



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.3.01

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ SH-ВОЛНЫ В ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКАХ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Т.И. Белянкова^{1,2}, В.В. Калинин^{1,2}

¹Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 3 июня 2016 г.
Принята: 29 июля 2016 г.
Опубликована: 30 сентября 2016 г.

Ключевые слова:

пьезоэлектрическая структура, неоднородное покрытие, функционально градиентный материал, гармонические колебания, сдвиговые горизонтально поляризованные (SH) волны, волна Гуляева-Блюштейна, поверхностные акустические волны (ПАВ), начальные механические напряжения, однородное начально деформированное состояние (НДС)

АННОТАЦИЯ

Предложена модель сегнетоэлектрической структуры, состоящей из однородного пьезоактивного полупространства с неоднородным покрытием, представляющим собой либо слой, либо пакет однородных или функционально-градиентных пьезоактивных слоев. Предполагается, что полупространство, равно как и покрытие, являющиеся в естественном ненапряженном состоянии пьезоэлектриками гексагональной сингонии класса $6mm$, находятся в условиях воздействия начальных механических напряжений. Исследования динамических свойств функционально-ориентированных предварительно напряженных структур проводятся в лагранжевой (материальной) прямоугольной системе координат, использованы линеаризованные определяющие соотношения и уравнения движения. Методами операционного исчисления краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае однородных составляющих структуры функция Грина строится в замкнутой форме аналитическим образом на основе решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае неоднородных (функционально-градиентных) составляющих система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами специальной заменой сводится к системе начальных задач Коши. В этом случае функция Грина строится численно на основе использования численных процедур Рунге-Кутты с модификацией Мерсона, которая позволяет эффективно контролировать погрешность вычислений. При построении функции Грина сегнетоэлектрической структуры с неоднородным покрытием использован матричный подход, позволяющий сочетать аналитические и численные методы построения отдельных ее составляющих. Изучено влияние вида и величины начальных напряжений на особенности распространения поверхностных волн в гетероструктурах. Установлены условия, при которых действие начальных механических напряжений приводит к увеличению скорости волны Гуляева-Блюштейна относительно скорости исходного материала, а также условия, при которых пьезоэлектрическая структура перестает быть слабо неоднородной.

© ПНИПУ

© Калинин Валерий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: kalin@ssc-ras.ru
Белянкова Татьяна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, e-mail: tbelen415@mail.ru

Valery V. Kalinchuk – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: kalin@ssc-ras.ru
Tatyana I. Belyankova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: tbelen415@mail.ru

SURFACE SH-WAVES IN PRE-STRESSED PIEZOELECTRICS WITH FUNCTIONALLY GRADED

T.I. Belyankova^{1,2}, V.V. Kalinchuk^{1,2}

¹Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation

²Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 3 June 2016
Accepted: 29 July 2016
Published: 30 September 2016

Keywords:

piezoelectric structure, inhomogeneous coating, functionally graded material, harmonic oscillations, shear horizontally polarized (SH) waves, Bleustein–Gulyaev wave, surface acoustic waves (SAW), initial mechanical stresses, homogeneous initially deformed state (IDS)

ABSTRACT

A model of a ferroelectric structure consisting of a homogeneous piezoelectric half-space with an inhomogeneous coating which is either a layer or a packet of homogeneous or functionally graded piezoelectric layers is suggested. It is assumed that the half-space, as well as the coating, being piezoelectrics of the hexagonal symmetry of a 6 mm class in their intrinsic state, are in the conditions of the action of the initial mechanical stresses. Investigations of dynamic properties of the functionally oriented pre-stressed structures are carried out in Lagrangian rectangular coordinate system. Linearized constitutive relations and motion equations are used. The boundary problem for the system of differential equations in partial derivatives is reduced to the system of ordinary differential equations by means of the operational calculus. In case of the structure homogeneous components, Green's function is constructed analytically in a closed form on the basis of solving the system of differential equations with constant coefficients. In case of inhomogeneous (functionally graded) components, the system of differential equations with variable coefficients is reduced to the system of Cauchy initial problems by means of a special substitution. In this case, Green's function is constructed numerically on using Runge-Kutta numerical methods with Merson modification, which allows us to control the error of calculations in an effective way. When constructing Green's function of the ferroelectric structure with an inhomogeneous coating, we used the matrix approach that allows us to combine analytical and numerical methods of constructing its isolated components. The influence of the type and the value of the initial stresses on the peculiarities of the surface wave propagation in heterostructures is studied. It became possible to determine the conditions under which the action of the initial mechanical stresses leads to the increase of Bleustein–Gulyaev wave velocity with respect to the velocity of the original material, as well as the conditions under which the piezoelectric structure ceases to be a weakly inhomogeneous one.

© PNRPU

Введение

Проблема распространения поверхностных акустических волн является одной из актуальных проблем современной механики. С одной стороны, это связано с широким спектром приложений в акустике, геофизике, сейсмологии, дефектоскопии и др., с другой стороны, с бурным развитием технологий создания новых пьезоэлектрических материалов с уникальными, ранее не наблюдававшимися в природе свойствами. Возможность создания на их основе принципиально новых типов электронных приборов и устройств обусловило значительный рост работ, посвященных математическому моделированию процессов распространения волн в функционально-градиентных средах [1–6]. В [1] построена общая теория электродинамики сплошной среды, приведены основные типы термодинамического потенциала, предложены подходы к построению линеаризованных соотношений динамики преднапряженной электроупругой среды. В [2–4] приведены определяющие соотношения динамики сплошной пьезоактивной среды при наличии начальных механических или электростатических полей. В [5–7] дан вывод определяющих соотношений динамики упругой и пьезоактивной среды в произвольной, в общем случае криволинейной системе координат. Особенности распространения сдвиговых волн в слоистых преднапряженных средах рассмотрены в [8–12]. В [8–11] изучено влияние начальных напряжений на скорости распространения волн Лява и Гуляева-Блюштейна. В [12] изучены вопросы распространения волн

в слабо неоднородных средах, неоднородность которых обусловлена наличием начальных напряжений или поляризации. Показано, что при специальных условиях в слабо неоднородном полупространстве могут возникать вторые моды поверхностных волн типа волн Гуляева-Блюштейна. В [13–16] исследуются процессы распространения волн в функционально-градиентных пьезоактивных средах, параметры неоднородности которых допускают построение аналитического решения в той или иной форме. В [13] исследованы особенности распространения волн Гуляева-Блюштейна в среде, все характеристики которой изменяются по одному и тому же закону. Рассмотрены случаи полиномиальной и экспоненциальной зависимостей. Исследовано влияние параметра неоднородности на скорость, дисперсию, коэффициенты затухания, глубину профилей, электромеханический коэффициент связи. В [14] исследованы особенности распространения волн Гуляева-Блюштейна в среде, характеристики которой изменяются по специальному, допускающему аналитическое решение закону. Изучено влияние параметра неоднородности на характеристики волнового поля. В [15] изучаются волны Лява в среде из поляризованной керамики с функционально-градиентным покрытием. Для построения аналитического решения используется асимптотический подход. Исследовано влияние параметра неоднородности на дисперсионные соотношения, в частности на фазовые скорости поверхностных волн, а также на электромеханический коэффициент связи. В [16] изучается влияние параметра неоднородности и начальных напряжений на характеристики волнового поля.

В настоящей работе предложена модель сегнетоэлектрической структуры, состоящей из однородного пьезоактивного полупространства с неоднородным покрытием, представляющим собой либо слой, либо пакет однородных или функционально-градиентных пьезоактивных слоев. Предполагается, что полупространство, равно как и покрытие, находятся в условиях воздействия начальных механических напряжений, свойства покрытия описываются произвольными функциями. Для этого случая система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами специальной заменой сводится к системе начальных задач Коши. Функция Грина строится численно на основе использования процедур Рунге-Кутты с модификацией Мерсона, которая позволяет эффективно контролировать погрешность вычислений. При построении функции Грина сегнетоэлектрической структуры с неоднородным покрытием использован матричный подход, позволяющий сочетать аналитические и численные методы построения отдельных ее составляющих. В рамках линеаризованной теории электроупругости в работе исследованы особенности распространения поверхностных волн в сегнетоэлектрических гетероструктурах с учетом различного характера механических воздействий на составляющие структуры. Изучено влияние величины наведенной деформации, вида и характера преднапряжений в составляющих структуры на особенности поведения и скорость распространения поверхностных акустических волн (ПАВ) для ряда наиболее востребованных сегнетоэлектриков. Установлены условия, при которых действие начальных механических напряжений приводит к увеличению скорости волны Гуляева-Блюштейна относительно скорости исходного материала, а также условия, при которых пьезоэлектрическая структура перестает быть слабо неоднородной.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о распространении сдвиговых горизонтально поляризованных волн, движущихся в направлении x_1 по поверхности составной преднапряженной пьезоактивной среды. Полагаем, что колебания среды вызваны действием удаленного ис-

точника гармонических колебаний, среда представляет собой однородное преднапряженное полупространство $x_2 \leq 0$, $|x_1|, |x_3| \leq \infty$ с преднапряженным покрытием (рис. 1 а, б).

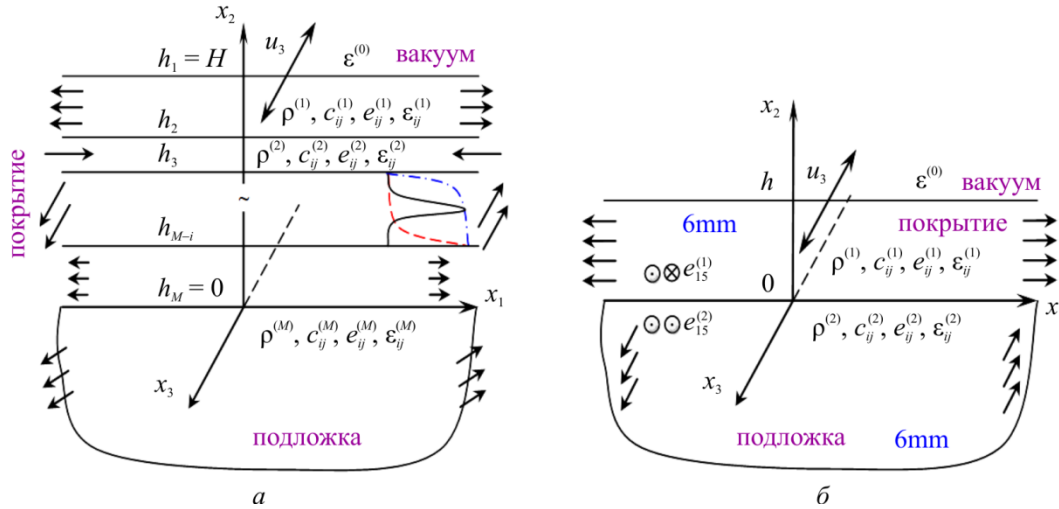


Рис. 1. Геометрия задачи
Fig. 1. Geometry of the problem

Покрытие моделируется либо одним слоем $0 \leq x_2 \leq h = H$ (см. рис. 1, б), либо пакетом $|x_1|, |x_3| \leq \infty$ $h_{k+1} \leq x_2 \leq h_k$, $k = 1, 2, \dots, M - 1$ как однородных, так и неоднородных слоев из функционально-градиентного материала. В качестве исходного материала структуры используется пьезоэлектрик класса 6 mm гексагональной сингонии, ось симметрии которого в естественном состоянии (ЕС) совпадает с осью x_3 , векторы поляризации составляющих покрытия и полупространства совпадают либо противоположны по направлению. Начально-деформированное состояние (НДС) каждой из составляющих структуры однородно и наводится за счет действия начальных механических напряжений, внешние начальные электрические воздействия отсутствуют [1–7, 17]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \quad \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad v_i = \text{const}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{R}, \mathbf{r} – радиус-векторы точки среды в начально-деформированном и естественном состоянии соответственно; $v_i = 1 + \delta_i$, δ_i – относительные удлинения волокон, направленных в естественной конфигурации вдоль осей, совпадающих с декартовыми координатами; δ_{ij} – символ Кронекера. Неоднородность начального напряженного состояния составляющих структуры вызвана только неоднородностью физических свойств. Исследования проводятся в лагранжевой системе координат, совпадающей с прямоугольной декартовой системой, режим колебаний полагается установившимся, динамический процесс удовлетворяет условиям

$$u_1^{(n)} = u_2^{(n)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \quad u_k^{(n)} = u_k^{(n)}(x_1, x_2), \quad u_3^{(0)} = 0, \quad k = 3, 4, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

При этом для слабо неоднородной пьезоэлектрической структуры (см. рис. 1, а, б) в ЕС выполняются соотношения:

для однородных составляющих [6, 7]

$$\rho_0^{(n)} = \rho_0^{(M)}, \quad c_{ij}^{0(n)} = c_{ij}^{0(M)}, \quad e_{ij}^{0(n)} = e_{ij}^{0(M)}, \quad \epsilon_{ij}^{0(n)} = \epsilon_{ij}^{0(M)} \quad \text{либо} \quad e_{15}^{0(n)} = -e_{15}^{0(M)}; \quad (3)$$

для неоднородных составляющих [12]

$$\rho^{(n)} = \rho_0^{(M)} f_\rho^{(n)}(x_2), \quad c_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{0(M)} f_c^{(n)}(x_2), \quad e_{ij}^{(n)} = e_{ij}^{0(M)} f_e^{(n)}(x_2), \quad \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{0(M)} f_\varepsilon^{(n)}(x_2). \quad (4)$$

Далее используем безразмерные параметры: линейные параметры отнесены к характерной толщине k -го слоя $l' = l(h_0^{(k)})^{-1}$, плотность – к плотности полупространства $\rho'^{(n)} = \rho^{(n)} / \rho_0^{(M)}$, упругие параметры – к модулю сдвига подстилающего полупространства $c'_{ij} = c_{ij}^{(n)} / c_{44}^{0(M)}$. При переходе к безразмерным параметрам пьезоэлектрических и диэлектрических констант используется множитель $\xi = 10^{10}$ В/м, при этом $e'_{ij} = e_{ij}^{(n)} \xi / c_{44}^{0(M)}$, $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(n)} \varepsilon^{(0)} \xi^2 / c_{44}^{0(M)}$ ($\varepsilon^{(0)}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума). Далее штрихи опускаем.

В качестве безразмерной частоты используется либо параметр $\kappa_2 = \omega h / V_S^{(M)}$, либо $\kappa_{2e} = \omega h / V_{Se}^{(M)}$ (где $V_S^{(M)} = \sqrt{c_{44}^{0(M)} / \rho_0^{(M)}}$ – скорость сдвиговой волны полупространства и $V_{Se}^{(M)} = \sqrt{(c_{44}^{0(M)} + e_{15}^{0(M)2} / \varepsilon_{11}^{0(M)}) / \rho_0^{(M)}}$ – скорость сдвиговой волны полупространства с учетом пьезоэлектрических свойств в ЕС [18]).

В рамках принятых предположений краевая задача о колебаниях преднапряженной электроупругой среды $x_2 \leq H$ описывается линеаризованными уравнениями [6–7, 12]:

$$\nabla_0 \cdot \Theta^{(n)} = \rho_0^{(n)} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)}, \quad (5)$$

$$\nabla_0 \cdot \Delta^{(n)} = 0, \quad (6)$$

для вакуума $x_2 > H$

$$\Delta \varphi^{(0)} = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями **на поверхности**:

отсутствие механических воздействий:

$$\mathbf{n} \cdot \Theta^{(1)} \Big|_{x_2=H} = 0, \quad (8)$$

электрически свободная поверхность:

$$\mathbf{n} \cdot \Delta^{(1)} \Big|_{x_2=H} = \mathbf{n} \cdot \Delta^{(0)} \Big|_{x_2=H}, \quad \varphi^{(1)} \Big|_{x_2=H} = \varphi^{(0)} \Big|_{x_2=H} \quad (9)$$

металлизированная поверхность:

$$\varphi^{(1)} \Big|_{x_2=H} = 0, \quad (10)$$

на границе раздела сред ($i = 1, 2, \dots, M - 1$)

$$\mathbf{u}^{e(i)} \Big|_{x_2=h_i} = \mathbf{u}^{e(i+1)} \Big|_{x_2=h_i}, \quad \mathbf{n} \cdot \Theta^{(i)} \Big|_{x_2=h_i} = \mathbf{n} \cdot \Theta^{(i+1)} \Big|_{x_2=h_i}, \quad \mathbf{n} \cdot \Delta^{(i)} \Big|_{x_2=h_i} = \mathbf{n} \cdot \Delta^{(i+1)} \Big|_{x_2=h_i}, \quad (11)$$

на бесконечности

$$\mathbf{u}^{e(M)} \Big|_{x_2 \rightarrow -\infty} \downarrow 0, \quad \mathbf{u}^{e(0)} \Big|_{x_2 \rightarrow \infty} \downarrow 0. \quad (12)$$

Здесь ∇_0 – оператор Гамильтона; $\mathbf{u}^{e(n)} = \{u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}\}$ – расширенный вектор перемещений; \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности среды определены в системе координат, связанной с естественным состоянием (ЕС); $\rho_0^{(n)}$ – плотность материала n -составляющей в ЕС; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа. Верхний индекс « (n) » соответствует номеру среды, составляющей структуру ($n=0$ – вакуум, $n=1$ – поверхностный слой, $n=M$ – полупространство). Линеаризованные тензор напряжений $\Theta^{(n)}$ и вектор индукции $\Lambda^{(n)}$ с учетом (1) представляются в виде [12]

$$\Theta_{lk}^{(n)} = c_{lksp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)*} \varphi_{,p}^{(n)}, \quad D_l^{(n)} = e_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{(n)*} \varphi_{,p}^{(n)}, \quad (13)$$

где $c_{lksp}^{(n)*} = P_{lp}^{(n)} \delta_{ks} + v_k^{(n)} v_s^{(n)} c_{lksp}^{(n)\times}$, $e_{lsp}^{(n)*} = v_s^{(n)} e_{lsp}^{(n)}$, $\varepsilon_{lp}^{(n)*} = \varepsilon_0 v_1^{(n)} v_2^{(n)} v_3^{(n)} \left(v_l^{(n)}\right)^{-2} \delta_{lp} + \beta_{lp}^{(n)}$. (14)

Участвующие в (14) компоненты тензора Кирхгофа $P_{lp}^{(n)}$, а также упругие константы $c_{lksp}^{(n)\times}$ зависят как от свойств материала, так и от вида начального напряженного состояния среды [1, 6, 7, 12]:

$$P_{lp}^{(n)} = \frac{1}{2} c_{qjlp}^{(n)} \delta_{qj} \left(\left(v_q^{(n)} \right)^2 - 1 \right) - e_{jlp}^{(n)} W_j^{(n)} + \frac{1}{8} \delta_{mn} \delta_{qj} c_{mnqjlp}^{(n)} \left(\left(v_q^{(n)} \right)^2 - 1 \right) \left(\left(v_m^{(n)} \right)^2 - 1 \right),$$

$$c_{qjlp}^{(n)\times} = \frac{\partial^2 \chi^{(n)}}{\partial S_{lp}^{(n)} \partial S_{ij}^{(n)}} = c_{qjlp}^{(n)} + \frac{1}{2} c_{mnqjlp}^{(n)} S_{mn}^{(n)} = c_{qjlp}^{(n)} + \frac{1}{4} \delta_{mn} c_{mnqjlp}^{(n)} \left(\left(v_m^{(n)} \right)^2 - 1 \right). \quad (15)$$

Здесь использована упрощенная запись термодинамического потенциала χ [1, 6, 7]:

$$\chi^{(n)} = \frac{1}{2} c_{qjkl}^{(n)} S_{qj}^{(n)} S_{kl}^{(n)} - e_{jkl}^{(n)} W_j^{(n)} S_{kl}^{(n)} - \frac{1}{2} \beta_{qj}^{(n)} W_q^{(n)} W_j^{(n)} + \frac{1}{6} c_{mnqjkl}^{(n)} S_{mn}^{(n)} S_{qj}^{(n)} S_{kl}^{(n)},$$

где $S_{kj}^{(n)}$ – компоненты тензора деформаций Коши в случае однородной деформации (1) определены формулами

$$S_{ij}^{(n)} = 1/2 \delta_{ij} \left(\left(v_i^{(n)} \right)^2 - 1 \right),$$

где $W_j^{(n)}$ – компоненты материального вектора электрической индукции; $c_{qjkl}^{(n)}$ и $c_{mnqjkl}^{(n)}$ – упругие константы II и III порядка; $\beta_{kp}^{(n)}$ – константы диэлектрической восприимчивости, связанные с константами диэлектрической проницаемости соотношениями

$$\varepsilon_{kp}^{(n)} = \varepsilon_0 \delta_{kp} + \beta_{kp}^{(n)}.$$

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения

$$\theta_{lksp} = c_{lksp}^*, \quad \theta_{lk4p} = v_k e_{plk}, \quad \theta_{l4sp} = v_s e_{lsp}, \quad \theta_{l44p} = -\varepsilon_{lp}^*, \quad k, l, s, p = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Подставляя выражения компонент тензора напряжений и вектора индукции (13) с учетом (2), свойств (3), (4), обозначений (16) в (5)–(12) для преднапряженных однородных составляющих структуры, получаем (индексами после запятой отмечены производные по соответствующим координатам)

$$\theta_{1331}^{(n)} u_{3,11}^{(n)} + \theta_{2332}^{(n)} u_{3,22}^{(n)} + \theta_{1341}^{(n)} u_{4,11}^{(n)} + \theta_{2342}^{(n)} u_{4,22}^{(n)} = \rho_0^{(n)} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (17)$$

$$\theta_{1431}^{(n)} u_{3,11}^{(n)} + \theta_{2432}^{(n)} u_{3,22}^{(n)} + \theta_{1441}^{(n)} u_{4,11}^{(n)} + \theta_{2442}^{(n)} u_{4,22}^{(n)} = 0,$$

для преднапряженных функционально градиентных составляющих

$$\theta_{1331}^{(n)} u_{3,11}^{(n)} + \theta_{2332}^{(n)} u_{3,22}^{(n)} + \theta_{1341}^{(n)} u_{4,11}^{(n)} + \theta_{2342}^{(n)} u_{4,22}^{(n)} + \theta_{2332,2}^{(n)} u_{3,2}^{(n)} + \theta_{2342,2}^{(n)} u_{4,2}^{(n)} = \rho_0^{(n)} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (18)$$

$$\theta_{1431}^{(n)} u_{3,11}^{(n)} + \theta_{2432}^{(n)} u_{3,22}^{(n)} + \theta_{1441}^{(n)} u_{4,11}^{(n)} + \theta_{2442}^{(n)} u_{4,22}^{(n)} + \theta_{2432,2}^{(n)} u_{3,2}^{(n)} + \theta_{2442,2}^{(n)} u_{4,2}^{(n)} = 0,$$

для вакуума

$$u_{4,11}^{(0)} + u_{4,22}^{(0)} = 0, \quad (19)$$

граничные условия

$$\Theta_{23}^{(1)} \Big|_{x_2=H} = \left[\theta_{2332}^{(1)} u_{3,2}^{(1)} + \theta_{2342}^{(1)} u_{4,2}^{(1)} \right] \Big|_{x_2=H} = 0, \quad (20)$$

$$D_2^{(1)} \Big|_{x_2=H} = \left[\theta_{2432}^{(1)} u_{3,2}^{(1)} + \theta_{2442}^{(1)} u_{4,2}^{(1)} \right] \Big|_{x_2=H} = D_2^{(0)} \Big|_{x_2=H} = \left[\theta_{2442}^{(0)} u_{4,2}^{(0)} \right] \Big|_{x_2=H}, \quad u_4^{(1)} \Big|_{x_2=H} = u_4^{(0)} \Big|_{x_2=H}, \quad (21)$$

$$u_4^{(1)} \Big|_{x_2=H} = 0, \quad (22)$$

$$\mathbf{u}^{e(m)} \Big|_{x_2=h_m} = \mathbf{u}^{e(m+1)} \Big|_{x_2=h_m}, \quad \Theta_{23}^{(m)} \Big|_{x_2=h_m} = \Theta_{23}^{(m+1)} \Big|_{x_2=h_m}, \quad D_2^{(m)} \Big|_{x_2=h_m} = D_2^{(m+1)} \Big|_{x_2=h_m}, \quad (23)$$

$$\mathbf{u}^{e(M)} \Big|_{x_2 \rightarrow -\infty} \downarrow 0, \quad \Phi^{(0)} \Big|_{x_2 \rightarrow \infty} \downarrow 0. \quad (24)$$

В рамках настоящей работы исследуем две крайних задачи о распространении поверхностных горизонтально поляризованных волн в преднапряженных пьезоэлектриках с покрытием [1, 6–12]:

задача I – со свободной поверхностью, описывается уравнениями движения (17)–(19) с граничными условиями (20), (21), (23), (24);

задача II – с металлизированной поверхностью, описывается уравнениями движения (17)–(19) с граничными условиями (20), (22)–(23).

2. Решение крайних задач. Дисперсионное уравнение для преднапряженного пьезоактивного полупространства с преднапряженным покрытием

При решении крайних задач I и II используем преобразование Фурье по координате x_1 , α – параметр преобразования. Движение пьезоэлектрической структуры в трансформантах Фурье имеет вид:

для преднапряженных однородных составляющих

$$\theta_{2332}^{(n)} U_3^{(n)''} - \left(\alpha^2 \theta_{1331}^{(n)} - \rho^{(n)} \kappa_2^2 \right) U_3^{(n)} + \theta_{2342}^{(n)} U_4^{(n)''} - \alpha^2 \theta_{1341}^{(n)} U_4^{(n)} = 0, \quad (25)$$

$$\theta_{2432}^{(n)} U_3^{(n)''} - \alpha^2 \theta_{1431}^{(n)} U_3^{(n)} + \theta_{2442}^{(n)} U_4^{(n)''} - \alpha^2 \theta_{1441}^{(n)} U_4^{(n)} = 0;$$

для преднапряженных функционально градиентных составляющих

$$\theta_{2332}^{(n)} U_3^{(n)''} - \left(\alpha^2 \theta_{1331}^{(n)} - \rho^{(n)} \kappa_2^2 \right) U_3^{(n)} + \theta_{2342}^{(n)} U_4^{(n)''} - \alpha^2 \theta_{1341}^{(n)} U_4^{(n)} + \theta_{2332}^{(n)} 'U_3^{(n)'} + \theta_{2342}^{(n)} 'U_4^{(n)'} = 0, \quad (26)$$

$$\theta_{2432}^{(n)} U_3^{(n)''} - \alpha^2 \theta_{1431}^{(n)} U_3^{(n)} + \theta_{2442}^{(n)} U_4^{(n)''} - \alpha^2 \theta_{1441}^{(n)} U_4^{(n)} + \theta_{2432}^{(n)} 'U_3^{(n)'} + \theta_{2442}^{(n)} 'U_4^{(n)'} = 0;$$

для вакуума

$$U_4^{(0)n} - \alpha^2 U_4^{(0)} = 0, \quad (27)$$

с граничными условиями

$$\Theta_{23}^{F(1)} \Big|_{x_2=H} = \left[\theta_{2332}^{(1)} U_3^{(1)'} + \theta_{2342}^{(1)} U_4^{(1)'} \right] \Big|_{x_2=H} = 0, \quad (28)$$

$$D_2^{F(1)} \Big|_{x_2=H} = \left[\theta_{2432}^{(1)} U_3^{(1)'} + \theta_{2442}^{(1)} U_4^{(1)'} \right] \Big|_{x_2=H} = D_2^{F(0)} \Big|_{x_2=H} = \left[\theta_{2442}^{(0)} U_4^{(0)'} \right] \Big|_{x_2=H}, \quad (29)$$

$$U_4^{(1)} \Big|_{x_2=H} = U_4^{(0)} \Big|_{x_2=H},$$

$$U_4^{(1)} \Big|_{x_2=H} = 0, \quad (30)$$

$$\mathbf{U}^{\epsilon(m)} \Big|_{x_2=h_m} = \mathbf{U}^{\epsilon(m+1)} \Big|_{x_2=h_m}, \quad \Theta_{23}^{F(m)} \Big|_{x_2=h_m} = \Theta_{23}^{F(m+1)} \Big|_{x_2=h_m}, \quad D_2^{F(m)} \Big|_{x_2=h_m} = D_2^{F(m+1)} \Big|_{x_2=h_m}, \quad (31)$$

$$\mathbf{U}^{\epsilon(M)} \Big|_{x_2 \rightarrow -\infty} \downarrow 0, \quad U_4^{(0)} \Big|_{x_2 \rightarrow -\infty} \downarrow 0 \quad (32)$$

Решение задач (25)–(27) с граничными условиями (28)–(32) в трансформантах Фурье для однородных составляющих покрытия ищем в виде ($p = 3, 4, n = 1, 2, \dots, M - 1$) [6, 7, 12]

$$U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^2 f_{pk}^{(n)} \left[c_k^{(n)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_2 + c_{k+2}^{(n)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_2 \right], \quad (33)$$

для неоднородных составляющих

$$U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^4 c_k^{(n)} y_{kp}^{(n)}(\alpha, x_2), \quad (34)$$

для полупространства и вакуума

$$U_p^{(M)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^2 f_{pk}^{(M)} c_k^{(M)} e^{\sigma_k^{(M)} x_2}, \quad U_4^{(0)}(\alpha, x_2) = c_1^{(0)} e^{-\alpha x_2}. \quad (35)$$

Участвующие в представлениях (33), (35) $\sigma_k^{(n)}$ удовлетворяют характеристическому уравнению $\det \mathbf{M}_\sigma^{(n)}(\sigma^{(n)}) = 0$.

$$\mathbf{M}_\sigma^{(n)}(\sigma^{(n)}) = \begin{pmatrix} \theta_{2332}^{(n)} (\sigma^{(n)})^2 - (\alpha^2 \theta_{1331}^{(n)} - \rho^{(n)} \kappa_2^2) & \theta_{2342}^{(n)} (\sigma^{(n)})^2 - \alpha^2 \theta_{1341}^{(n)} \\ \theta_{2432}^{(n)} (\sigma^{(n)})^2 - \alpha^2 \theta_{1431}^{(n)} & \theta_{2442}^{(n)} (\sigma^{(n)})^2 - \alpha^2 \theta_{1441}^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Коэффициенты $f_{pk}^{(n)}$ определяются из решения однородной системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов $\mathbf{M}_\sigma^{(n)}(\sigma_k^{(n)})$. $y_{kp}^{(n)}(\alpha, x_2)$ в (34) – линейно независимые решения задачи Коши с начальными условиями $y_{kp}^{(n)}(\alpha, 0) = \delta_{kp}$ для уравнения

$$\mathbf{Y}^{(n)'} = \mathbf{M}^{(n)}(\alpha, x_2) \mathbf{Y}^{(n)}, \quad \mathbf{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_\Sigma^n \\ \mathbf{Y}_u^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_\Sigma^n = \left\| \begin{matrix} \Theta_{23}^{F(n)} \\ D_2^{F(n)} \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{Y}_u^n = \left\| \begin{matrix} U_3^{(n)} \\ U_4^{(n)} \end{matrix} \right\|, \quad (37)$$

$$\mathbf{M}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \theta_{1331}^{(n)} - \rho^{(n)} \kappa_2^2 & \alpha^2 \theta_{1431}^{(n)} \\ 0 & 0 & \alpha^2 \theta_{1431}^{(n)} & \alpha^2 \theta_{1441}^{(n)} \\ -\theta_{2442}^{(n)} (g_0)^{-1} & \theta_{2432}^{(n)} (g_0)^{-1} & 0 & 0 \\ \theta_{2432}^{(n)} (g_0)^{-1} & -\theta_{2332}^{(n)} (g_0)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$g_0 = \theta_{2442}^{(n)} \theta_{2332}^{(n)} - (\theta_{2432}^{(n)})^2.$$

Следует отметить, что при построении функции Грина для электроупругой среды с неоднородным покрытием могут быть использованы различные и весьма эффективные подходы [19–23]. В настоящей работе использован предложенный в [24] подход, сочетающий аналитические решения (33), (35) для однородных с численными методами для неоднородных составляющих структуры, в частности, при решении систем (37), (38) применен модифицированный метод Рунге-Кутты.

Неизвестные $c_k^{(n)}$ (33)–(35) определяются из удовлетворения граничным условиям (28), (29), (31), (32) для *задачи I* или (28), (30)–(32) для *задачи II*. Следуя [24] представим дисперсионное уравнение задач в виде

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (39)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)}(h_1) & \mathbf{G}^{(1)}(h_1) \\ \mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M}) & \mathbf{B}^{(M)}(h_M) \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Размеры матрицы \mathbf{A} и матриц ее составляющих определены геометрией задачи и условиями на поверхности.

Задача I: матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M})$ – квадратные, размер определяется геометрией задачи и равен соответственно $4(M-1)+3$ и $4(M-1)$. $\mathbf{B}^{(1)}(h_1)$, $\mathbf{B}^{(M)}(h_M)$ и $\mathbf{G}^{(1)}(h_1)$ – матрицы размера 3×4 , 4×3 и 3×3 , вид которых полностью определяется свойствами верхнего слоя, подстилающего полупространства и диэлектрической проницаемостью вакуума соответственно и не зависит от свойств и количества возможных промежуточных слоев.

$$\mathbf{G}^{(1)}(h_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^{(0)} \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(M)}(h_M) = \begin{pmatrix} -l_{11}^M & -l_{12}^M & 0 \\ -l_{21}^M & -l_{22}^M & 0 \\ -f_{31}^M & -f_{32}^M & 0 \\ -f_{41}^M & -f_{42}^M & 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

для преднапряженного однородного поверхностного слоя

$$\mathbf{B}^{(1)}(h_1) = \begin{pmatrix} l_{11}^{1*} s_{11}^{1*} & l_{12}^{1*} s_{21}^{1*} & l_{11}^{1*} c_{11}^1 & l_{12}^{1*} c_{21}^1 \\ l_{21}^{1*} s_{11}^{1*} \gamma & l_{22}^{1*} s_{21}^{1*} \gamma & l_{21}^{1*} c_{11}^1 \gamma & l_{22}^{1*} c_{21}^1 \gamma \\ f_{41}^1 c_{11}^1 \gamma & f_{42}^1 c_{21}^1 \gamma & f_{41}^1 s_{11}^{10} \gamma & f_{42}^1 s_{21}^{10} \gamma \end{pmatrix}, \quad (42)$$

для преднапряженного функционально градиентного поверхностного слоя

$$\mathbf{B}^{(1)}(h_1) = \begin{pmatrix} y_{11}^{(1)} & y_{12}^{(1)} & y_{13}^{(1)} & y_{14}^{(1)} \\ y_{21}^{(1)}\gamma & y_{22}^{(1)}\gamma & y_{23}^{(1)}\gamma & y_{24}^{(1)}\gamma \\ y_{41}^{(1)}\gamma & y_{42}^{(1)}\gamma & y_{43}^{(1)}\gamma & y_{44}^{(1)}\gamma \end{pmatrix} \quad (43)$$

использованы обозначения

$$\begin{aligned} s_{pk}^{n0} &= \text{sh}^0 \sigma_p^{(n)} h_k, \quad \text{sh}^0 \sigma_p^{(n)} h_k = \sigma_p^{(n)-1} \text{sh} \sigma_p^{(n)} h_k, \\ s_{pk}^{n*} &= \sigma_p^{(n)} \text{sh} \sigma_p^{(n)} h_k, \quad c_{pk}^n = \text{ch} \sigma_p^{(n)} h_k, \quad \gamma = e^{\alpha h}, \quad f_{pk}^n = f_{pk}^{(n)}, \quad p, k = 1, 2, \\ l_{pk}^n &= \sigma_k^{(n)} l_{pk}^{n*}, \quad l_{1k}^{n*} = \theta_{2332}^{(n)} f_{3k}^{(n)} + \theta_{2342}^{(n)} f_{4k}^{(n)}, \quad l_{2k}^{n*} = \theta_{2432}^{(n)} f_{3k}^{(n)} + \theta_{2442}^{(n)} f_{4k}^{(n)}. \end{aligned} \quad (44)$$

В случае $M = 2$ – двухслойное полупространство (см. рис. 1, б) вид матрицы $\mathbf{A}^{(1)}(h_M)$ определен свойствами слоя, при этом для преднапряженного однородного слоя

$$\mathbf{A}^{(1)}(h_M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_{11}^{1*} & l_{12}^{1*} \\ 0 & 0 & l_{21}^{1*} & l_{22}^{1*} \\ f_{31}^1 & f_{32}^1 & 0 & 0 \\ f_{41}^1 & f_{42}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

для преднапряженного функционально градиентного слоя $\mathbf{A}^{(1)}(h_M) = \mathbf{E}$ совпадает с диагональной единичной матрицей размера 4×4 .

В случае $M > 2$ – полупространство со слоистым покрытием матрицы $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2, \dots, M})$ и \mathbf{A} принимают вид

$$\mathbf{A}^{(1)}(h_{2, \dots, M}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^1(h_2) & \mathbf{P}^2(h_2) & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^2(h_3) & \mathbf{P}^3(h_3) & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^3(h_4) & \mathbf{P}^4(h_4) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \mathbf{B}^{M-2}(h_{M-1}) & \mathbf{P}^{M-1}(h_{M-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \mathbf{B}^{M-1}(h_M) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^1(h_1) & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & | & \mathbf{G}^1(h_1) \\ \mathbf{B}^1(h_2) & \mathbf{P}^2(h_2) & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^2(h_3) & \mathbf{P}^3(h_3) & 0 & \vdots & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^3(h_4) & \mathbf{P}^4(h_4) & \vdots & 0 & 0 & | & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & | & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \mathbf{B}^{M-2}(h_{M-1}) & \mathbf{P}^{M-1}(h_{M-1}) & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \mathbf{B}^{M-1}(h_M) & | & \mathbf{B}^M(h_M) \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Участвующие в (46) матрицы $\mathbf{B}^n(h_k)$ и $\mathbf{P}^n(h_k) = -\mathbf{B}^n(h_k)$ определены свойствами слоев с общей границей h_k , имеют размер 4×4 , верхний индекс отвечает номеру слоя,

аргумент – границе раздела (см. рис. 1, а). Для преднапряженного однородного слоя матрица $\mathbf{V}^n(h_k)$ с учетом обозначений (44) определена формулой

$$\mathbf{V}^n(h_k) = \begin{pmatrix} l_{11}^{n*} s_{1k}^{n*} & l_{12}^{n*} s_{2k}^{n*} & l_{11}^{n*} c_{1k}^n & l_{12}^{n*} c_{2k}^n \\ l_{21}^{n*} s_{1k}^{n*} & l_{22}^{n*} s_{2k}^{n*} & l_{21}^{n*} c_{1k}^n & l_{22}^{n*} c_{2k}^n \\ f_{31}^n c_{1k}^n & f_{32}^n c_{2k}^n & f_{31}^n s_{1k}^{n0} & f_{32}^n s_{2k}^{n0} \\ f_{41}^n c_{1k}^n & f_{42}^n c_{2k}^n & f_{41}^n s_{1k}^{n0} & f_{42}^n s_{2k}^{n0} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

для преднапряженного функционально градиентного слоя

$$\mathbf{V}^n(h_k) = \left\| y_{mp}^{(n)}(h_k) \right\|_{m,p=1}^4. \quad (49)$$

Задача II: матрица \mathbf{A} имеет размер $4(M-1)+2$, в зависимости от геометрии задачи может быть представлена выражениями (40) и (47). Размер и вид матрицы $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M})$ совпадает с соответствующей матрицей **задачи I**, определяется формулами (45) и (46). Матрицы $\mathbf{V}^{(1)}(h_1)$, $\mathbf{V}^{(M)}(h_M)$ и $\mathbf{G}^{(1)}(h_1)$, участвующие в (40), имеют размер 2×4 , 4×2 и 2×2 . Вид матриц определяется из представлений (41)–(43), путем вычеркивания в выражении $\mathbf{G}^{(1)}(h_1)$ 2-й строки и 3-го столбца – матрица становится нулевой, в представлении $\mathbf{V}^{(M)}(h_M)$ 3-го столбца и в представлениях $\mathbf{V}^{(1)}(h_1)$ (42), (43) 2-й строки. Размер и вид матриц $\mathbf{V}^n(h_k)$ и $\mathbf{P}^n(h_k)$ полностью совпадает с соответствующими матрицами **задачи I** (48), (49).

3. Определение НДС

В рамках сделанных предположений начально деформированное состояние в каждой из составляющих структуры однородно (1) и может различаться по характеру и величине начальных деформаций. Неоднородность начального напряженного состояния составляющих вызвана только неоднородностью их физических свойств. Характер начального напряженного состояния определяется тензором Кирхгофа, компоненты которого $P_{lp}^{(n)}$ (15) с учетом свойств материала и предположений об однородности НДС, наведенного за счет механических воздействий в отсутствие внешних начальных электростатических полей определены формулами [6, 7, 12]

$$\begin{aligned} P_{11}^{(n)} &= c_{11}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{12}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{13}^{(n)} S_{33}^{(n)} - e_{31}^{(n)} W_3^{(n)} + H_1^{(n)}, \\ P_{22}^{(n)} &= c_{12}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{11}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{13}^{(n)} S_{33}^{(n)} - e_{31}^{(n)} W_3^{(n)} + H_2^{(n)}, \\ P_{33}^{(n)} &= c_{13}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{13}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{33}^{(n)} S_{33}^{(n)} - e_{33}^{(n)} W_3^{(n)} + H_3^{(n)}, \\ d_1^{(n)} &= \varepsilon_{11}^{(n)} W_1^{(n)}, \quad d_2^{(n)} = \varepsilon_{11}^{(n)} W_2^{(n)}, \\ d_3^{(n)} &= e_{31}^{(n)} S_{11}^{(n)} + e_{31}^{(n)} S_{22}^{(n)} + e_{33}^{(n)} S_{33}^{(n)} + \varepsilon_{33}^{(n)} W_3^{(n)} \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь коэффициенты $H_i^{(n)}$ позволяют учитывать влияние модулей упругости III порядка (сумма по немym индексам):

$$H_i = \frac{1}{8} c_{mqqu} (\nu_q^2 - 1) (\nu_m^2 - 1).$$

В силу предположения об отсутствии начальных внешних электрических воздействий $d_i = 0$ и в зависимости от способа задания НДС неизвестными могут быть либо $S_{11}^{(n)}, S_{22}^{(n)}, S_{33}^{(n)}, W_1^{(n)}, W_2^{(n)}, W_3^{(n)}$, либо, например, $P_{11}^{(n)}, S_{22}^{(n)}, S_{33}^{(n)}, W_1^{(n)}, W_2^{(n)}, W_3^{(n)}$, определяемые из решения системы (50). В работе исследовано влияние

одноосных НДС: $1xi \Rightarrow P_{ii}^{(n)} = P, P_{jj \neq ii}^{(n)} = P_{kk \neq jj \neq ii}^{(n)} = 0, k, j, i = 1, 2, 3;$

двухосных НДС: $2xi \Rightarrow P_{ii}^{(n)} = 0, P_{jj \neq ii}^{(n)} = P_{kk \neq jj \neq ii}^{(n)} = P, k, j, i = 1, 2, 3$

и гидростатического НДС: $3x \Rightarrow P_{11}^{(n)} = P_{22}^{(n)} = P_{33}^{(n)} = P.$

Исследования проводились для структур из монокристаллических ZnO [25], CdSe [26] и поликристаллических сегнетоэлектриков, таких как пьезокерамики Soft – PZT DL-61HD, Hard PZT DL-40 [27]. Физические параметры сред приведены в таблице, $\epsilon^{(0)} = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $K_S^2 = \left[(V_F^f)^2 - (V_F^m)^2 \right] (V_F^f)^{-2}$ – коэффициент электромеханической связи. Относительные скорости волны Гуляева-Блюштейна (ВГБ) для полупространства со свободной и металлизированной поверхностью рассчитаны без учета модулей упругости III порядка.

Физические свойства материалов в ЕС
Physical properties of materials in natural state (NS)

| | ZnO | CdSe | PZT DL61 | PZT DL40 |
|--------------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ρ [кг/м ³] | 5680 | 5504 | 8200 | 7700 |
| c_{11} [Н/м ²] | $2,09718 \cdot 10^{11}$ | $7,4057 \cdot 10^{10}$ | $14,6000 \cdot 10^{10}$ | $17,8000 \cdot 10^{10}$ |
| c_{12} [Н/м ²] | $1,2114 \cdot 10^{11}$ | $4,5155 \cdot 10^{10}$ | $9,6000 \cdot 10^{10}$ | $10,1000 \cdot 10^{10}$ |
| c_{13} [Н/м ²] | $1,0513 \cdot 10^{11}$ | $3,9302 \cdot 10^{10}$ | $10,0000 \cdot 10^{10}$ | $9,2000 \cdot 10^{10}$ |
| c_{33} [Н/м ²] | $2,10941 \cdot 10^{11}$ | $8,3551 \cdot 10^{10}$ | $13,0000 \cdot 10^{10}$ | $12,4000 \cdot 10^{10}$ |
| c_{44} [Н/м ²] | $4,2449 \cdot 10^{10}$ | $1,3167 \cdot 10^{10}$ | $3,9000 \cdot 10^{10}$ | $2,3000 \cdot 10^{10}$ |
| e_{15} [Кл/м ²] | -0,59 | -0,138 | 33,10 | 6,20 |
| e_{31} [Кл/м ²] | -0,61 | -0,159 | -15,80 | -0,10 |
| e_{33} [Кл/м ²] | 1,14 | 0,347 | 25,30 | 9,00 |
| $\epsilon_{11}/\epsilon^{(0)}$ | 8,3 | 9,33 | 2810,0 | 290,0 |
| $\epsilon_{33}/\epsilon^{(0)}$ | 8,8 | 10,2 | 2520,0 | 210,0 |
| V_P [м/с] | 6097 | 3668 | 4219,58 | 4808 |
| V_S [м/с] | 2743 | 1547 | 2180,85 | 1728,3 |
| V_{Se} [м/с] | 2892 | 1560 | 3182,58 | 2220,8 |
| V_{GB}^f / V_{Se} | 0,9999417 | 0,9999986 | 0,999999982 | 0,999999082 |
| V_{GB}^m / V_{Se} | 0,994944441 | 0,99985181 | 0,847723696 | 0,918947544 |
| K_S^2 | 0,01 | 0,0003 | 0,28 | 0,1555 |

4. Численные результаты

Для детального изучения влияния величины наведенной деформации, вида и характера преднапряжений в составляющих структуры на особенности поведения и скорость распространения поверхностных акустических волн (ПАВ) рассмотрим простейший случай преднапряженного пьезоэлектрического полупространства с преднапряженным однослойным покрытием ($M = 2$, рис. 1, б). В качестве материала структуры (покрытия и основания) используем гексагональные моно- и поликристаллические сегнетопьезоэлектри-

ки (таблица) с различным коэффициентом электромеханической связи, без учета модулей упругости III порядка. Полагаем, что ось симметрии материала в ЕС совпадает с осью x_3 , векторы поляризации составляющих покрытия и полупространства совпадают, либо противоположны по направлению (3).

На рис. 2–8 показано влияние характера и величины начальных механических воздействий на относительные фазовые скорости поверхностных волн ($V_F^{(1)}/V_{Se}^{0(2)}$, где $V_F = \kappa_2 / \xi$, ξ – решение дисперсионного уравнения (39) с матрицей (40), (47) в зависимости от геометрии задачи в обозначениях (41)–(46), (48)–(49)). Цифрами 0, 1, 2, ..., 10 на рисунках отмечено сочетание наведенных деформаций $v_i^{(1)}/v_i^{(2)} = 1/1, 0,97/1, 1,03/1$,

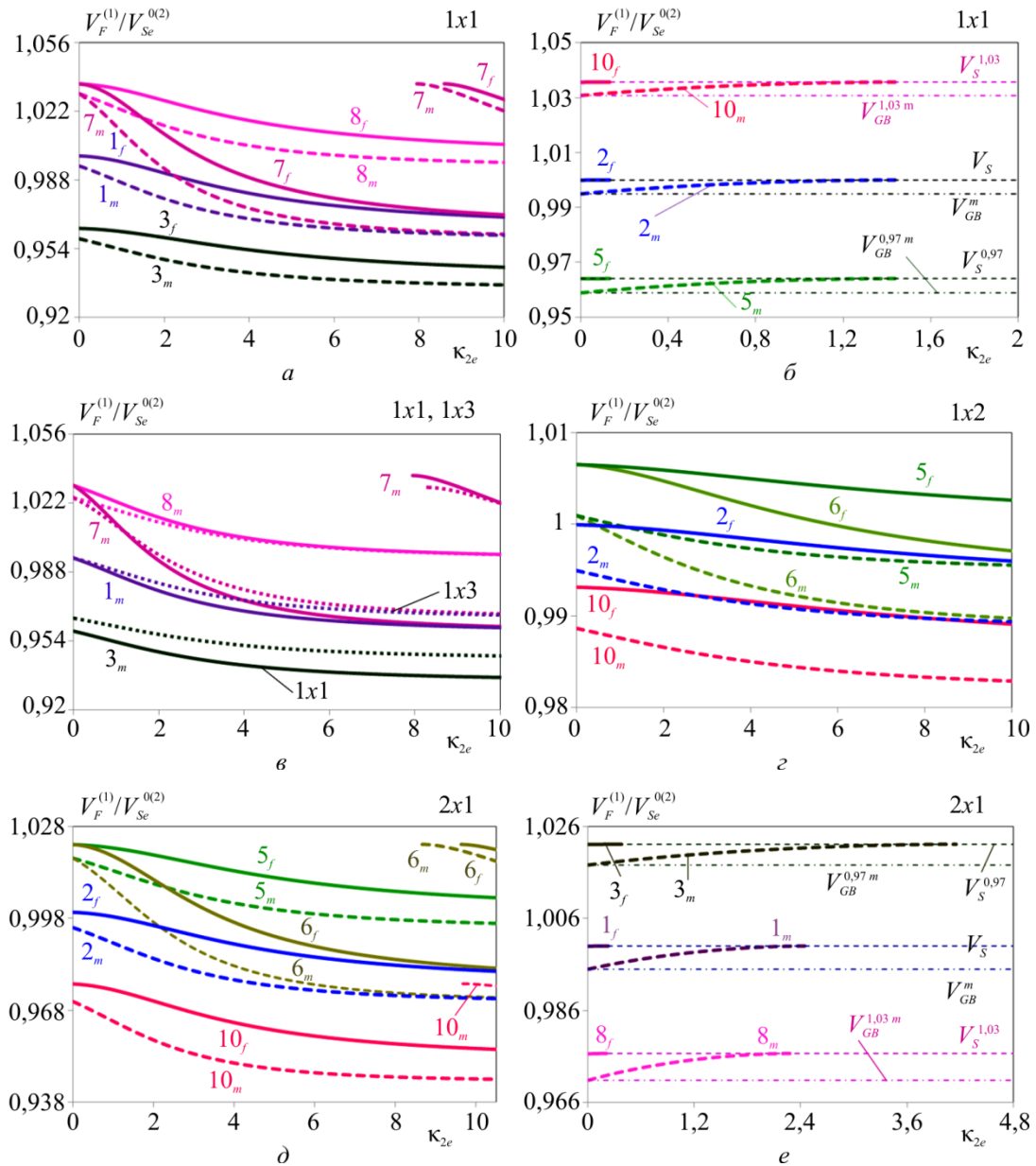


Рис. 2. Влияние величины, характера и типа начальных воздействий на относительные скорости ВГБ для структуры ZnO/ZnO
 Fig. 2. Influence of value, nature and type of the initial impacts on relative rates of Bleustein–Gulyaev wave for ZnO / ZnO structure

0,95/0,97, 0,97/0,97, 1/0,97, 1,03/0,97, 0,97/1,03, 1/1,03, 1,03/1,03, 1,06/1,03 соответственно, при этом нижние индексы «f» и «m» обозначают свободную и металлизированную поверхность, верхний индекс «e» случай $e_{15}^{(1)} = -e_{15}^{(2)}$.

На рис. 2–4 показано влияние величины и характера начальных напряжений, действующих на составляющие структуры в рамках одного типа НДС, на относительные фазовые скорости ПАВ. Цифрами на рисунках отмечено сочетание деформаций, наведенных действием начальных напряжений в структурах из монокристаллических сегнетоэлектриков ZnO/ZnO (см. рис. 2), CdSe/CdSe (см. рис. 3) и поликристаллических сегнетопъезокемик PZT DL-61/PSZ DL-61, PZT DL-40/PZT DL40 (см. рис.4).

Поляризация в слое и полупространстве совпадает, $e_{15}^{(1)} = e_{15}^{(2)}$, сплошными линиями на рисунках обозначены скорости ПАВ задачи I – со свободной поверхностью, штриховыми линиями – задачи II с металлизированной поверхностью. На рис. 2 в, 3 в и 4 а, б показано сравнение влияния одноосных 1x1 (сплошные линии) и 1x3 (пунктирные линии) начальных напряжений на ПАВ в рассматриваемых структурах с металлизированной поверхностью.

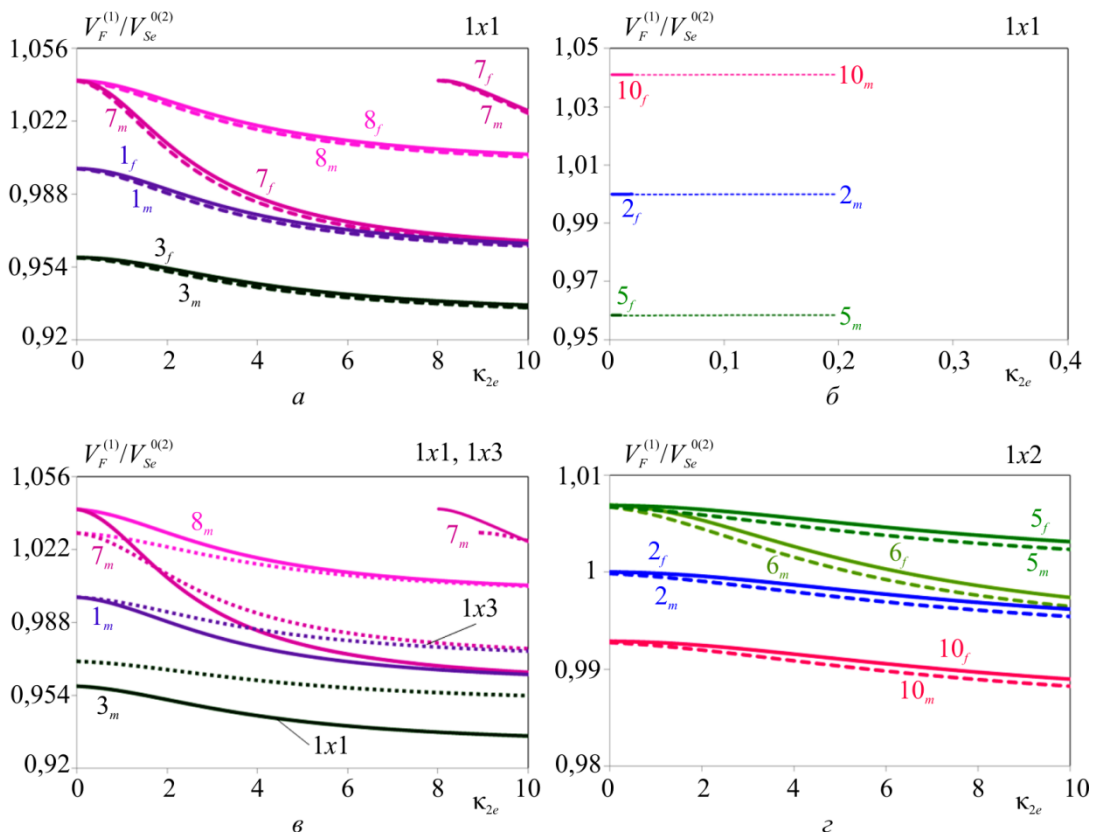


Рис. 3. Влияние величины, характера и типа начальных воздействий на относительные скорости ВГБ для структуры CdSe/CdSe
 Fig. 3. Influence of value, nature and type of the initial impacts on relative rates of Bleustein–Gulyaev wave for CdSe/CdSe structure

Из сравнения рис. 2 и 3 видно, что при малом значении КЭМС (K_S^2) различие в зависимости фазовых скоростей ПАВ от частоты для задач со свободной и металлизированной поверхностью незначительно (см. рис. 3, а, в). Влияние начальных напряжений, наводящих одноосные НДС в составляющих структуры, минимально в случае 1x2. При 1x1 и 1x3 – влияние соизмеримо и зависит от свойств материала и величины наведенных

деформаций. Следует отметить, что воздействие начальных механических напряжений может существенно менять свойства структуры. Так, при определенном соотношении наведенных деформаций (кривые 1, 3, 8 рис. 2, а и 2, 5 рис. 2, з, д) сегнетоэлектрическая структура остается слабо неоднородной: по поверхности распространяется волна Гуляева-Блюштейна (ВГБ), скорость которой в зависимости от характера воздействий может быть больше или меньше значения скорости в ЕС, диапазон изменения незначительный. Соотношение наведенных деформаций 0,97/1,03 при НДС 1x1 (кривые 7 на рис. 2 а, в и рис. 3 а, в) приводит к увеличению диапазона изменения скорости, появляются вторые, а при определенных типах НДС и более высокие моды. Структура перестает быть слабо неоднородной, по поверхности распространяются сдвиговые горизонтально поляризованные волны Лява. Соотношение деформаций 1,03/1, 1/0,97, 1,03/0,97, 1,06/1,03 в рамках

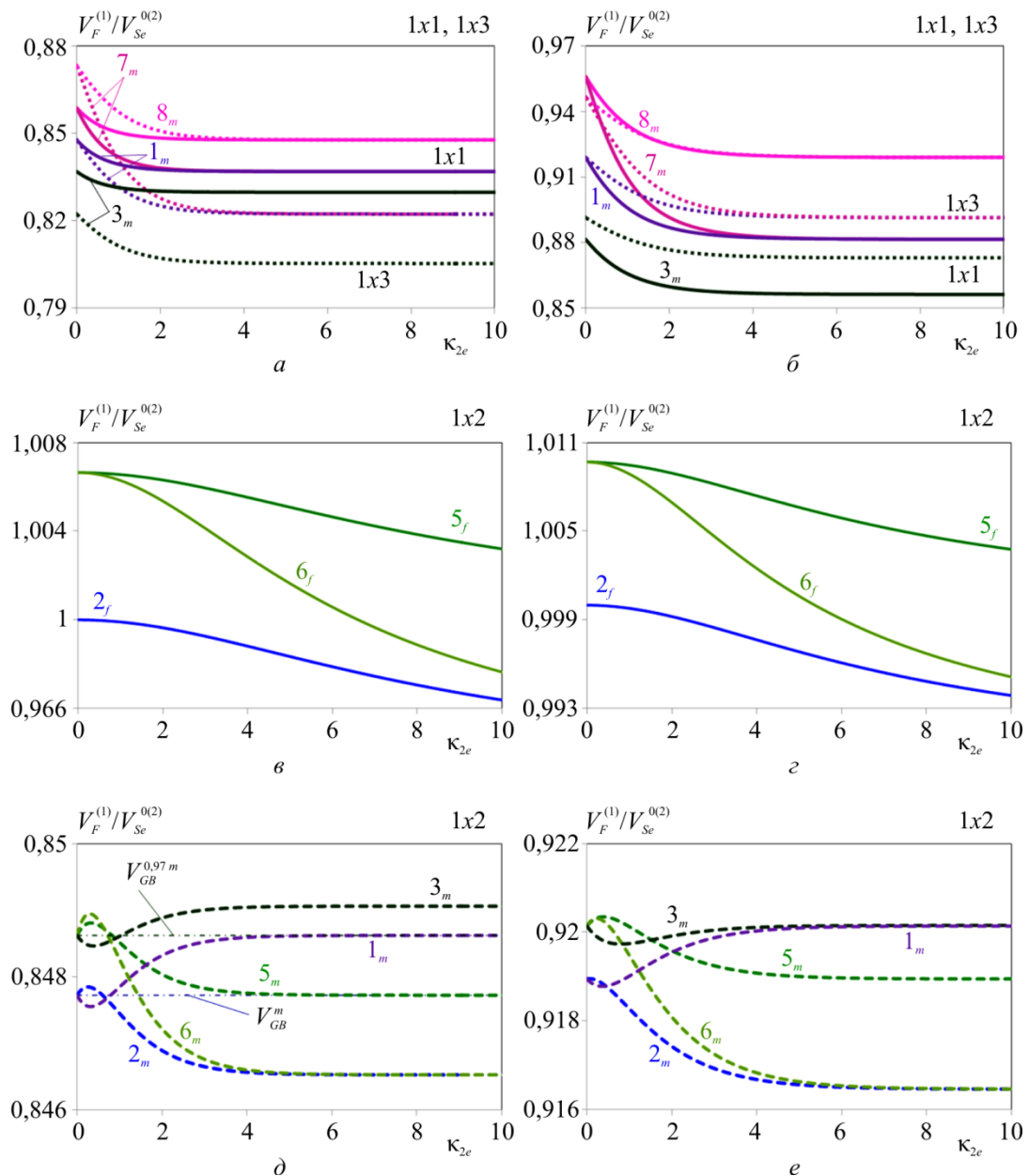


Рис. 4. Влияние НДС на относительные скорости ВГБ для структур PZT DL-61/PZT DL-61 и PZT DL-40/PZT DL-40
 Fig. 4. Influence of IDS on relative rates of Bleustein–Gulyaev for PZT DL-61/PZT DL-61 and PZT DL-40/PZT DL-40 structures

НДС 1x1 приводит к увеличению скорости ВГБ до значения $V_S^{\sigma(2)}$, волна существует в ограниченном частотном диапазоне, который определяется величиной КЭМС, соотношением деформаций и характером начальных воздействий (см. рис. 2, б, е, рис. 3, б).

На рис. 4, а–е показано влияние величины, характера и типа наведенных НДС на фазовые скорости ПАВ в структурах из сегнетопъезокерамик PZT DL-61 (см. рис. 4, а, в, д) и PZT DL-40 (см. рис. 4, б, з, е) с большим значением КЭМС (таблица). Сравнение одноосных НДС 1x1 и 1x3 дано на рис. 4, а, б для первых мод ПАВ. В случае структуры из PZT DL-40 в рассматриваемом частотном диапазоне, начиная с $\kappa_{2e} = 6,7$, появляются вторые моды ПАВ для всех приведенных соотношений деформаций как при НДС 1x1, так и при НДС 1x3. В случае PZT DL-61 вторые моды в рассматриваемом диапазоне появляются только при НДС 1x3.

Из сравнения рис. 2, 3 и 4 видно, что действие начальных напряжений, наводящих в структуре одноосные НДС 1x1 или 1x3 соизмеримы по влиянию на скорости ПАВ. Для многих пьезоэлектриков преобладающее влияние имеет НДС 1x1, однако для ряда сегнетопъезокерамик с высоким значением пьезоэлектрических и диэлектрических модулей в ЕС влияние НДС 1x3 может значительно превзойти влияние НДС 1x1. Для пьезокерамик с большим значением КЭМС в случае задачи с металлизированной поверхностью характерно существование поверхностной волны во всем частотном диапазоне даже при соотношении наведенных деформаций, приводящих к увеличению фазовой скорости относительно значения скорости ВГБ соответствующего полупространства (рис. 4, д, е).

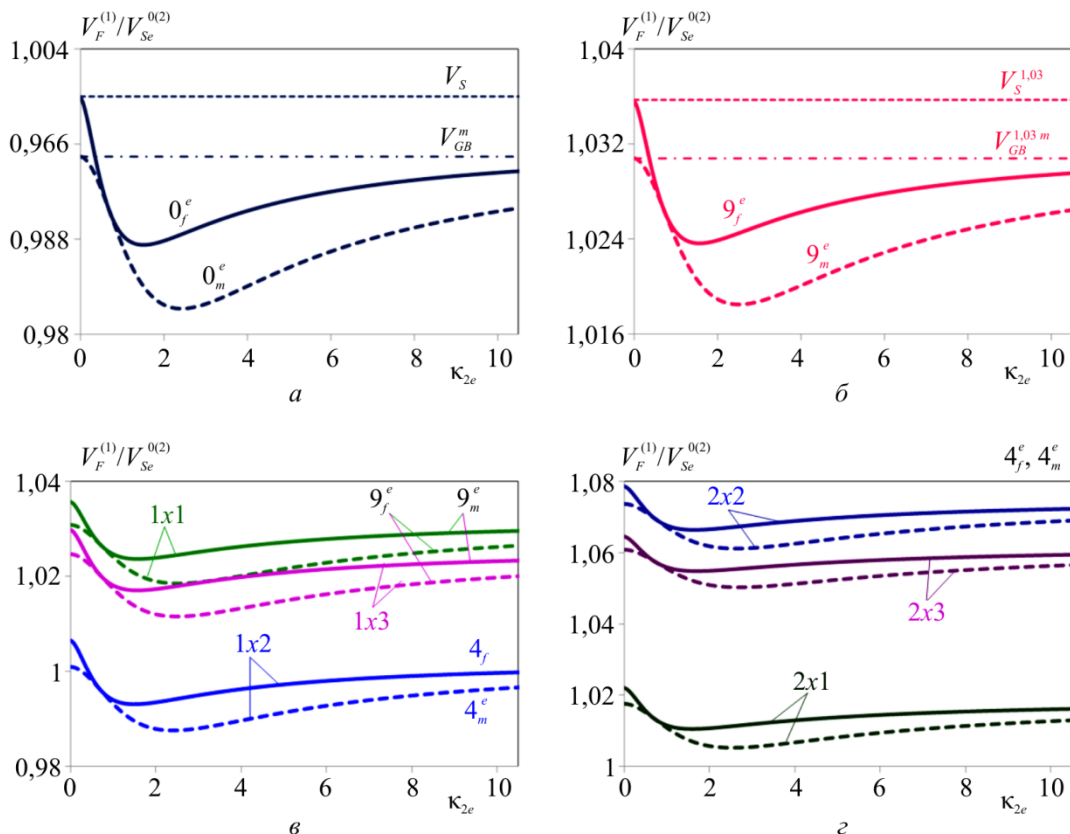


Рис. 5. Влияние величины, характера и типа НДС на относительные скорости ВГБ для структуры ZnO/ZnO

Fig. 5. Influence of value, nature and type of IDS on relative rates of Bleustein–Gulyaev for ZnO/ZnO structure

На рис. 5, *a–z* показано влияние направления поляризации составляющих структуры ZnO/ZnO (см. рис. 5, *a*), величины, характера наведенных деформаций и типа начальных напряжений (см. рис. 5, *b–z*) на изменение скорости ВГБ для задач со свободной и металлизированной поверхностью. Предполагается, что наведенные в составляющих структуры деформации равны. На рис. 5, *a* приведено характерное поведение скорости ВГБ в ЕС при $e_{15}^{(1)} = e_{15}^{(2)}$ и $e_{15}^{(1)} = -e_{15}^{(2)}$. В случае НДС 1x1 при соотношении наведенных деформаций $v_1^{(1)} / v_1^{(2)} = 1,03/1,03$ (кривые 9 рис. 5, *b*) значение относительных скоростей $V_{GB}^{1.03f} / V_{Se}^{0(2)}$ и $V_{GB}^{1.03m} / V_{Se}^{0(2)}$ достигает значений 1,0356454 и 1,30791675 соответственно.

Из рисунков видно, что изменение направления вектора поляризации при всех прочих равных параметрах приводит к изменению характера частотой зависимости скорости ПАВ, среда перестает быть однородной, наблюдается дисперсия свойств (см. рис. 5, *a, б*). В рамках действия различных типов НДС в структуре ZnO/ZnO при условии $e_{15}^{(1)} = -e_{15}^{(2)}$ наибольшее значение скорости V_{GB}^{of} и V_{GB}^{sm} достигают при НДС 1x1 (кривые 9, рис. 5, *b, в*) и НДС 2x2 (см. рис. 5, *z*).

На рис. 6, *a–z* и 7, *a–z* показано влияние на относительные фазовые скорости ПАВ величины и характера начальных напряжений, действующих на составляющие структуры ZnO/ZnO в рамках 1x1 (см. рис. 6) и 2x1 (см. рис. 7). Рис. *a, б* иллюстрируют влияние направления вектора поляризации в случае преднапряженного покрытия (рис. *a*) и в случае

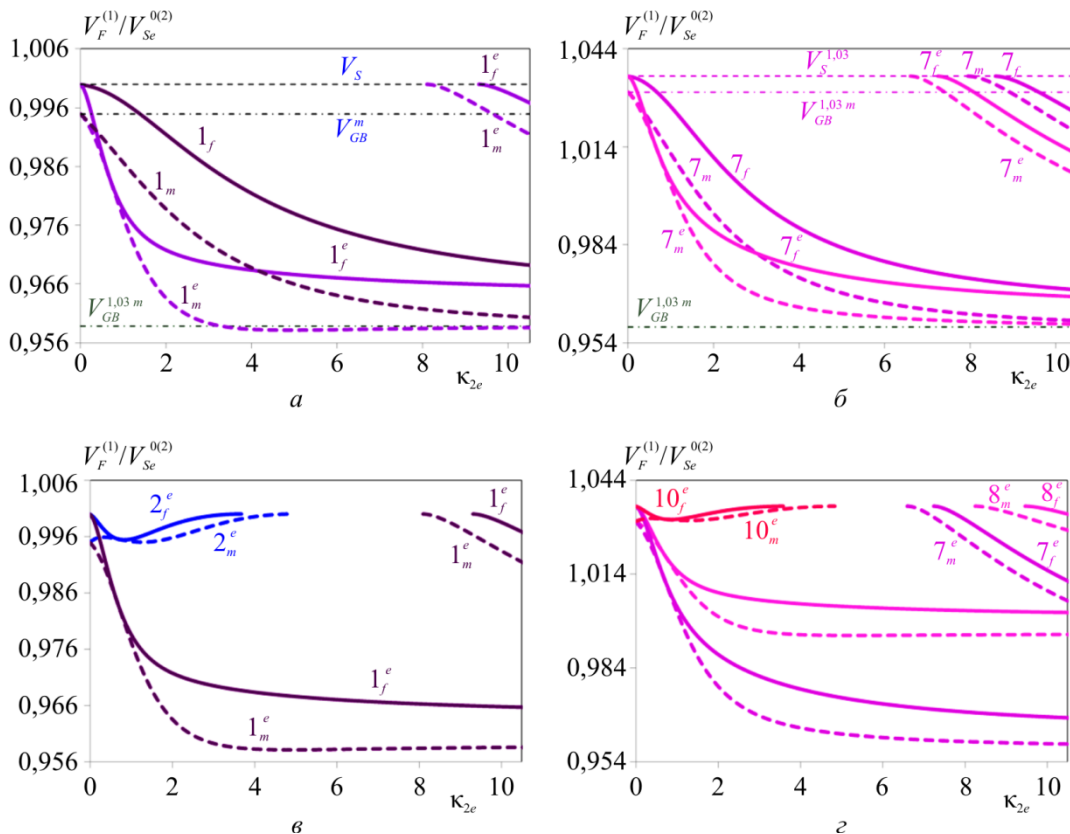


Рис. 6. Влияние на относительные фазовые скорости ПАВ соотношения величины и характера наведенных деформаций в структуре ZnO/ZnO в рамках НДС: 1x1
 Fig. 6. Influence on relative phase rates of SAW of relation between value and nature of the induced deformations in structure ZnO/ZnO within IDS: 1x1

преднапряженной структуры (рис. б). Рис. в, г отражают влияние величины и характера преднапряжений на частотную зависимость фазовых скоростей ПАВ в случае $e_{15}^{(1)} = -e_{15}^{(2)}$. Цифрами на рисунках отмечено соотношение деформаций, наведенных действием начальных напряжений.

Из сравнения рис. 2, б, е с рис. 6 и 7 видно, что эффекты, вызванные действием различного рода начальных механических напряжений, в пьезоэлектрической структуре существенно зависят от направленности векторов поляризации ее составляющих: в случае $e_{15}^{(1)} = -e_{15}^{(2)}$ относительно $e_{15}^{(1)} = e_{15}^{(2)}$ меняется характер частотной зависимости скорости ПАВ, усиливается влияние преднапряжений.

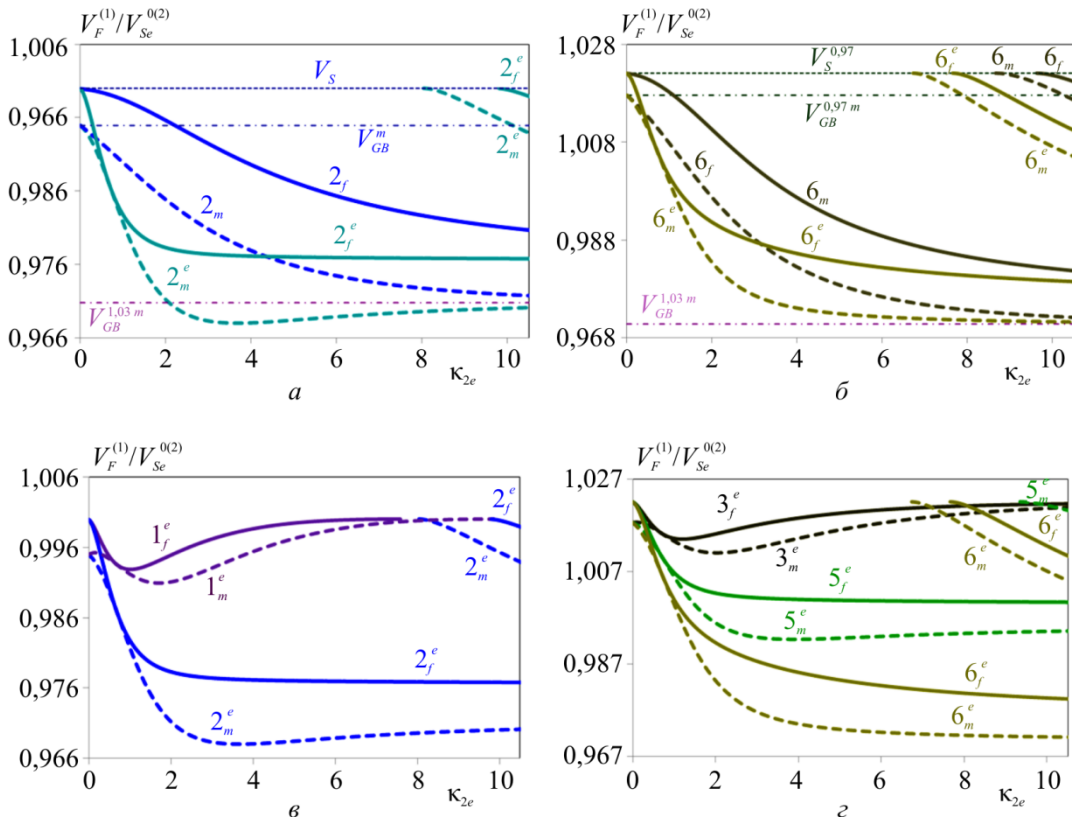


Рис. 7. Влияние на относительные фазовые скорости ПАВ соотношения величины и характера наведенных деформаций в структуре ZnO/ZnO в рамках НДС: 2x1
 Fig. 7. Influence on relative phase rates of SAW of relation between value and nature of the induced deformations in structure ZnO/ZnO within IDS: 2x1

На рис. 8, а, б приведено влияние на фазовые скорости ПАВ начальных напряжений, наводящих в покрытии и основании НДС различных типов. Для удобства сравнения в качестве НДС основания использовано НДС 2x2, в качестве НДС покрытия одноосные НДС – 1x1, 1x2, 1x3 (см. рис. 8, а). На рис. 8, б дано сравнение одноосного 1x1 и двухосного 2x1 НДС покрытия. Соотношение наведенных деформаций на рис. 8, а, б отвечает случаю 1.03/0.97, векторы поляризации покрытия и основания противоположны по направлению.

Из рис. 8, а, б видно, что при рассматриваемом соотношении деформаций независимо от НДС покрытия в рассматриваемом частотном диапазоне существуют вторые моды ПАВ, минимальное изменение скорости достигается при НДС 1x1/2x2 (см. рис. 8, а), максимальное – при НДС 2x1/2x2 (см. рис. 8, б). Сравнение рис. 6, а, б с рис. 3 в, г показывает

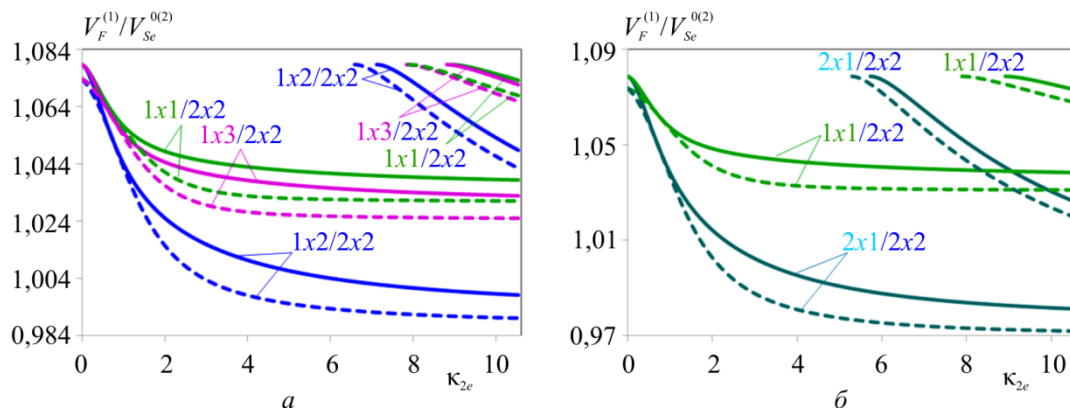


Рис. 8. Влияние типов НДС покрытия и основания на фазовые скорости ПАВ
 Fig. 8. Influence of IDS types and foundations on SAW phase rates

возможность увеличения скорости ПАВ за счет различий в начальных механических воздействиях на составляющие пьезоэлектрической структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№15-08-06074, 16-01-00647, 14-08-01213).

Библиографический список

1. Maugin G.A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. – Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1991. – 621 p.
2. Thurston R.N., Brugger K. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media // Phys. Rev. – 1964 – Vol. 133. – No. 6A – P. A1604–A1610.
3. Tiersten H.F. Electroelastic equations for electrode thin plates subject to large driving voltages // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 74. – No. 5 – P. 3389–3393.
4. Chai J.F., Wu T.T. Propagation of surface waves in a prestressed piezoelectric material // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – Vol. 100. – No. 4. – Pt. 1 – P. 2112–2122.
5. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полуграниченных тел. – М.: Физматлит, 2008. – 240 с.
6. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Евдокимова О.В. Определяющие соотношения динамики преднапряженной пьезоактивной среды в отсутствие внешних электрических полей // Вестн. Южного научного центра РАН. – 2006. – Т. 2, № 1. – С. 16–23.
7. Евдокимова О.В., Белянкова Т.И., Калинин В.В. Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // Вестн. Южного научного центра РАН. – 2007. – Т. 3, № 4. – С. 19–25.
8. Liu H., Wang Z.K., Wang T.J. Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure // Int. J. Eng. Sci. – 2001. – Vol. 38. – P. 37–51.
9. Jin F., Wang Z., Wang T. The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space // Int. J. Eng. Sci. – 2001. – Vol. 39. – P. 1271–1285.
10. Liu H., Kuang Z.B., Cai Z.M. Propagation of Bleustein–Gulyaev waves in a prestressed layered piezoelectric structure // Ultrasonics. – 2003. – Vol. 41. – P. 397–405.
11. Love waves propagation in a piezoelectric layered structure with initial stresses / Z. Qian, F. Jin, Z. Wang, Xi'an China, K. Kishimoto // Acta Mechanica. – 2004. – Vol. 171. – P. 41–57.
12. Белянкова Т.И., Лыжов В.А. Некоторые особенности динамики слабо неоднородных пьезоактивных структур // Вестн. Южного научного центра РАН. – 2010. – Т. 6, № 2. – С. 3–10.
13. Collet B., Destrade M., Maugin G.A. Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2006. – Vol. 25. – P. 695–706.

14. Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure / C. Xiaoshan, J. Feng, W. ZiKun, L. TianJia // Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy. – 2009. – Vol. 52. – No. 4. – P. 613–625.
15. Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a functionally graded layer of finite thickness / Z. Qian, F. Jin, Z. Wang, K. Kishimoto // International Journal of Engineering Science. – 2007. – Vol. 45 – P. 455–466.
16. Effect of initial stress on Love waves in a piezoelectric structure carrying a functionally graded material layer / Z.-H. Qian, F. Jin, T. Lu, K. Kishimoto, S. Hirose // Ultrasonics. – 2010. – Vol. 50 – P. 84–90.
17. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
18. Surface Acoustic Waves in Inhomogeneous Media / S.V. Biryukov, Y.V. Gulyaev, V.V. Krylov, V.P. Plessky. – New York, Springer-Verlag, 1995. – 287 p.
19. Калинчук В.В., Белянкова Т.И., Богомолов А.С. К проблеме моделирования неоднородных материалов с заданными свойствами // Эколог. вестн. науч. центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 2. – С. 26–32.
20. Численно-аналитическое построение матриц Грина трехмерных теорий упругости и электроупругости / Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, В.П. Пазин, А.Н. Петров // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – № 3–1. – С. 134–140.
21. Igumnov L.A., Markov I.P., Rataushko Y.Y. Modeling the dynamics of 3-d elastic anisotropic solids using boundary element method // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 1040. – P. 633–637.
22. Balogun S., Achenbach J.D. Surface waves on a half-space with depth dependent properties // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – Vol. 132. – No. 3. – P. 1336–1345.
23. Balogun S., Achenbach J.D. Surface waves generated by a line load on a half-space with depth-dependent properties // Wave Motion. – 2013. – Vol. 50 – P. 1063–1072.
24. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства // Акустический журнал. – 2014. – Т. 60, № 5. – С. 492–504.
25. Akusticheskie kristally: Spravochnik. [Acoustic crystals: a Handbook]. Eds. Shaskolskaya M.P. – Moscow: Nauka Publishers, 1982. – 632 p.
26. Sharma J.N., Pal M., Chand D. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 284. – P. 227–248.
27. Material Specification Sheet. Available at: www.delpiezo.com/products.

References

1. Maugin G.A. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1991, 621 p.
2. Thurston R.N., Brugger K. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media. *Phys. Rev.*, 1964, Vol.133, No. 6A, pp. A1604-A1610.
3. Tiersten H.F. Electroelastic equations for electrode thin plates subject to large driving voltages. *J. Appl. Phys.*, 1993, Vol.74, No.5, pp. 3389-3393.
4. Chai J.F., Wu T.T. Propagation of surface waves in a prestressed piezoelectric material. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1996, 100, no.4, Pt. 1, pp. 2112-2122.
5. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlia predvaritel'no napriazhennykh poluogranichennykh tel [The dynamic contact problems for prestressed media]. *Moscow, Nauka*, 2008, 240 p.
6. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Evdokimova O.V. Opredel'iaushchie sootnosheniia dinamiki prednapriazhennoi p'ezoaktivnoi sredy v otsutstvie vneshnikh elektricheskikh polei [Defining relations dynamics prestressed piezoactive medium in the absence of external electric fields]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra RAN*, 2006, vol. 2, no. 1, pp. 16-23.
7. Evdokimova O.V., Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Uravneniia dinamiki prednapriazhennoi p'ezoaktivnoi sredy pri nalichii vneshnego elektrostatičeskogo polia [Dynamics equations for pre-

stressed piezo-active medium in the presence of external electrostatic field]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra RAN*, 2007, vol. 3, no. 4, pp. 19-25.

8. Liu H., Wang Z.K., Wang T.J. Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure. *Int. J. Eng. Sci.*, 2001, vol. 38, pp. 37-51.

9. Jin F., Wang Z., Wang T. The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space. *Int. J. Eng. Sci.*, 2001, vol. 39, pp. 1271-1285.

10. Liu H., Kuang Z.B., Cai Z.M. Propagation of Bleustein–Gulyaev waves in a prestressed layered piezoelectric structure. *Ultrasonics*, 2003, vol. 41, pp. 397-405

11. Qian Z., Jin F., Wang Z., China Xi'an, Kishimoto K. Love waves propagation in a piezoelectric layered structure with initial stresses. *Acta Mechanica*, 2004, vol. 171, pp. 41-57.

12. Belyankova T.I., Lyzhov V.A. Nekotorye osobennosti dinamiki slabo neodnorodnykh p'ezoaktivnykh struktur [Some features of dynamics for weakly inhomogeneous piezo-active structures]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra RAN*, 2010, vol. 6, No. 2, pp. 3-10.

13. Collet B., Destrade M., Maugin G.A. Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials. *European Journal of Mechanics A/Solids* 25, 2006, pp. 695-706.

14. Xiaoshan C., Feng J., ZiKun W., TianJia L. Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2009, vol. 52, no. 4, pp. 613-625.

15. Qian Z., Jin F., Wang Z., Kishimoto K. Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a functionally graded layer of finite thickness. *International Journal of Engineering Science*, 2007, vol. 45, pp. 455-466.

16. Qian Z.-H., Jin F., Lu T., Kishimoto K., Hirose S. Effect of initial stress on Love waves in a piezoelectric structure carrying a functionally graded material layer. *Ultrasonics*, 2010, vol. 50, pp. 84-90.

17. Lurie A.I. Nelinejnaja teorija uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1980, 512 p.

18. Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V.V., Plessky V.P. Surface Acoustic Waves in Inhomogeneous Media. *Springer-Verlag, New York*, 1995, 287 p.

19. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Bogomolov A.S. K probleme modelirovaniia neodnorodnykh materialov s zadannymi svoistvami [To the problem of modeling inhomogeneous materials with desired properties]. *Ecological bulletin of research centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2006, no. 2, pp. 26-32.

20. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Pazin V.P., Petrov A.N. Chislennno-analiticheskoe postroenie matrits Grina trekhmernykh teorii uprugosti i elektrouprugosti [The numerical-analytical construction of Green's matrices of 3-d elasticity and electro-elasticity theories]. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2010, no. 3-1, pp. 134-140.

21. Igumnov L.A., Markov I.P., Rataushko Y.Y. Modeling the dynamics of 3-d elastic anisotropic solids using boundary element method. *Advanced Materials Research*, 2014, V. 1040, pp. 633-637.

22. Balogun S., Achenbach J.D. Surface waves on a half-space with depth dependent properties. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2012, vol. 132, no. 3, pp. 1336-1345.

23. Balogun S., Achenbach J.D. Surface waves generated by a line load on a half-space with depth-dependent properties. *Wave Motion.*, 2013, vol. 50, pp. 1063-1072.

24. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. On the problem of analyzing the dynamic properties of a layered half-space. *Acoustical Physics*, 2014, vol. 60, no. 5, pp. 530-542.

25. Shaskolskaya M.P. (Eds.) Akusticheskie kristally: Spravochnik. [Acoustic crystals: a Handbook]. *Moscow, Nauka*, 1982, 632 p.

26. Sharma J.N., Pal M., Chand D. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, vol. 284, pp. 227-248.

27. Material Specification Sheet. Available at: www.delpiezo.com/products.