

Абросимов Н.А., Елесин А.В. Численный анализ динамической прочности композитных цилиндрических оболочек при многократных импульсных воздействиях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 7–19. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.01

Abrosimov N.A., Elesin A.V. Numerical analysis of dynamic strength of composite cylindrical shells under multiple-pulse exposures. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. Pp. 7-19. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.01



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.01

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Н.А. Абросимов, А.В. Елесин

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 03 июня 2016 г.  
Принята: 15 октября 2016 г.  
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

#### Ключевые слова:

материалы композитные, оболочки цилиндрические, деформирование нелинейное, разрушение, методы численные, нагружение импульсное.

### АННОТАЦИЯ

Объектом исследований являлись открытые с торцов стеклопластиковые цилиндрические оболочки, изготовленные перекрестной намоткой лент однонаправленного композитного материала.

Цель работы – разработка методики численного моделирования процесса прогрессирующего разрушения слоистых композитных цилиндрических оболочек при многократном нагружении импульсом внутреннего давления различной интенсивности.

Кинематическая модель деформирования слоистого пакета основывается на прикладной геометрически нелинейной теории оболочек. Формулировка геометрических зависимостей базируется на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости. Физические соотношения элементарного слоя формулируются на основе обобщенного закона Гука для ортотропного материала с учетом гипотез прикладной теории оболочек. Процесс прогрессирующего разрушения оболочки описывается в рамках модели деградации жесткостных характеристик элементарных слоев многослойного пакета, которая базируется на критерии Хоффмана для композитного материала и на критерии максимальных напряжений для волокон. Процесс накопления поврежденности в материале оболочки, обусловленный многократным приложением импульсной нагрузки, учитывается посредством вычислительной схемы, в которой расчет текущего напряженно-деформированного состояния осуществляется с жесткостными характеристиками, полученными в рамках модели их деградации при предыдущем нагружении.

Энергетически согласованная система уравнений движения прикладной теории оболочек выводится из условия стационарности функционала полной энергии оболочки. Численный метод решения сформулированной начально-краевой задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме.

Достоверность рассматриваемой методики обоснована сравнением полученных результатов с известными экспериментальными данными. Приведены результаты влияния числа нагружений на величину предельных окружных деформаций. Установлено, что уровень максимальных кольцевых деформаций ниже их предельных значений по сравнению с однократным нагружением примерно в десять раз.

© ПНИПУ

© **Абросимов Николай Анатольевич** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: [abrosimov@mech.unn.ru](mailto:abrosimov@mech.unn.ru)

**Елесин Александр Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: [elesin@mech.unn.ru](mailto:elesin@mech.unn.ru)

**Nikolay A. Abrosimov** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: [abrosimov@mech.unn.ru](mailto:abrosimov@mech.unn.ru)

**Alexander V. Elesin** – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: [elesin@mech.unn.ru](mailto:elesin@mech.unn.ru)

## NUMERICAL ANALYSIS OF DYNAMIC STRENGTH OF COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS UNDER MULTIPLE-PULSE EXPOSURES

N.A. Abrosimov, A.V. Elesin

Research Institute of Mechanics of National Research Nizhny Novgorod State University  
n.a. N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 03 June 2016  
Accepted: 15 October 2016  
Published: 30 December 2016

#### Keywords:

composite materials,  
cylindrical shells, nonlinear  
deformation, fracture,  
numerical methods,  
pulse loading.

### ABSTRACT

The target of this research is studying the fiberglass cylindrical shells with exposed ends resulted from the cross-winding of tapes made of an unidirectional composite material.

The aim of the study was to develop a numerical technique to model a progressive fracture of laminated composite cylindrical shells under multiple-pulse loading with an internal pressure of a various intensity.

Kinematic model of deforming the laminate package is based on the applied geometrically nonlinear theory of shells. The formulation of geometric dependencies is based on the relations of the simplest quadratic variant of the nonlinear elasticity theory. The physical relations of the elementary layer are formulated based on the generalized Hooke's law for the orthotropic material based on the hypotheses of the applied shells theory. The process of a progressive shell failure is described within the degradation model of stiffness characteristics in elementary layers of a multilayer package which is based on Hoffman's criteria for composite materials and on the criterion of maximum stresses for the fibers. The process of damage accumulation in the shell material due to a multiple application of impulse load is taken into account by means of the computational scheme in which the calculation of the current stress strain state is carried out with stiffness characteristics obtained in the model of their degradation under previous loading.

Energetically consistent system of motion equations of the applied shell theory is deduced from the stationarity condition related to the functional of the shell total energy. A numerical method for solving the formulated initial-boundary value problem is based on an explicit variational difference scheme.

The accuracy of the considered technique is proved by comparing the obtained results with the known experimental data. The results of how the number of loadings affects the value of marginal circumferential deformations are presented. It is established that the level of maximal ring deformations is approximately ten times less than their limit values compared to a single loading.

© PNRPU

---

## Введение

Композитные материалы благодаря высокой удельной прочности находят все более широкое применение при создании различных конструкций, испытывающих интенсивные динамические нагрузки. В частности, к таким конструкциям относятся взрывозащитные камеры, для которых требуется с высокой степенью надёжности исключить их разрушение в условиях многократного воздействия импульсной нагрузки. Экспериментально установлено [1], что динамическая прочность и деформируемость стеклопластиковых цилиндрических оболочек существенно зависят от уровня импульсной нагрузки и числа нагружений. Кроме того, при повторном нагружении наблюдалось снижение величины предельной деформации оболочки [2]. Данные эффекты, связанные с неоднократным нагружением, изучались экспериментально при нагрузках, близких к предельным, что приводило к значительным повреждениям после первого нагружения и полному разрушению всего слоистого пакета при последующих нагружениях. Для обоснованного применения стеклопластиков при проектировании взрывозащитных контейнеров необходимо провести исследование их усталостной прочности при многократных импульсных воздействиях, которые существенно меньше их предельных значений. Некоторые аспекты экспериментального изучения малоциклового усталостной прочности стеклопластиков рассматрива-

лись в [3]. Обзор критериев прогрессирующего разрушения многослойных композитов содержится в работе [4]. Различные варианты моделей прогрессирующего разрушения слоистых композитов рассматривались в работах [5–15].

Предлагаемая работа посвящена численному моделированию прогрессирующего разрушения стеклопластиковых цилиндрических оболочек при многократном взрывном нагружении.

## 1. Постановка и метод решения задачи

Рассматривается стеклопластиковая цилиндрическая оболочка, изготовленная перекрестной намоткой лент однонаправленного композитного материала. Отнесем оболочку к ортогональной криволинейной системе координат  $\alpha_i (i = \overline{1,3})$ , совпадающей с линиями главных кривизн и внешней нормалью к внутренней поверхности оболочки.

Коэффициенты Ламе и главные кривизны:  $H_1 = z_1 = 1$ ,  $H_2 = z_2 = 1 + k_2 \alpha_3$ ,  $H_3 = 1$ ,  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = \frac{1}{R}$ , где  $R$  – радиус внутренней поверхности оболочки.

Кинематическая модель деформирования многослойного пакета базируется на прикладной геометрически нелинейной теории оболочек [16], в рамках которой распределение перемещений по толщине оболочки запишется в виде

$$\begin{aligned} U_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= u_j(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \varphi_j(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (j = 1, 2), \\ U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= u_3(\alpha_1, \alpha_2, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$  – перемещения точек внутренней поверхности в направлениях осей  $\alpha_i (i = \overline{1,3})$ ;  $\varphi_j (j = 1, 2)$  – углы поворота нормали к внутренней поверхности.

Компоненты нелинейного тензора деформаций прикладной теории цилиндрических оболочек можно представить в виде [17]

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{z_1} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}^2 / 2 + \alpha_3 \chi_{11}), \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ e_{12} &= \frac{1}{z_1} [\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{23} / 2 + \alpha_3 \chi_{12}] + \frac{1}{z_2} [\varepsilon_{21} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{23} / 2 + \alpha_3 \chi_{21}] \quad , \quad (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$e_{13} = \frac{1}{z_1} (\varphi_1 + \varepsilon_{13}) \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3 \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (3)$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1 \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Символ  $(1 \leftrightarrow 2)$  здесь и далее обозначает, что из записанного соотношения можно получить еще одно одновременной заменой 1 на 2, 2 на 1.

Физические соотношения элементарного слоя с учетом гипотез прикладной теории оболочек запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( A_{11} - \frac{A_{13}^2}{A_{33}} \right) e_{11} + \left( A_{12} - \frac{A_{13} \cdot A_{23}}{A_{33}} \right) e_{22} \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{12} &= A_{66} e_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{13} &= A_{44} e_{13}, \\ \sigma_{23} &= A_{55} e_{23}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A_{mn}$  – ступенчато изменяющиеся функции переменной  $\alpha_3$ , которые вычисляются через модули упругости  $E_{ij}$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_{ij}$  элементарного слоя композитного материала.

В процессе нестационарного деформирования допускается локальное разрушение элементарных слоев в пакете многослойного композита. В результате разрушения отдельных элементарных слоев композита происходит перераспределение напряжений между слоями, а многослойный пакет продолжает оказывать сопротивление дальнейшему деформированию. Процесс прогрессирующего разрушения оболочки описывается в рамках модели деградации жесткостных характеристик элементарных слоев многослойного пакета, которая базируется на критерии Хоффмана [18] для композитного материала:

$$\begin{aligned} f &= C_1 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + C_2 (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + C_3 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ &+ C_4 \sigma_{33} + C_5 \sigma_{22} + C_6 \sigma_{11} + C_7 \sigma_{23}^2 + C_8 \sigma_{13}^2 + C_9 \sigma_{12}^2 = 1, \\ C_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_{33}^P F_{33}^C} + \frac{1}{F_{22}^P F_{22}^C} - \frac{1}{F_{11}^P F_{11}^C} \right), \quad C_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_{33}^P F_{33}^C} + \frac{1}{F_{11}^P F_{11}^C} - \frac{1}{F_{22}^P F_{22}^C} \right), \\ C_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_{11}^P F_{11}^C} + \frac{1}{F_{22}^P F_{22}^C} - \frac{1}{F_{33}^P F_{33}^C} \right), \quad C_4 = \frac{1}{F_{33}^P} - \frac{1}{F_{33}^C}, \quad C_5 = \frac{1}{F_{22}^P} - \frac{1}{F_{22}^C}, \\ C_6 &= \frac{1}{F_{11}^P} - \frac{1}{F_{11}^C}, \quad C_7 = \frac{1}{F_{23}^2}, \quad C_8 = \frac{1}{F_{13}^2}, \quad C_9 = \frac{1}{F_{12}^2} \end{aligned}$$

и на критерии максимальных напряжений для волокон  $\sigma_{11} > F_{11}^{PB}$ ,  $|\sigma_{11}| > F_{11}^{CB}$ , вычисленных в осях ортотропии элементарного слоя. Здесь  $F_{ii}^P$ ,  $F_{ii}^C$ ,  $F_{ij}$ ,  $F_{11}^{PB}$ ,  $F_{11}^{CB}$  – пределы прочности однонаправленного композитного материала и волокон при растяжении и сжатии. В процессе деформирования и трещинообразования связующего предполагается жесткое сцепление между соседними слоями.

В зависимости от знака объемной деформации и моды разрушения композитного материала и волокон модули упругости монослоя с трещинами принимают одно из возможных значений, приведенных в таблице.

Схема редуцирования модулей упругости слоя  
Reduction scheme of layer elasticity moduli

Характер разрушения	Условия на значение объемной деформации	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{33}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
$\sigma_{11} > F_{11}^{PB}$		0	0	0	0	0	0
$ \sigma_{11}  > F_{11}^{CB}$	$e_{11} + e_{22} + e_{33} > 0$	0	0	0	0	0	0
	$e_{11} + e_{22} + e_{33} < 0$	$E_{11}^0$	$E_{22}^0$	$E_{33}^0$	0	0	0
$f(\sigma_{ij}, F_{ij}^P, F_{ij}^C, F_{ij}^*) \geq 1$	$e_{11} + e_{22} + e_{33} > 0$	$E_{11}^0$	$E'_{22}$	$E'_{33}$	$G'_{12}$	$G'_{13}$	$G'_{23}$
	$e_{11} + e_{22} + e_{33} < 0$	$E_{11}^0$	$E_{22}^0$	$E_{33}^0$	$G'_{12}$	$G'_{13}$	$G'_{23}$

Здесь  $E'_{22}$ ,  $E'_{33}$ ,  $G'_{ij}$  – значения модулей упругости и сдвига в результате деградации материала оболочки, вычисляемые по формулам [19]  $E'_{22} = \left| \frac{e_{22}^{\max}}{F_{22}^P} + \frac{\nu_{12}^2}{E_{11}^0} \right|^{-1}$ ,  $E'_{33} = \left| \frac{e_{33}^{\max}}{F_{33}^P} + \frac{\nu_{13}^2}{E_{11}^0} \right|^{-1}$   
 $G'_{ij} = \left| \frac{e_{ij}}{F_{ij}} \right|^{-1}$ ;  $E_{11}^0$ ,  $E_{22}^0$ ,  $E_{33}^0$  – значения модулей упругости в начальном неповрежденном состоянии;  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$  – коэффициенты Пуассона;  $e_{ij}$  – текущие значения деформаций ( $i, j = \overline{1, 3}$ );  $e_{22}^{\max}$ ,  $e_{33}^{\max}$  – максимальные значения деформаций при растяжении за предысторию деформирования.

Процесс накопления поврежденности в материале оболочки, обусловленный многократным приложением импульсной нагрузки, учитывается посредством вычислительной схемы, в которой расчет текущего напряженно-деформированного состояния осуществляется с жесткостными характеристиками, полученными в рамках модели их деградации при предыдущем нагружении.

Будем считать, что исчерпание несущей способности оболочки происходит в момент обнуления в каком-либо поперечном сечении всех жесткостных характеристик.

Энергетически согласованная система уравнений движения прикладной теории оболочек выводится из условия стационарности функционала полной энергии оболочки. Вариационное уравнение движения цилиндрической оболочки со свободными торцами, нагруженной импульсом внутреннего давления, запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & \iint_S \left[ N_{11} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_1} + N_{21} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_2} + N_{22} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_1} - N_{23}^* k_2 \delta u_2 + \right. \\
 & + N_{13}^* \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_1} + N_{23}^* \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_2} + N_{22} k_2 \delta u_3 + M_{11} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_1} + M_{21} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_2} + Q_{13} \delta \varphi_1 + \\
 & \left. + M_{22} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_1} + Q_{23} \delta \varphi_2 \right] d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_S [(\bar{B}_{11} \ddot{u}_1 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_1) \delta u_1 + \\
 & + (\bar{B}_{11} \ddot{u}_2 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_2) \delta u_2 + \bar{B}_{11} \ddot{u}_3 \delta u_3 + (\bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_1 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_1) \delta \varphi_1 + \\
 & + (\bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_2 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_2) \delta \varphi_2] d\alpha_1 d\alpha_2 - \iint_S P_3 \delta u_3 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$N_{13}^* = Q_{13} + N_{11} \varepsilon_{13} + N_{12} \varepsilon_{23}, \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

$$\bar{B}_{11} = \rho(h + k_2 h^2 / 2); \quad \bar{B}_{22} = \rho(h^3 / 3 + k_2 h^4 / 4); \quad \bar{B}_{12} = \bar{B}_{21} = \rho(h^2 / 2 + k_2 h^3 / 3),$$

$$N_{11} = B_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + B_{12} \bar{\varepsilon}_{22} + C_{11} \chi_{11} + C_{12} \chi_{22} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$N_{12} = B_{33}^{11} \bar{\varepsilon}_{12} + B_{33}^{12} \bar{\varepsilon}_{21} + C_{33}^{11} \chi_{12} + C_{33}^{12} \chi_{21} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$M_{11} = C_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + C_{12} \bar{\varepsilon}_{22} + D_{11} \chi_{11} + D_{12} \chi_{22} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$M_{12} = C_{33}^{11} \bar{\varepsilon}_{12} + C_{33}^{12} \bar{\varepsilon}_{21} + D_{33}^{11} \chi_{12} + D_{33}^{12} \chi_{21} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$Q_{13} = K_1(\varepsilon_{13} + \varphi_1) \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}^2 / 2; \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{23} / 2 \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

$$B_{jj} = I_{jj}^{(0)}, \quad B_{12} = B_{21} = J_{12}^{(0)}, \quad C_{jj} = I_{jj}^{(1)}, \quad C_{12} = C_{21} = J_{12}^{(1)},$$

$$B_{33}^{jj} = I_{33,jj}^{(0)}, \quad B_{33}^{12} = B_{33}^{21} = J_{33}^{(0)}, \quad C_{33}^{jj} = I_{33,jj}^{(1)}, \quad C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = J_{33}^{(1)},$$

$$D_{jj} = I_{jj}^{(2)}, \quad D_{12} = D_{21} = J_{12}^{(2)}, \quad D_{33}^{jj} = I_{33,jj}^{(2)}, \quad D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = J_{33}^{(2)},$$

$$h_k = z_k - z_{k-1}, \quad \bar{h}_k = (z_k + z_{k-1}) / 2,$$

$$K_j = h^2 \left[ \sum_{k=1}^K \frac{H_j^{(k)} h_k}{A_{j+3,j+3}^{(kk)}} \right]^{-1}, \quad H_1^{(k)} = \frac{(1 + \bar{h}_k k_1)}{(1 + \bar{h}_k k_2)} \quad (1 \leftrightarrow 2) \quad (j = 1, 2),$$

$$I_{11}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^K A_{11}^{(k)} H_2^{(k)} (z_k^{i+1} - z_{k-1}^{i+1}), \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$I_{33,11}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^K A_{11}^{(k)} H_2^{(k)} (z_k^{i+1} - z_{k-1}^{i+1}) \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$J_{12}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^K A_{12}^{(k)} (z_k^{i+1} - z_{k-1}^{i+1}),$$

$$J_{33}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^K A_{33}^{(k)} (z_k^{i+1} - z_{k-1}^{i+1}) \quad (i = 0, 1, 2),$$

где  $P_3$  – нагрузка по направлению координатной оси  $\alpha_3$ ;  $S$  – область интегрирования на внутренней поверхности оболочки;  $A_{ij}^{(k)}$  – эффективные жесткостные характеристики слоя, которые вычисляются через модули упругости и коэффициенты Пуассона [16];  $z_k$  – координаты слоев, отсчитываемые от внутренней поверхности оболочки.

Минимизация функционала полной энергии оболочки (5) позволяет получить систему уравнений движения

$$L_1(N) = \bar{B}_{11} \ddot{u}_1 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_1, \quad L_2(N) + N_{13}^* k_2 = \bar{B}_{11} \ddot{u}_2 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_2,$$

$$L_1(M) - Q_{13} = \bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_1 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_1, \quad L_2(M) - Q_{23} = \bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_2 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_2,$$

$$L_1(T) = \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_2} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial N_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{23}^*}{\partial \alpha_2} - k_2 N_{22} + F_3 = B_{11} \ddot{u}_3$$

и естественные граничные условия

$$N_{11} = 0, \quad N_{12} = 0, \quad N_{13}^* = 0, \quad M_{11} = 0, \quad M_{12} = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2). \quad (7)$$

Дополняя соотношения (6), (7) необходимым числом начальных условий

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_i^0(\alpha_1, \alpha_2), & \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \varphi_i^0(\alpha_1, \alpha_2), \\ \dot{u}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_i^0(\alpha_1, \alpha_2), & \dot{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{\varphi}_i^0(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (8)$$

$(i = \overline{1, 3}; j = 1, 2),$

получим полную систему уравнений для анализа нелинейных волновых процессов деформации и послойного разрушения цилиндрических оболочек, полученных перекрестной намоткой однонаправленного композитного материала.

Численный метод решения сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме [20].

## 2. Результаты исследования

Рассматривалась оболочка радиусом внутренней поверхности  $R = 0,15$  м, толщиной  $h = 0,00819$  м и длиной  $L = 4R$ , выполненная из стеклопластика со следующими жесткостными и прочностными характеристиками элементарного слоя и волокон [21]:  $E_{11} = 55,0$  ГПа,  $E_{22} = E_{33} = 9,04$  ГПа,  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,276$ ,  $\nu_{23} = 0,3$ ,  $G_{12} = G_{13} = 5,08$  ГПа,  $G_{23} = 5,2$  ГПа,  $\rho = 2010$  кг/м<sup>3</sup>,  $F_{11}^P = 1,5$  ГПа,  $F_{11}^C = 0,397$  ГПа,  $F_{22}^P = F_{33}^P = 0,0267$  ГПа,  $F_{22}^C = F_{33}^C = 0,0719$  ГПа,  $F_{12} = F_{13} = 0,0357$  ГПа,  $F_{23} = 0,04$  ГПа,  $F_{11}^{PB} = 2,8$  ГПа,  $F_{11}^{CB} = 0,7425$  ГПа.

В расчетах импульс внутреннего давления задавался с помощью эмпирической зависимости

$$P_3(l, t) = \begin{cases} 0,35mq/l^3 & \text{при } t \leq 0,35l/\sqrt{q}, \\ 0 & \text{при } t > 0,35l/\sqrt{q}, \end{cases}$$

где  $m$  – масса заряда;  $q = 4,77 \cdot 10^6$  Дж/кг – теплотворная способность взрывчатого вещества (ВВ);  $l$  – расстояние от центра заряда до точки внутренней поверхности оболочки.

Достоверность рассматриваемого подхода подтверждалась сравнением численных расчетов с экспериментальными данными [2] по значениям максимальных кольцевых деформаций  $e_{22}^*$  в центральном сечении неразрушившейся оболочки и периоду радиальных колебаний  $T$ , полученным для оболочки со структурой пакета  $[90^0]_{16}$  при нагружении однократным зарядом ВВ массой  $m = 0,0206$  кг. В эксперименте  $e_{22}^* = 0,4\%$ ,  $T \cdot 10^6 = 180$  с, в расчете  $e_{22}^* = 0,3\%$ ,  $T \cdot 10^6 = 190$  с. Наблюдается достаточно хорошее совпадение результатов как по амплитуде, так и периоду колебаний.

Далее рассматривалась задача динамической прочности стеклопластиковой цилиндрической оболочки толщиной  $h = 0,0102$  м со структурой армирования  $[\pm 45^0, 90^0]_4$  при многократных импульсных воздействиях, которые существенно меньше их предельных значений.

Типичные зависимости радиальных колебаний в центральном сечении оболочки показаны на рис. 1 для пяти последовательных нагружений зарядом ВВ массой  $m = 0,105$  кг.

Видно, что с ростом числа нагружений наблюдается увеличение амплитуды и периода колебаний, обусловленное снижением жесткостных характеристик многослойного пакета вследствие разрушения некоторых элементарных слоев.

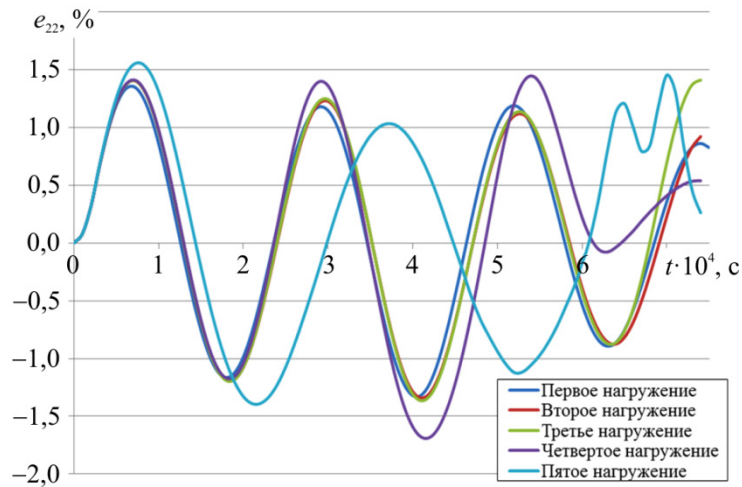


Рис. 1. Осциллограммы окружных деформаций в центральном сечении при многократном нагружении  
 Fig. 1. Waveform circumferential deformations in the central section with repeated loading

Иллюстрация процесса разрушения оболочки при многократном нагружении зарядом ВВ массой  $m = 0,105$  кг представлена на рис. 2–4. На рис. 2 для двух моментов времени показаны деформированные конфигурации оболочки с нанесенными зонами разрушения внешнего слоя.

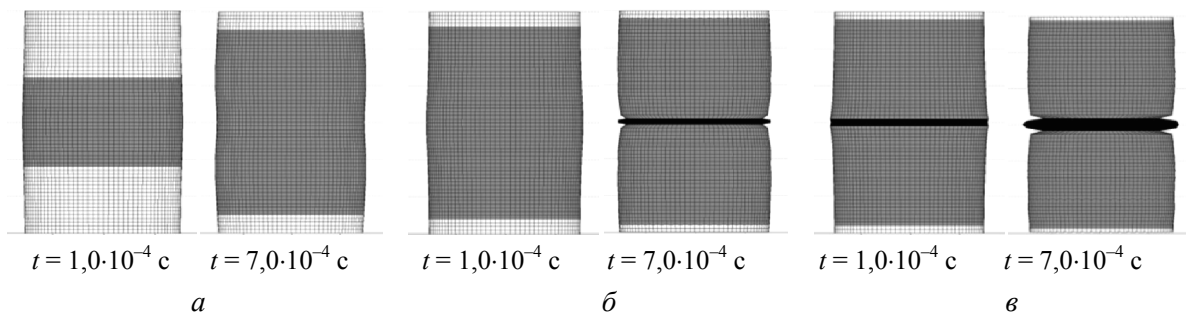


Рис. 2. Деформированные конфигурации оболочки (прогибы увеличены в пять раз):  
 а – первое нагружение; б – четвертое нагружение; в – пятое нагружение  
 Fig. 2. The deformed configuration of the shell (deflections magnified five times):  
 а – first loading; б – loading the fourth; в – fifth loading

На рис. 3 показана соответствующая кинетика развития зон разрушения по толщине пакета слоев в центральном сечении оболочки для пяти последовательных нагружений.

Здесь светлый фон соответствует зонам, в которых разрушения отсутствуют; серый фон – зоны разрушения матрицы; в зонах черного фона происходит разрушение волокон. Процесс разрушения стеклопластиковых оболочек при многократных импульсных воздействиях аналогичен ранее полученным результатам при однократном нагружении [22], что свидетельствует о слабом влиянии скорости деформации на характер возникающих в композите повреждений.



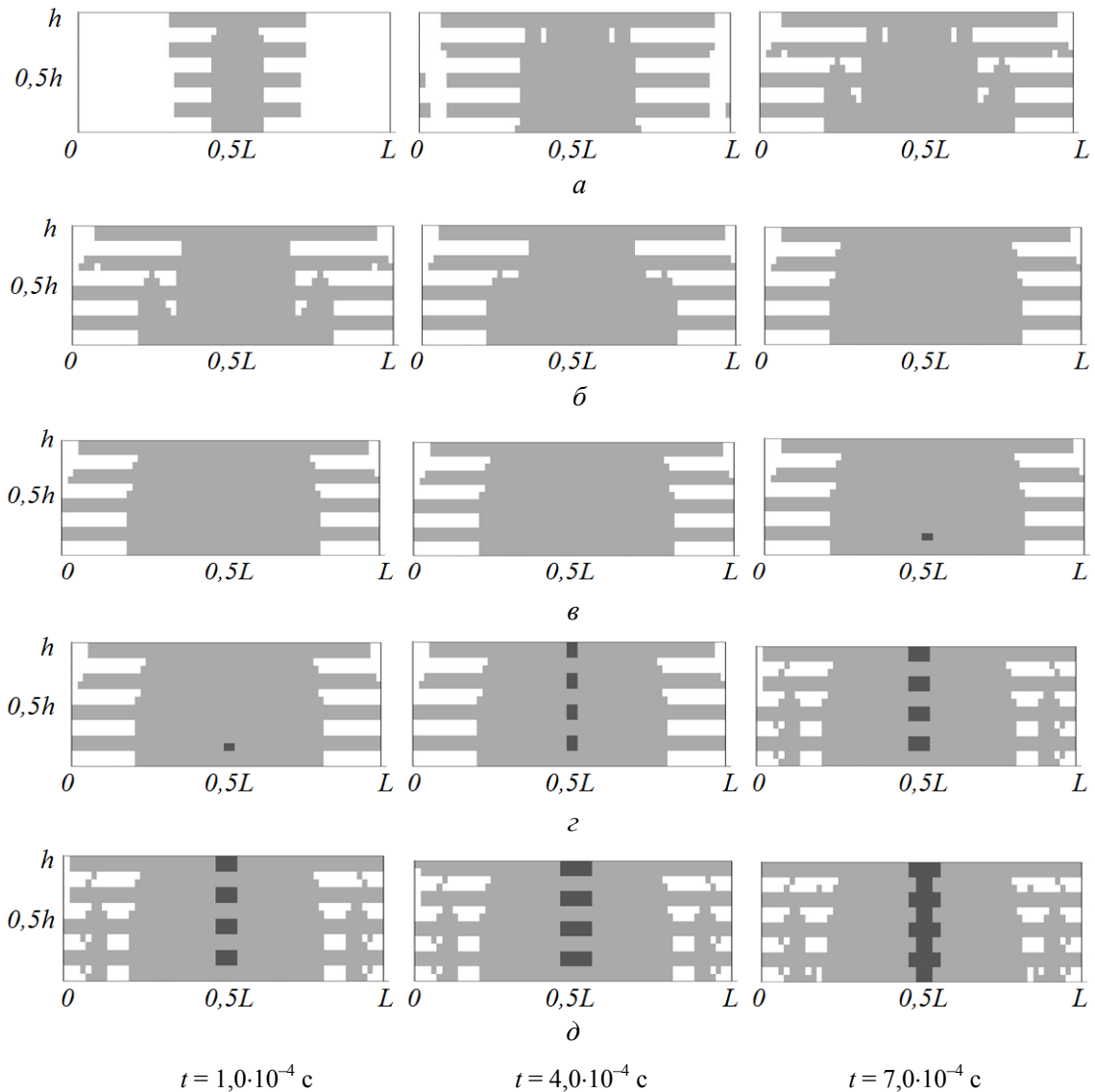


Рис. 3. Кинетика зон разрушения по толщине оболочки: *a* – первое нагружение; *б* – второе нагружение; *в* – третье нагружение; *г* – четвертое нагружение; *д* – пятое нагружение  
 Fig. 3. Kinetics of fracture zones across the shell thickness: *a* – first loading; *b* – second loading; *c* – loading the third; *d* – fourth loading; *e* – the fifth loading

На рис. 4 показаны экспериментальные [3] и расчетные зависимости предельных значений окружных деформаций  $e_{22}^*$  от логарифма числа нагружений  $N$ .

Анализ полученных результатов показал, что для данного типа стеклопластиковых оболочек кольцевая деформация линейно зависит от логарифма числа нагружений до разрушения. Разброс расчетных данных для  $e_{22}^*$  при  $\lg N = 0$  объясняется тем, что результаты получены для различных масс ВВ, при которых разрушение происходило при однократном нагружении. Кроме того, существует граничный уровень предельной нагрузки, при котором разрушение не наблюдается, а число нагружений может быть достаточно большим. Отмеченный эффект может быть связан с тем, что рассматриваемая модель не учитывает накопление повреждений в материале при нагрузках меньше критических. При этом уровень максимальных кольцевых деформаций ниже

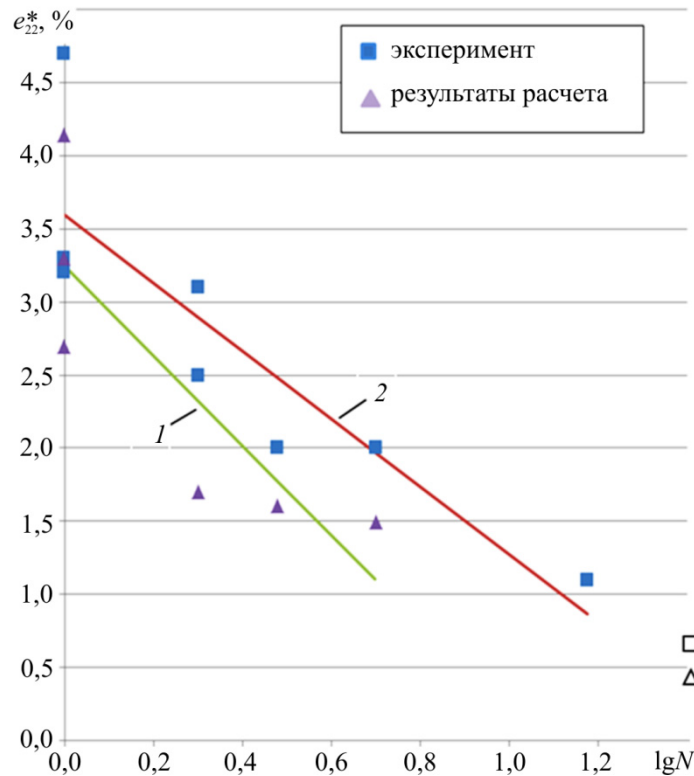


Рис. 4. Максимальные окружные деформации в зависимости от числа нагружений:

■▲ – разрушение; □△ – нет разрушения; 1 – эксперимент; 2 – расчет

Fig. 4. The maximum circumferential strain depending on the number of loadings:

■▲ – destruction; □△ – no destruction; 1 – experiment; 2 – calculation

их предельных значений по сравнению с однократным нагружением примерно в десять раз. Полученные результаты удовлетворительно коррелируют с экспериментальными данными [3].

## Заключение

Предложенная расчетная модель позволяет с удовлетворительной точностью описывать процесс послойного прогрессирующего разрушения стеклопластиковых цилиндрических оболочек при многократных импульсных воздействиях. Значения предельных окружных деформаций при многократном импульсном нагружении примерно на порядок меньше по сравнению с соответствующими предельными значениями при однократном нагружении, что удовлетворительно согласуется с результатами экспериментальных испытаний.

*Работа выполнена при частичном финансировании в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки (проект № 2014/134 2226) и грантов РФФИ (проекты № 15-08-04268, № 16-08-01124), разработка расчетной модели выполнена за счет средств РНФ (проект №16-19-10237).*

## Библиографический список

1. Деформация и разрушение цилиндрических оболочек из стеклопластика при внутреннем импульсном нагружении / В.И. Цыпкин [и др.] // Механика композитных материалов. – 1981. – №2. – С. 249–255.

2. Федоренко А.Г., Сырунин М.А., Иванов А.Г. Влияние структуры армирования ориентированных стеклопластиков на прочность круговых цилиндрических оболочек при взрывном нагружении изнутри // Механика композитных материалов. – 1991. – № 4. – С. 631–640.
3. Сырунин М.А., Федоренко А.Г., Иванов А.Г. Динамическая прочность цилиндрических оболочек из стеклопластика при многократном взрывном нагружении // Физика горения и взрыва. – 1997. – Т. 33. № 6. – С. 102–107.
4. Mark R. Garnich and Venkata M.K. Akula Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber-reinforced polymer composites // Appl. Mech. Rev. – 2009. – Vol. 62. – No. 1. – P. 1–33. DOI: 10.1115/1.3013822
5. Veera Skytta, Olli Saarela, Markus Wallin Progressive failure of composite laminates; analysis vs experiments // Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures. Proceedings of the 16th European Conference of Fracture, Alexandroupolis, Greece, July 3–7, 2006. – Part B. – P. 341–342. DOI: 10.1007/1-4020-4972-2\_168
6. Elisa Pietropaoli Progressive failure analysis of composite structures using a constitutive material model (USERMAT) developed and implemented in ANSYS © // Applied Composite Materials. – 2012. – Vol. 19. – No. 3. – P. 657–668. DOI: 10.1007/s10443-011-9220-0
7. Computational modeling of complex failure mechanisms in laminates / Meer F.P. van der, Sluys L.J., Hallett S.R., Wisnom M.R. // J. Composite Materials. – 2012. – Vol. 46. – No. 5. – P. 603–623. DOI: 10.1177/0021998311410473
8. Gunel M., Kayran A. Non-linear progressive failure analysis of open-hole composite laminates under combined loading // Journal of Sandwich Structures & Materials. – 2013. – Vol. 15. – No. 3. – P. 309–339. DOI: 10.1177/1099636213483651
9. Ellul B., Camilleri D., Betts J.C. A progressive failure analysis applied to fiber-reinforced composite plates subject to out-of-plane bending // Mechanics of Composite Materials. – 2013. – Vol. 49. – No. 6. – P. 605–620. DOI 10.1007/s11029-013-9377-8
10. Chen X., Li Z., Wang H. Progressive failure analysis of an open-hole composite laminate by using the s-version finite-element method // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – Vol. 50. – No. 3. – P. 279–294. DOI: 10.1007/s11029-014-9414-2
11. Shokrieh M.M., Karamnejad A. A investigation of strain rate effects on the dynamic response of a glass/epoxy composite plate under blast loading by using the finite-difference method // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – Vol. 50. – No. 3. – P. 295–310. DOI: 10.1007/s11029-014-9415-1
12. Liu P.F., Xing L.J., Zheng J.Y. Failure analysis of carbon fiber/epoxy composite cylindrical laminates using explicit finite element method // Composites Part B–Engineering. – 2014. – Vol. 56. – P. 54–61. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.08.017
13. Jayashree Sengupta, Arghya Ghosh, Dipankar Chakravorty Progressive failure analysis of laminated composite cylindrical shell roofs // Journal of Failure Analysis and Prevention. – 2015. – Vol. 15. – No. 3. – P. 390–400. DOI: 10.1007/s11668-015-9951-6
14. Finite element analysis of progressive failure and strain localization of carbon fiber/epoxy composite laminates by ABAQUS / P.F. Liu, Y.H. Yang, Z.P. Gu, J.Y. Zheng // Applied Composite Materials. – 2015. – Vol. 22. – No. 6. – P. 711–731. DOI: 10.1007/s10443-014-9432-1
15. Shroff S., Kassapoglou C. Progressive failure modelling of impacted composite panels under compression // Journal of Reinforced Plastics and Composites – 2015. – Vol. 34. – No. 19. – P. 1603–1614. DOI: 10.1177/0731684415592485
16. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
17. Шаповалов Л.А. Об учете поперечного обжатия в уравнениях нелинейной динамики оболочек // Изв. РАН МТТ. – 1997. – № 3. – С. 156–168.
18. Браутман Л., Крок Р. Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – 568 с.
19. Композиционные материалы: справочник / В.В. Васильев [и др.]; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

20. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 400 с.
21. Предельная деформируемость и прочность базальтопластиковых оболочек при внутреннем взрывном нагружении / В.Н. Русак [и др.] // ПМТФ. – 2002. – Т. 43, № 1. – С. 186–195.
22. Абросимов Н.А., Елесин А.В., Пирогов С.А. Численный анализ неосесимметричного деформирования и прогрессирующего разрушения слоистых композитных цилиндрических оболочек при импульсном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – Т. 77, № 1. – С. 23–32.

## References

1. Deformatsiia i razrushenie tsilindricheskikh obolochek iz stekloplastika pri vnutrennem impul'snom nagruzenii / V.I. Tsytkin [et al.] [Deformation and fracture of cylindrical shells made of fiberglass with an internal impulse loading]. *Mechanics of Composite Materials*, 1981, no. 2, pp. 249-255.
2. Fedorenko A.G., Syrunin M.A., Ivanov A.G. Vliianie struktury armirovaniia orientiro-vannykh stekloplastikov na prochnost' krugovykh tsilindricheskikh obolochek pri vzryvnom nagru-zhenii iznutri. Mekhanika kompozitnykh materialov [Impact oriented fiberglass reinforcement structure strength of circular cylindrical shells under explosive loading inside]. *Mechanics of Composite Materials*, 1991, no. 4, pp. 631-640.
3. Syrunin M.A., Fedorenko A.G., Ivanov A.G. Dinamicheskaiia prochnost' tsilindricheskikh obolochek iz stekloplastika pri mnogokratnom vzryvnom nagruzenii [Dynamic strength of cylindrical shells made of fiberglass with multiple explosive loading]. *Physics of combustion and explosion*, 1997, vol. 33, no. 6, pp. 102-107.
4. Mark R. Garnich and Venkata M.K. Akula Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber-reinforced polymer composites *Appl. Mech. Rev.*, 2009, vol. 62, no. 1, pp. 1-33, DOI: 10.1115/1.3013822
5. Veera Skytta, Olli Saarela, Markus Wallin Progressive failure of composite laminates; analysis vs experiments, *Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures*, Proceedings of the 16th European Conference of Fracture, Alexandroupolis, Greece, July 3–7, 2006, Part B, pp. 341-342. DOI: 10.1007/1-4020-4972-2\_168
6. Elisa Pietropaoli Progressive failure analysis of composite structures using a constitutive material model (USERMAT) developed and implemented in ANSYS ©, *Applied Composite Materials*, 2012, vol. 19, no. 3, pp. 657-668. DOI: 10.1007/s10443-011-9220-0
7. Meer F.P. van der, Sluys L.J., Hallett S.R., Wisnom M.R. Computational modeling of complex failure mechanisms in laminates, *Journal Composite Materials*, 2012, vol. 46, no. 5, pp. 603-623. DOI: 10.1177/0021998311410473
8. Gunel M., Kayran A. Non-linear progressive failure analysis of open-hole composite laminates under combined loading, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 309-339. DOI: 10.1177/1099636213483651
9. Ellul B., Camilleri D., Betts J.C. A progressive failure analysis applied to fiber-reinforced composite plates subject to out-of-plane bending, *Mechanics of Composite Materials*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 605-620. DOI 10.1007/s11029-013-9377-8
10. Chen X., Li Z., Wang H. Progressive failure analysis of an open-hole composite laminate by using the s-version finite-element method, *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 279-294. DOI: 10.1007/s11029-014-9414-2
11. Shokrieh M. M., Karamnejad A. A investigation of strain rate effects on the dynamic response of a glass/epoxy composite plate under blast loading by using the finite-difference method, *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 295-310. DOI: 10.1007/s11029-014-9415-1
12. Liu P.F., Xing, L.J., Zheng, J.Y. Failure analysis of carbon fiber/epoxy composite cylindrical laminates using explicit finite element method, *Composites Part B-Engineering*, 2014, vol. 56, pp. 54-61. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.08.017

13. Jayashree Sengupta, Arghya Ghosh. Dipankar Chakravorty Progressive failure analysis of laminated composite cylindrical shell roofs. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 390-400. DOI: 10.1007/s11668-015-9951-6

14. Liu P.F., Yang Y.H., Gu Z.P., Zheng J.Y. Finite element analysis of progressive failure and strain localization of carbon fiber/epoxy composite laminates by ABAQUS, *Applied Composite Materials*, 2015, vol. 22, no. 6, pp. 711-731. DOI: 10.1007/s10443-014-9432-1

15. Shroff S., Kassapoglou C. Progressive failure modelling of impacted composite panels under compression, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2015, vol. 34, no. 19, pp. 1603-1614. DOI: 10.1177/0731684415592485

16. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruksii iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite structures]. Moscow: Engineering, 1988, 272 p.

17. Shapovalov L.A. Ob uchete poperechnogo obzhatia v uravneniiakh nelineinoi dinamiki obolochek [On account of the transverse compression in the equations of the nonlinear dynamics of shells]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 1997, no. 3, pp. 156-168.

18. Brautman L., Krok R. *Kompozitsionnye materialy. vol. 2: Mechanics of Composite Materials*. Moscow: Mir, 1978. 568 p.

19. Vasil'ev V.V. [et al.] *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* / [Composite materials: The Handbook]. Pod obshch. red. Vasil'eva V.V., Tarnopol'skogo Iu.M. Moscow: Mashinostroenie, 1990. 512 p.

20. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii* [Nonlinear problems of the dynamics of composite structures]. Nizhegorodskii universitet, 2002. 400 p.

21. Rusak V.N. [et.al.] *Predel'naia deformiruemost' i prochnost' bazal'toplastikovykh obolochek pri vnutrennem vzryvnom nagruzhenii*. [Limiting deformability and strength of basalt plastic shells under internal explosive loading ]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 1, pp. 186-195.

22. Abrosimov N.A., Elesin A.V., Pirogov S.A. *Chislennyi analiz neosesimmetrichnogo deformirovaniia i progressiruiushchego razrusheniia sloistnykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek pri impul'snom nagruzhenii* [Numerical analysis of non-axisymmetric deformation and progressive failure of laminated composite cylindrical shells under impact loading]. *Journal of problems of strength and plasticity*, 2015, vol. 77, no 1, pp. 23-32.