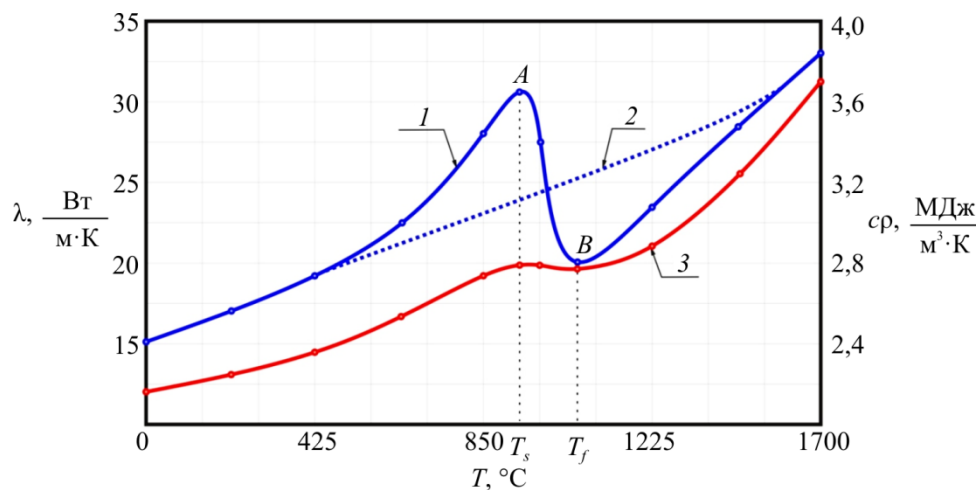


Рис. 3. Расчетные кривые температурных зависимостей теплофизических констант (1 – коэффициента теплоемкости на стадии нагрева; 2 – коэффициента теплоемкости на стадии охлаждения; 3 – коэффициента теплопроводности) для титанового сплава Ti6Al2V, где  $T_s$  и  $T_f$  – температура соответственно начала и конца фазового перехода

Fig. 3. The calculated temperature dependences of thermal constants (1) is for the coefficient of heat capacity at the heating stage; 2) is for the specific heat coefficient at the cooling stage; 3) is for the coefficient of thermal conductivity) for the Ti6Al2V titanium alloy, where  $T_s$  and  $T_f$  are the temperatures at the beginning and end of the phase transition respectively

### 2.2.2. Скрытая теплота фазовых переходов

Скрытая теплота фазовых превращений, выделяющаяся в процессе превращения, вводится в решение в явном виде как объемный источник тепла  $Q$  и добавляется инкрементально на каждом временном шаге с учетом закона Койстинена–Марбургера (рис. 4).



$$Q = \rho L \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где  $L$  – энтальпия фазового перехода;  $\Psi$  – объемная доля образующейся мартенситной фазы.

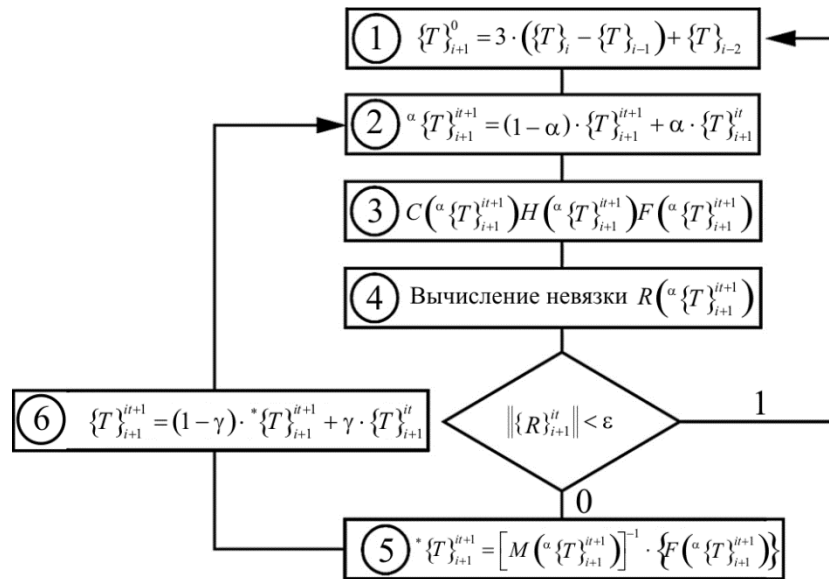


Рис. 4. Алгоритм решения нелинейной задачи на текущем временном шаге

Fig. 4. Algorithm of solving the nonlinear problem at the current time step

### 2.2.3. Нелинейность теплоотдачи в окружающую среду

Радиационный теплообмен в бесконечную среду эквивалентен распределенному по поверхности стоку тепла вида

$$q(T) = \sigma \varepsilon (T^4 - T_{\text{cp}}^4) = \sigma \varepsilon (T^2 + T_{\text{cp}}^2)(T + T_{\text{cp}})(T - T_{\text{cp}}).$$

Данное выражение приводит к эквивалентному коэффициенту теплообмена, зависящему от температуры  $h_{\text{эРВ}}(T) = h(T) + \sigma \varepsilon (T^2 + T_{\text{cp}}^2)(T + T_{\text{cp}})$ .

### 2.3. Методика решения нелинейной задачи

Алгоритм решения нелинейной задачи методом конечных элементов в случае нестационарного процесса представлен на рис. 4. Процедура представляет собой последовательное уменьшение невязки основного разрешающего уравнения в общем виде:

$$R(T) = \{F\} - [C(T)] \cdot \{T\} - [H(T)] \{\dot{T}\}.$$

В нулевом приближении решение на  $i+1$  временном шаге получается путем квадратичной экстраполяции значений, полученных на трех предыдущих временных шагах (см. рис. 4, блок 1):

$$\{T\}_{i+1}^0 = 3 \cdot (\{T\}_i - \{T\}_{i-1}) + \{T\}_{i-2}.$$

Далее вычисляется значение вектора температур на интервале временного интегрирования в точке решения, определяемое коэффициентом  $\alpha$  и зависящее от схемы интегрирования. В частности, для метода Галеркина  $\alpha = 2/3$  (см. рис. 4, блок 2). На следующем

шаге вычисляется значение основных матриц в точке решения (см. рис. 4, блок 3), затем рассчитывается норма невязки (см. рис. 4, блок 4) и сравнивается с допустимой величиной  $\|\{R\}^0\| < \varepsilon$ . При выполнении условия сходимости осуществляется переход к следующему временному шагу. Если условие сходимости не достигнуто, систему нелинейных уравнений необходимо линеаризовать с использованием одного из итерационных методов.

Отметим, что решение поставленной нестационарной задачи требует использования весьма малых шагов  $\Delta t$  даже при неявной схеме интегрирования, что связано с высокоскоростными процессами нагрева/охлаждения, быстротекущей трансформации структуры и др. В рамках одного малого временного шага (порядка 0,2 мс) задача может считаться слабо нелинейной, и достаточным будет использование методов линеаризации первого порядка. К таким методам, обладающим линейной скоростью сходимости, относится итерационный метод Пикара [25], который сводит нелинейную задачу прямым итерационным способом к последовательному решению системы линейных уравнений. Для решения полученной системы линейных уравнений в данной работе использовался метод сопряженных градиентов с предобуславливанием.

В результате процесс решения можно представить в виде следующего рекуррентного соотношения (см. рис. 4, блок 5):

$$* \{T\}_{i+1}^{it+1} = \left[ M \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right]^{-1} \cdot \left\{ F \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right\},$$

где  $\left[ M \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right] = \left( \frac{1}{\Delta t} \left[ H \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right] + \frac{2}{3} \left[ C \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right] \right)$  – разрешающая матрица, а

$\left\{ F \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right\} = \left( \frac{1}{\Delta t} \left[ H \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right] - \frac{1}{3} \left[ C \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right] \right) \cdot \{T\}_i + \frac{1}{3} \left( \{F\}_i + 2 \left\{ F \left( \alpha \{T\}_{i+1}^{it+1} \right) \right\}_{i+1} \right)$  – вектор свободных членов правой части уравнения (11). Для ускорения сходимости используется формула релаксации (см. рис. 4, блок 6):

$$\{T\}_{i+1}^{it+1} = (1 - \gamma) * \{T\}_{i+1}^{it+1} + \gamma \{T\}_{i+1}^{it}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1,$$

где  $\gamma$  – параметр релаксации.

Вычисление основных матриц на каждой итерации осуществляется согласно уравнениям (9) с учетом уточненного вектора температур  $\alpha \{T\}_{i+1}^{it+1}$  в пределах текущего временного шага. Итерационный процесс продолжается пока не выполнится условие сходимости.

## 2.4. Используемые конечные элементы

Для формирования КЭ модели используются тетраэдральные симплекс- и изопараметрические 8-узловые КЭ [28, 29]. Для корректного моделирования полупространства вводятся бесконечные элементы [30] (рис. 5).

Для указанных бесконечных элементов используется отдельный набор интерполяционных функций, определяющих геометрию элемента и температуру в узлах. Для аппроксимации температуры используются линейные функции вида

$$N_k = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi_k \xi) \cdot (1 + \eta_k \eta) \cdot (1 + \zeta_k \zeta),$$

где  $k$  – текущий номер узла в локальной нумерации;  $\xi, \eta, \zeta \in [-1; 1]$  – безразмерные локальные в общем случае криволинейные координаты. Функции геометрии элемента, бесконечного в одном из направлений, приведены ниже:

$$N_k = \frac{-\xi(1 + \eta_k \eta) \cdot (1 + \zeta_k \zeta)}{2(1 - \xi)} \quad k = 1, 4, 5, 8;$$

$$N_k = \frac{(1 + \xi) \cdot (1 + \eta_k \eta) \cdot (1 + \zeta_k \zeta)}{4(1 - \xi)} \quad k = 2, 3, 6, 7.$$

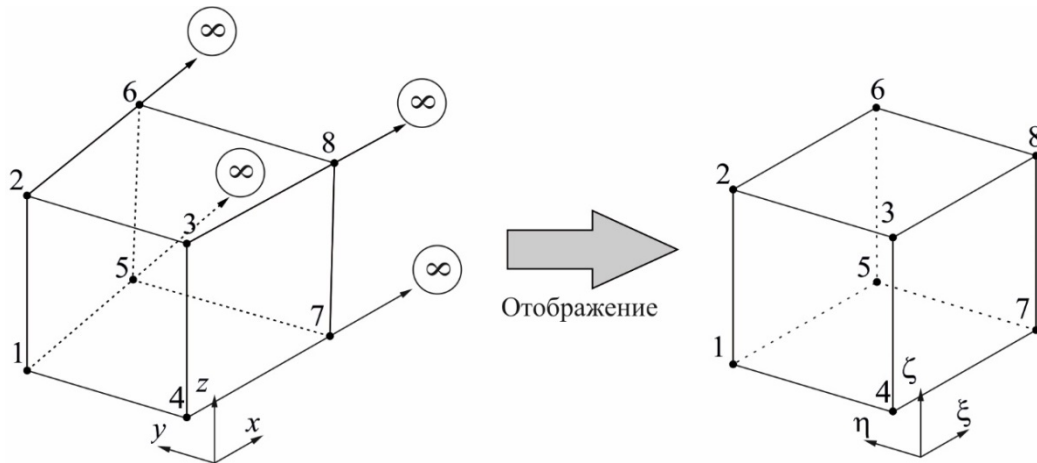


Рис. 5. Отображение КЭ на бесконечность  
Fig. 5. Infinite element mapping scheme

### 3. Анализ результатов

#### 3.1. Анализ термических циклов и структурообразования при ЭМО

Анализ термических циклов при ЭМО, полученных при решении термоструктурной задачи, производится применительно к титановому псевдо- $\alpha$ -сплаву Ti6Al2V. Плотность тока для всех представленных режимов  $I = 400$  А,  $U = 0,4$  В,  $k = 0,3$ ,  $\nu = 50$  Гц, скорость обработки варьируется:  $\nu = 0,82 - 1,64$  м/мин.

На рис. 6 представлен термический цикл точек, расположенных на пересечении плоскостей  $x_1 0x_2$  и  $x_3 0x_2$  на глубинах 0, 0,25 мм, 0,5 мм и 0,75 мм (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно).

Температурное воздействие на материал носит достаточно сложный характер, различные точки материала могут несколько раз проходить стадию закалки и отпуска (см. рис. 6, кривая 1). При этом максимальная температура практически достигает температуры плавления, однако носит локальный характер и быстро затухает. Глубина упрочненной зоны, соответствующей закалке, составляет порядка 200 мкм. Скорость охлаждения при этом составляет  $\dot{T} = (1,2 - 1,5)10^5$  °C/с. Окончательная структура материала определяется последним вторичным пиком температурного цикла от удаляющегося источника. Если этот пик доходит до температуры отжига, то структура считается разупрочненной.

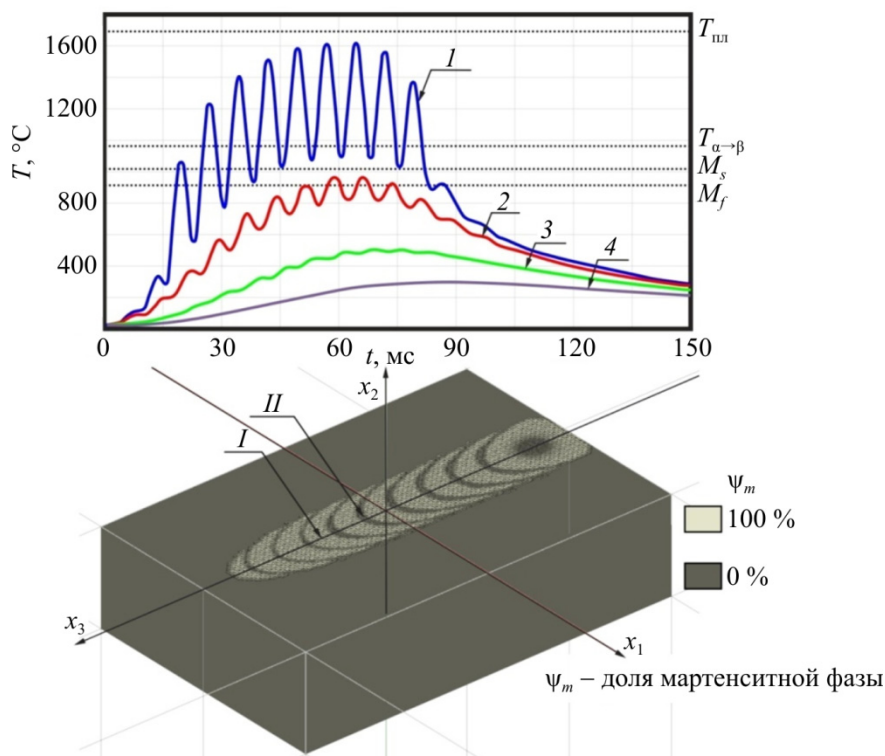


Рис. 6. Термический цикл и картина микроструктуры на поверхности сплава типа Ti6Al2V при обработке со скоростью  $v = 1,23$  м/мин (I – упрочненная зона, II – зона отжига)

Fig. 6. The thermal cycle and microstructure on the Ti6Al2V alloy surface when it is processed at the rate of  $v = 1,23$  m/min (I is the hardened zone, II is the annealing zone)

### 3.2. Влияние нелинейных эффектов и способа их учета на решение термоструктурной задачи

#### 3.2.1. Зависимость теплофизических свойств от температуры

Важным аспектом решения задачи является способ учета нелинейных эффектов. В данной работе произведен сравнительный анализ двух способов учета:

1) квазилинейный, заключающийся в вычислении значения нелинейных членов на основе распределения температуры, полученного на предыдущем временном шаге (явная схема) и последующем решении системы линейных уравнений;

2) нелинейный – на основе метода Пикара.

На рис. 7 представлена зависимость относительного отклонения температуры  $\left( \Delta = \frac{T_{\text{нелин}} - T_{\text{явн}}}{T_{\text{нелин}}} 100\% \right)$  на поверхности при решении по явной схеме при различных скоростях обработки от решения полностью нелинейной задачи при рабочем временном шаге  $\Delta t = 0,2$  мс.

Заметим, что для выбранного временного шага  $\Delta t = 0,2$  мс максимальное отклонение составляет не более 1 %, однако с увеличением шага  $\Delta t$  отклонение возрастает до 9 % (рис. 9). Пики относительного отклонения приходятся на временные интервалы, соответствующие локальным температурным максимумам, поэтому целесообразно использовать итерационные процедуры именно в этой временной области. Для этого выгоднее будет

использовать несколько другой критерий сходимости итерационного процесса, например так называемую бесконечную норму вектора невязки  $\|\{R\}\|_{\infty} < \varepsilon$ , которая характеризует именно максимальную величину вектора.

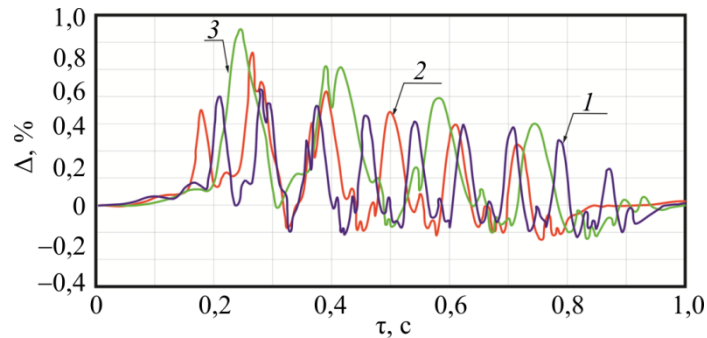


Рис. 7. Зависимость относительного отклонения температуры от текущего времени обработки при различных скоростях движения источника тепла для квазилинейного способа учета (1 –  $v = 0,82$  м/мин; 2 –  $v = 1,23$  м/мин; 3 –  $v = 1,64$  м/мин)

Fig. 7. Dependence of the relative temperature deviation on the current processing time at different motion speeds of the heat source for the quasi-linear method of accounting (1)  $v = 0,82$  m/min; (2)  $v = 1,23$  m/min; (3)  $v = 1,64$  m/min)

### 3.2.2. Скрытая теплота фазовых переходов

Скрытая теплота, выделяющаяся в процессе мартенситного превращения, связана с изменением энтальпии в процессе фазового перехода. Для металлических сплавов изменение энтальпии лежит в диапазоне  $L = 210 - 2100$  Дж/моль.

Как показали численные эксперименты, учет теплоты мартенситного превращения незначительно влияет на температурное поле (в пределах  $0,03T_{\max}$ ) и несколько увеличивает количество образующегося мартенсита.

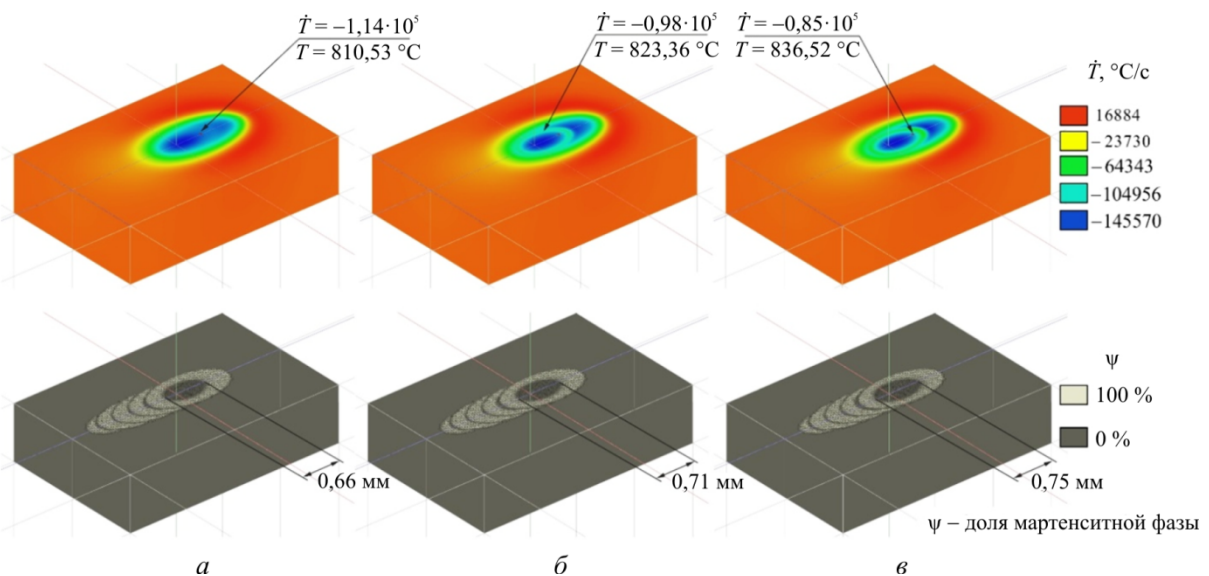


Рис. 8. Картина скоростей охлаждения и микроструктуры: (а)  $L=0$ ; (б)  $L = 1000$  Дж/моль; (в)  $L = 2000$  Дж/моль

Fig. 8. Microstructure and cooling rates: (a)  $L=0$ ; (b)  $L = 1000$  J/mol; (c)  $L = 2000$  J/mol

Более значительное влияние скрытая теплота оказывает на кинетику фазового перехода, замедляя процесс превращения. Это хорошо видно по величине скорости охлаждения, которая становится меньше на 35 % для значения энтальпии  $L = 2000$  Дж/моль. Область структурообразования сужается при этом максимально на 10 % (рис. 8).

### 3.2.3. Радиационный теплообмен

Охлаждение металла за счет теплового излучения становится обычно значимым фактором при температурах выше 300 °С [20]. Однако, как показали численные эксперименты в данной работе, относительное отклонение температуры составляет менее  $0,01T_{\max}$ , что объясняется малым интервалом времени термического воздействия, особенно в области высоких температур. При таких временных рамках процесс перераспределения тепла в объеме металлического тела происходит за счет отвода тепла вглубь материала, и учет любого поверхностного теплообмена становится малозначимым.

### 3.3. Выбор временного шага

При решении термоструктурной задачи величина временного шага  $\Delta t$  выбиралась из следующих соображений:

- 1) обеспечение достаточной устойчивости решения;
- 2) минимальное накопление ошибок в ходе решения;
- 3) адекватное описание процесса высокоскоростной трансформации структуры.

Проведено исследование влияния максимального относительного отклонения температуры на поверхности при текущем шаге от температуры при базовом шаге  $\Delta t = 0,2$  мс при различных способах учета нелинейных и связанных эффектов во всей области скоростей обработки (рис. 9).

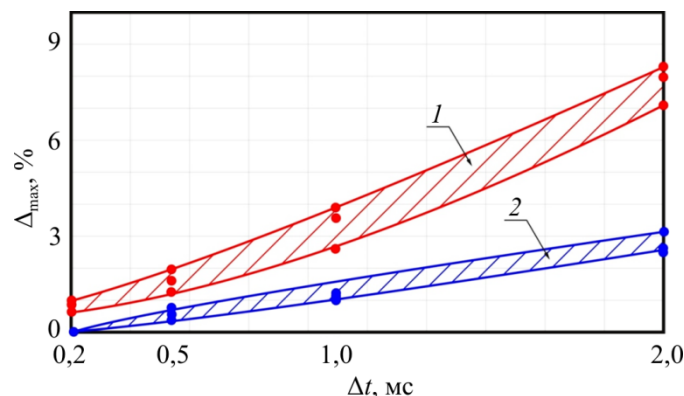


Рис. 9. Зависимость относительного отклонения температуры от величины временного шага при различных способах учета:

1 – квазилинейный; 2 – полностью нелинейный

Fig. 9. Relative temperature dependence on the value of time step for different methods of accounting (1 is quasi-linear, 2 is fully non-linear)

Относительное отклонение температуры при увеличении величины временного шага для полностью нелинейного способа учета невелико (в пределах 3 %), однако в таком случае увеличивается степень нелинейности задачи в рамках шага. Следовательно, уве-

личивается число необходимых итераций при решении нелинейной задачи, вычислительные затраты при этом остаются приблизительно на уровне базового шага  $\Delta t$ . С другой стороны, слишком большое значение временного шага ведет к ошибкам в определении структурных зон и несвоевременному выделению скрытой теплоты фазового превращения. Как показывают численные эксперименты, допустимая величина временного шага лежит в диапазоне 0,2–0,5 мс. Для учета по явной схеме отклонение температуры быстро возрастает: так, при базовом шаге 0,2 мс величина отклонения составляет менее 1 %, тогда как при величине шага 2 мс – уже порядка 9 %.

## Выводы

1. Приведена обобщенная постановка термоструктурно-механической задачи при моделировании НДС и механического поведения неоднородного тела со структурой, трансформирующейся в ходе высокоэнергетического воздействия. В рамках данной постановки показана необходимость предварительного анализа эффектов, связанных с решением вспомогательных задач описания действующих температурных полей и формирующейся структуры тела.

2. На основе численных экспериментов установлено, что тепловые поля, формирующиеся под действием на титановый сплав Ti6Al2V синусоидального источника тепла, характерного для ЭМО переменным током, носят нелинейный импульсный характер, в результате чего образуется регулярная неоднородная структура.

3. В результате анализа значимости нелинейных и связанных эффектов на решения термоструктурной задачи установлено, что скрытая теплота мартенситного превращения увеличивает температуру в момент превращения на  $0,03T_{\max}$  и снижает скорость охлаждения на 35 %. Учет любого поверхностного теплообмена при этом слабо влияет на решение в пределах  $0,01T_{\max}$ .

4. Обоснованы важность процедуры выбора величины временного шага, необходимой для адекватного воспроизведения высокоскоростной трансформации структуры. При этом установлено, что допустимая величина временного шага лежит в диапазоне 0,2–0,5 мс.

5. Установлено, что использование квазилинейного способа учета нелинейных и связанных эффектов допустимо при малой величине шага в пределах 0,5 мс, относительное отклонение температуры при этом составляет менее 2 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 16-38-00939 мол\_а, № 17-08-01742 а, а также в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России № 2017/19.

## Библиографический список

1. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Исаев В.И. Моделирование процессов теплопереноса при лазерной сварке разнородных металлов с использованием промежуточной вставки // Теплофизика высоких температур. – 2015. – Т. 53, № 6. – С. 885–890.

2. Fanrong Kong, Radovan Kovacevic. 3D finite element modeling of the thermally induced residual stress in the hybrid laser/arc welding of lap joint // Journal of Materials Processing Technology. – 2010. – Vol. 210. – P. 941–950.

3. Jao-Hwa Kuang, Tsung-Pin Hung, Chih-Kuan Chen. A keyhole volumetric model for weld pool analysis in Nd:YAG pulsed laser welding // Optics & Laser Technology. – 2012. – Vol. 44. – P. 1521–1528.
4. Morgan Dal, Philippe Le Masson, Muriel Carin. A model comparison to predict heat transfer during spot GTA welding // International Journal of Thermal Sciences. – 2014. – Vol. 75. – P. 54–64.
5. Quan Nguyen, Ching-yu Yang. A modified Newton–Raphson method to estimate the temperature-dependent absorption coefficient in laser welding process // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2016. – Vol. 102. – P. 1222–1229.
6. Appasaheb Adappa Keste, Shravan Haribhau Gawande, Chandrani Sarkar. Design optimization of precision casting for residual stress reduction // Journal of Computational Design and Engineering. – 2016. – Vol. 43. – P. 140–150.
7. Venkatesan A., Gopinath V.M., Rajadurai A. Simulation of casting solidification and its grain structure prediction using FEM // Journal of Materials Processing Technology. – 2005. – Vol. 168. – P. 10–15.
8. Numerical Simulation and Experimental Study of an Ultrasonic Waveguide for Ultrasonic Casting of 35CrMo Steel / Gen LIANG, Chen SHI, Ya-jun ZHOU, Da-heng MAO // Journal of Iron and Steel Research, International. – 2016. – Vol. 23. – P. 772–777.
9. Bouzakis K.-D., Maliaris G., Tsouknidas A. FEM supported semi-solid high pressure die casting process optimization based on rheological properties by isothermal compression tests at thixo temperatures extracted // Computational Materials Science. – 2012. – Vol. 44. – P. 133–139.
10. Şimşir C., Gür C.H. Mathematical Framework for Simulation of Thermal Processing of Materials: Application to Steel Quenching // Turkish J. Eng. Env. Sci. – 2008. – No. 32. – P. 85–100.
11. Xiawei Yang, Jingchuan Zhu, Zhisheng Nong, Zhonghong Lai, Dong He. FEM simulation of quenching process in A357 aluminum alloy cylindrical bars and reduction of quench residual stress through cold stretching process // Computational Materials Science. – 2013. – Vol. 69. – P. 396–413.
12. Li Huiping, Zhao Guoqun, Niu Shanting, Huang Chuanzhen. FEM simulation of quenching process and experimental verification of simulation results // Materials Science and Engineering: A. – 2007. – Vol. 452–453. – P. 705–714.
13. Багмутов В.П., Захаров И.Н., Денисевич Д.С. Особенности решения технологических задач механики неоднородных металлических тел со структурой, трансформирующейся в ходе термосилового нагружения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 1. – С. 5–25.
14. Багмутов В.П., Захаров И.Н. Моделирование тепловых процессов при поверхностной обработке неоднородных металлических тел высокотемпературным движущимся импульсным источником // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 5–16.
15. Багмутов В.П., Захаров И.Н. Моделирование структурных превращений при электромеханической обработке стали // Физика и химия обработки материалов. – 2002. – № 4. – С. 29–32.
16. Исупова И.Л., Трусов П.В. Обзор математических моделей для описания фазовых превращений в сталях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 157–191.
17. Кукуджанов К.В., Левитин А.Л. Процессы деформирования упругопластического материала с дефектами при электродинамическом нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 1. – С. 106–120.
18. Lusk M.T.A., Lee Y.K. global material model for simulating the transformation kinetics of low alloy steels // Proceedings of the 7th international seminar of the international IFHT. – Budapest, Hungary: IFHT, 1999. – 273 p.
19. Ключников В.Д., Овчинников И.В. Плоская задача о воздействии мгновенного точечного источника тепла // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 4. – С. 118–122.
20. Гордиенко А.И., Шипко А.А. Структурные и фазовые превращения в титановых сплавах при быстром нагреве; ред. М.Н. Бодяко. – Минск: Наука и техника, 1983. – 336 с.
21. Van Der Voort G.F. Atlas of Time-Temperature Diagrams for Irons and Steels, ASM International, Materials Park, OH, 1991. – 807 p.



22. Гаврилин И.В. Плавление и кристаллизация металлов и сплавов. – Владимир: Изд-во Влад. гос. ун-та, 2000. – 260 с.
23. Пикунов М.В. Металлургия расплавов: курс лекций. – М.: Изд-во Моск. ин-та стали и сплавов, 2005. – 286 с.
24. Andrews K.W. Empirical formulae for the calculation of some transformation temperatures // *Journal of the iron and steel institute*. – 1965. – Vol. 203. – P. 721–727.
25. Bergheau J., Fortunier R. Finite element simulation of heat transfer / Bergheau Jean-Michel. – Wiley, 2010. – 281 p.
26. Reddy J.N., Gartling D.K. The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics 3rd Edition. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010. – XXIV, 489 p.
27. Теплофизические свойства титана и его сплавов: справ. / В.Э. Пелецкий, В.Я. Чеховской, Э.А. Бельская [и др.]. – М.: Металлургия, 1985. – 103 с.
28. Bathe K., Finite element procedures / Bathe Klaus-Jürgen. – Prentice Hall. – 2014. – 1051 p.
29. Bathe K., Khoshgoftaar R. Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer // *Nuclear Engineering and Design*. – 1979. – № 51. – P. 389–401.
30. Bettles P. Infinite Elements. – Penshaw Press, 2014. – 251 p.

## References

1. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., Isaev V.I. Modelirovanie protsessov teploperenosa pri lazernoi svarke raznorodnykh metallov s ispol'zovaniem promezhutochnoi vstavki [Modeling of heat transfer processes in laser welding of dissimilar metals using an intermediate insert]. *Moskwa: Teplofizika vysokikh temperature*, 2015, vol. 53, no. 6, pp. 885-890.
2. Fanrong Kong, Radovan Kovacevic. 3D finite element modeling of the thermally induced residual stress in the hybrid laserarc welding of lap joint. *Journal of Materials Processing Technology*, 2010, vol. 210, pp. 941-950.
3. Jao-Hwa Kuang, Tsung-Pin Hung, Chih-Kuan Chen. A keyhole volumetric model for weld pool analysis in Nd:YAG pulsed laser welding. *Optics & Laser Technology*, 2012, vol. 44, pp. 1521–1528.
4. Morgan Dal, Philippe Le Masson, Muriel Carin. A model comparison to predict heat transfer during spot GTA welding. *International Journal of Thermal Sciences*, 2014, vol. 75, pp. 54–64.
5. Quan Nguyen, Ching-yu Yang. A modified Newton–Raphson method to estimate the temperature-dependent absorption coefficient in laser welding process. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 102, pp. 1222–1229.
6. Appasaheb Adappa Keste, Shravan Haribhau Gawande, Chandrani Sarkar, Design optimization of precision casting for residual stress reduction, *Journal of Computational Design and Engineering*, 2016, vol. 3, iss. 2, pp 140-150.
7. Venkatesan A., Gopinath V.M., Rajadurai A. Simulation of casting solidification and its grain structure prediction using FEM. *Journal of Materials Processing Technology*, 2005, vol. 168, pp. 10-15.
8. Gen LIANG, Chen SHI, Ya-jun ZHOU, Da-heng MAO. Numerical Simulation and Experimental Study of an Ultrasonic Waveguide for Ultrasonic Casting of 35CrMo Steel. *Journal of Iron and Steel Research, International*, 2016, vol. 23, pp. 772-777.
9. Bouzakis K.D., Maliaris G., Tsouknidas A. FEM supported semi-solid high pressure die casting process optimization based on rheological properties by isothermal compression tests at thixo temperatures extracted *Computational Materials Science*, 2012, vol. 44, pp. 133-139.
10. Şimşir C., Gür C.H. Mathematical Framework for Simulation of Thermal Processing of Materials: Application to Steel Quenching, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 2008, no. 32, pp. 85-100.
11. Xiawei Yang, Jingchuan Zhu, Zhisheng Nong, Zhonghong Lai, Dong He. FEM simulation of quenching process in A357 aluminum alloy cylindrical bars and reduction of quench residual stress through cold stretching process. *Computational Materials Science*, 2013, vol. 69, pp. 396-413.
12. Li Huiping, Zhao Guoqun, Niu Shanting, Huang Chuanzhen. FEM simulation of quenching process and experimental verification of simulation results. *Materials Science and Engineering: A*, 2007, vol. 452-453, pp. 705-714.
13. Bagmutov V.P., Zakharov I.N., Denisevich D.S. Features of solving technological problems in mechanics of bodies with non-uniform metal structure transformed in thermo-force loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 5-25.

14. Bagmutov V.P., Zakharov I.N. Modelirovanie teplovykh protsessov pri poverkhnostnoi obrabotke neodnorodnykh metallicheskiykh tel vysokotemperaturnym dvizhushchimsia impul'snym istochnikom [Modeling of thermal processes in the surface treatment of heterogeneous metallic bodies by a high-temperature moving pulsed source]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 5-16.
15. Bagmutov V.P., Zakharov I.N. Modelirovanie strukturnykh prevrashchenii pri elektromekhanicheskoi obrabotke stali [Modeling of structural transformations during electromechanical processing of steel]. *Fizika i khimiya obrabotki materialov*, 2002, no. 4, pp. 29-32.
16. Isupova I.L., Trusov P.V. Mathematical modeling of phase transformations in steel under thermomechanical loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no 3, pp. 157-191.
17. Kukudzhanov K.V., Levitin A.L. Deformation processes of elastoplastic material with defects under electrodynamic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 106-120.
18. Lusk M.T., Lee Y.K. A global material model for simulating the transformation kinetics of low alloy steels. *Proceedings of the 7th international seminar of the international IFHT. – Budapest, Hungary: IFHT*, 1999, 273 p.
19. Kliushnikov V.D., Ovchinnikov I.V. Ploskaia zadacha o vozdeistvii mgnovennogo tochechnogo istochnika tepla [A flat problem of the effect of an instantaneous point source of heat]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1988, no. 4, pp. 118-122.
20. Gordienko A. I., Shipko A. A. Strukturnye i fazovye prevrashcheniia v titanovykh splavakh pri bystrom nagreve [Structural and phase transformations in titanium alloys with rapid heating]. *Minsk: Nauka i tekhnika*, 1983, 336 p.
21. Van Der Voort G.F. Atlas of Time-Temperature Diagrams for Irons and Steels, *ASM International*, Materials Park, OH, 1991, 807 p.
22. Gavrilin I.V. Plavlenie i kristallizatsiia metallov i splavov [Melting and crystallization of metals and alloys]. *Vladimir: Vlad. VGU*, 2000, 260 p.
23. Pikunov M.V. Metallurgii rasplavov: kurs lektsii [Metallurgy of melts: a course of lectures]. *Moskva: Mosk. in-t stali i splavov.*, 2005, 286 p.
24. Andrews K.W. Empirical formulae for the calculation of some transformation temperatures. *Journal of the iron and steel institute*, 1965, vol. 203, pp. 721-727.
25. Bergheau Jean-Michel, Fortunier Roland Finite element simulation of heat transfer. *Wiley*, 2010, 281 p.
26. Reddy J.N., Gartling D.K. The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics 3rd Edition. *CRC Press, Taylor & Francis Group*, 2010, no. XXIV, 48 p.
27. Peletskii V.E., Chekhovskoi V.Ia., Bel'skaia E.A. et al. Teplofizicheskie svoistva titana i ego splavov. Spravochnik [Thermophysical properties of titanium and its alloys. Directory]. *Moskva: Metallurgiya*, 1985, 103 p.
28. Bathe Klaus-Jürgen Finite element procedures. *Prentice Hall*, 2014, 1051 p.
29. Bathe K., Khoshgoftaar R. Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer. *Nuclear Engineering and Design*, 1979, no. 51, pp. 389-401.
30. Bettles P. Infinite Elements. *Penshaw Press*, 2014, 251 p.