

Волков С.С., Васильев А.С., Айзикович С.М., Селезнев Н.М., Леонтьева А.В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02

Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Leontieva A.V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. Pp. 20-34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.02

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО МЯГКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ПОКРЫТИЯ ПРИ ВНЕДРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА

С.С. Волков<sup>2</sup>, А.С. Васильев<sup>2</sup>, С.М. Айзикович<sup>1</sup>, Н.М. Селезнев<sup>1</sup>, А.В. Леонтьева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>2</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 03 июня 2016 г.  
Принята: 15 октября 2016 г.  
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

#### Ключевые слова:

контакт, внедрение, сферический индентор, напряженное состояние, функционально-градиентное покрытие, мягкий слой, поля смещений, аналитические методы.

### АННОТАЦИЯ

Статья посвящена построению полей смещений, напряжений и деформаций, возникающих внутри линейно-упругого полупространства с функционально-градиентным покрытием, при внедрении в него индентора (штампа) со сферической формой наконечника. Вычисление значений смещений, напряжений и деформаций в некоторой точке внутри покрытия и полупространства сведено к вычислению интегралов на бесконечном интервале. Подынтегральная функция зависит от неизвестных заранее напряжений в области контакта штампа с покрытием. Контактные напряжения, возникающие при внедрении жесткого сферического штампа в упругое полупространство с функционально-градиентным покрытием, получены авторами в приближенном аналитическом виде ранее путем решения задачи со смещенными граничными условиями. Для этого, используя технику интегральных преобразований, задачу свели к решению парного интегрального уравнения. В общем случае произвольного изменения упругих модулей по глубине покрытия трансформанта ядра парного интегрального уравнения может быть построена лишь численно из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Аппроксимируя трансформанту ядра произведением дробно-квадратичных функций, в аналитическом виде получены приближенные формулы для определения контактных напряжений и размера зоны контакта, которая также заранее неизвестна. Полученное решение является асимптотически точным для малых и больших значений относительной толщины покрытия и обладает высокой точностью для средних значений. Метод

© Волков Сергей Сергеевич – кандидат технических наук, научный сотрудник, e-mail:fenix\_rsu@mail.ru

Васильев Андрей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail:andre.vasiliev@gmail.com

Айзикович Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, e-mail:saizikovich@gmail.com

Селезнев Николай Михайлович – кандидат технических наук, младший научный сотрудник, e-mail:nik.seleznev@bk.ru

Леонтьева Анна Викторовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail:aleonav@mail.ru

Sergey S. Volkov – PhD in Technical Sciences, Researcher, e-mail:fenix\_rsu@mail.ru

Andrey S. Vasiliev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail:andre.vasiliev@gmail.com

Sergey M. Aizikovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the laboratory, e-mail:saizikovich@gmail.com

Nikolai M. Seleznev – PhD in Technical Sciences, Junior Researcher, e-mail: nik.seleznev@bk.ru

Anna V. Leontieva – PhD in Technical Sciences, Senior Research Associate, e-mail: aleonav@mail.ru

позволяет моделировать произвольный характер изменения упругих модулей по глубине покрытия и рассматривать значения модуля Юнга в подложке более чем на два порядка больше, чем в покрытии. Проведен ряд численных экспериментов по построению полей смещений и напряжений внутри мягкого функционально-градиентного слоя, лежащего на упругом полупространстве (основании). Модуль Юнга слоя постоянен или изменяется линейно (убывает или возрастает с глубиной). Модуль Юнга слоя и упругого основания в зоне их сопряжения отличаются в 100 раз. Такой подход позволяет избежать использования предположения о недеформируемости основания при моделировании мягкого однородного или функционально-градиентного слоя.

© ПНИПУ

## STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC SOFT FUNCTIONALLY-GRADED COATING SUBJECTED TO INDENTATION BY A SPHERICAL PUNCH

S.S. Volkov<sup>2</sup>, A.S. Vasiliev<sup>2</sup>, S.M. Aizikovich<sup>1</sup>, N.M. Seleznev<sup>1</sup>, A.V. Leontieva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 03 June 2016  
Accepted: 15 October 2016  
Published: 30 December 2016

#### Keywords:

contact, indentation, spherical punch, stress state, functionally-graded coating, soft layer, elastic displacements, analytical methods.

### ABSTRACT

The article is devoted to the construction of fields of displacements, stresses and strains arising in a linearly elastic half-space with a functionally-graded coating subjected to indentation by a punch with a spherical tip. Calculations of displacements, stresses and strains at the inner point of the coating and the substrate is reduced to the integration on an infinite interval. The integrand is dependent on an unknown function of stresses distribution in the contact region. Contact stresses arising due to the indentation of a rigid spherical punch into an elastic half-space with a functionally-graded coating have earlier been constructed by the authors by solving the problem with mixed boundary conditions. For this purpose, the problem was reduced to the solution of a dual integral equation using the integral transformation technique. For a general case of independent arbitrary variation of Young's modulus and Poisson's ratio in the depth of the coating, the kernel transform of the integral equation can be calculated only numerically from the solution of a Cauchy problem for a system of ordinary differential equations with variable coefficients. Using approximations for the kernel transform of the integral equation by a product of fractional quadratic functions, approximated analytical expressions for the contact stresses and unknown radius of the contact area were constructed. The expressions obtained are asymptotically exact for both small and big values of relative coating thickness and high accuracy of intermediate values can be reached. The method is effective for an arbitrary variation of elastic properties and makes it possible to consider values of Young's modulus of the substrate with more than two orders of magnitude higher than that in the coating. Series of numerical calculations of elastic displacements and stresses inside the coating and the substrate are provided for a case of soft homogeneous or functionally-graded layer lying on an elastic half-space (foundation). Young's modulus of the layer is assumed to be constant or linearly varying (increasing or decreasing) in depth. At the layer-foundation interface Young's modulus of the layer is 100 times as much as that of the foundation. This approach makes it possible to avoid the use of assumption about the non-deformability of the foundation for modeling soft homogeneous or functionally-graded layers.

© PNRPU

## Введение

Увеличение сроков эксплуатации различных элементов конструкций является важнейшей задачей, стоящей перед современной промышленностью. Одним из способов ее решения является нанесение на элементы конструкций различного рода защитных покрытий, которые защищают от коррозии, температурных или радиоактивных воздействий и др. Ключевую роль при проектировании защитного покрытия играет процесс математического моделирования, позволяющий предсказать поведение покрытия при заданном типе воздействия. В частности, для прогнозирования долговечности изделия, подверженного механической деформации, важно знать возникающие в нем поля смещений, напряжений и деформаций. Так, например, наличие внутри материала зоны с высокими растя-

гивающими напряжениями может стать причиной образования трещин. В ряде случаев данная зона находится на границе раздела между покрытием и подложкой, что способствует отслаиванию покрытия от подложки.

В качестве материалов защитных покрытий часто используются так называемые функционально-градиентные материалы, которые представляют собой многофазные композиты, характеризующиеся непрерывным изменением процентного количества фракций своих составляющих по объему материала. Эти изменения ведут к неоднородной микроструктуре с непрерывно изменяющимися механическими и физическими свойствами материала. В частности, упругие модули в таких материалах являются непрерывными функциями пространственных координат [1].

Деформированию тел из функционально-градиентных материалов и тел с функционально-градиентными или композиционными покрытиями посвящено большое количество современных исследований [2–12]. Исследуется контактное [2–10], температурное [4], электромагнитное [6], акустическое [11] и другие виды воздействий, изучаются задачи об изгибе функционально-градиентных пластин [12] и др. Однако в связи с серьезными математическими трудностями, возникающими при решении, большинство контактных задач решены при некоторых ограничениях на значения геометрических и физических параметров. Так, например, в ряде работ, посвященных контакту тел с функционально-градиентными покрытиями, рассматриваются частные случаи законов изменения упругих свойств по глубине покрытия [6, 7, 8, 10]. Используемые методы решения интегральных уравнений в большинстве случаев эффективны лишь в узкой области изменения характерного геометрического параметра задачи, равного относительной толщине покрытия. В ряде работ, посвященных приближенному исследованию напряженно-деформированного состояния внутри материала с покрытием, предполагается, что распределение контактных напряжений, возникающих на поверхности, заранее известно и соответствует распределению контактных давлений в задаче Герца [13, 14]. Такое предположение может привести к существенным погрешностям, особенно при моделировании тонких покрытий и покрытий с упругими свойствами, существенно отличающимися от свойств подложки.

Так, например, в работе [15] показано, что при достаточно большом отличии упругих свойств покрытия и подложки распределение контактных напряжений, возникающих на поверхности упругой полуплоскости с тонким покрытием, существенно отличается от распределения на поверхности полуплоскости без покрытия (что соответствует распределению Герца). В работе [16] на примере задачи о кручении исследуются покрытия с периодическим изменением модуля сдвига по глубине и показано, что при определенных значениях параметров задачи отличие распределения контактных напряжений на поверхности таких покрытий существенно отличается от распределения на поверхности полупространства без покрытия даже в случае достаточно больших толщин покрытий. В работе [17] авторы анализируют различие упругих полей напряжений, возникающих в полупространстве с однородным покрытием и без него при вдавливании в него сферического штампа. Интегральное уравнение соответствующей контактной задачи решалось методом коллокации, который эффективен для покрытий средних толщин.

В настоящей работе для расчета контактных напряжений, возникающих на поверхности, используется двухсторонне асимптотически точный метод решения контактных задач теории упругости для тел с неоднородными покрытиями [18]. Данный метод позволяет получить приближенные аналитические формулы высокой точности для контактных давлений, возникающих на поверхности неоднородных покрытий при произвольном характере изменения упругих модулей по глубине. Формулы асимптотически точны для

малых и больших значений геометрического параметра задачи, равного отношению толщины покрытия к характерному размеру зоны контакта, и позволяют добиться высокой точности для средних значений. Кроме того, данный подход позволяет с высокой точностью моделировать мягкие и жесткие покрытия (имеется в виду отличие модуля Юнга покрытия и подложки в зоне их сопряжения более чем на один порядок). Для этой цели обычно применялись модели недеформируемого основания [10, 19, 20], что приводит к дополнительным ошибкам в вычислениях.

## 1. Постановка задачи

Недеформируемый сферический штамп радиуса  $R$  вдавливаются в поверхность упругого неоднородного по глубине слоя толщины  $H$ , лежащего на однородном полупространстве (рис. 1). С неоднородным слоем связана цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$ , ось  $z$  направлена по нормали к поверхности и проходит через центр штампа; координата  $r$  отнесена к радиусу зоны контакта  $a$ , координата  $z$  – к толщине покрытия  $H$ . Под действием нормально приложенной силы  $P$  центр штампа сместится вдоль оси  $z$  на величину  $-\delta$ . Силы трения между основанием штампа и упругим слоем отсутствуют.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона изменяются с глубиной по следующим законам:

$$\{E, \nu\} = \begin{cases} \{E^{(c)}(z), \nu^{(c)}(z)\}, & -1 \leq z \leq 0, \\ \{E^{(s)}, \nu^{(s)} = \text{const}\}, & -\infty < z < -1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E^{(c)}(z)$  и  $\nu^{(c)}(z)$  – произвольные дифференцируемые положительные функции. Здесь и далее индекс  $(c)$  соответствует неоднородному упругому слою (покрытию), индекс  $(s)$  – однородной подложке.

Введем параметр, характеризующий мягкость покрытия:

$$\beta = E^{(s)}/E^{(c)}(-1). \quad (2)$$

Вне зоны контакта поверхность покрытия свободна от напряжений, а также вся поверхность покрытия свободна от касательных напряжений. Граничные условия на поверхности полупространства при сделанных предположениях имеют вид

$$z = 0: \quad \tau_{zr} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > 1, \\ w = -\delta + a^2 r^2 / 2R, & r \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Как и в большинстве работ, положим, что радиус сферического индентора намного больше радиуса зоны контакта. При этом предположении сферическая форма штампа может быть аппроксимирована параболоидом вращения [9]. Для однородных материалов было показано, что такая аппроксимация допустима при условии  $a < 0,1R$ , которое выполнено практически всегда при упругом индентировании сферическим штампом [21].

Считаем, что на границе между покрытием и подложкой выполнены условия идеального сцепления:

$$z = -1: \quad \tau_{zr}^{(c)} = \tau_{zr}^{(s)}, \quad \sigma_z^{(c)} = \sigma_z^{(s)}, \quad w^{(c)} = w^{(s)}, \quad u^{(c)} = u^{(s)}. \quad (4)$$

Здесь  $u, w$  – смещения вдоль осей  $r$  и  $z$  соответственно;  $\sigma_z, \sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{zr}$  – компоненты тензора напряжений. Требуется найти распределение контактных давлений под штампом:

$$\sigma_z \Big|_{z=0} = -\tau(r), \quad r \leq 1 \quad (5)$$

и определить поля упругих смещений, напряжений и деформаций внутри покрытия и подложки. Считаем, что при  $r \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow -\infty$  напряжения и смещения в полупространстве исчезают, а также выполнено условие непрерывности контактных напряжений на границе области контакта.

$$\tau(1) = 0. \quad (6)$$

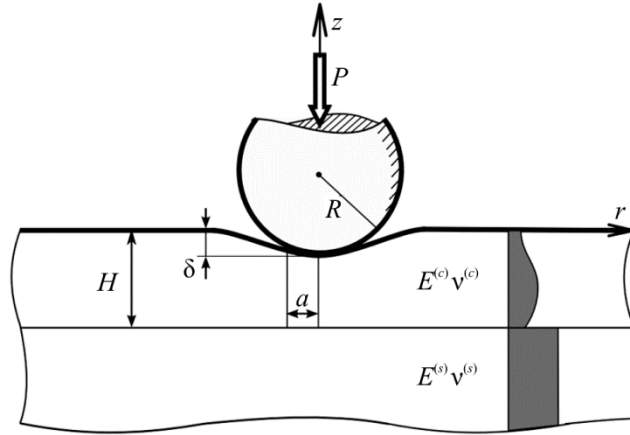


Рис. 1. Постановка контактной задачи о вдавливании штампа сферической формы в упругое полупространство с неоднородным по глубине покрытием  
 Fig. 1. Statement of the contact problem on indentation of a spherical punch into an elastic half-space with coating inhomogeneous in depth

## 2. Построение решения

Представляя смещения и напряжения в виде интегральных преобразований Ханкеля

$$u(r, z) = -\int_0^\infty U(\gamma, zH) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad w(r, z) = \int_0^\infty W(\gamma, zH) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad \tau(r) = \int_0^\infty T(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (7)$$

и вводя в рассмотрение следующие величины:

$$W^*(\gamma, z) = -\frac{\Theta}{a^2} \gamma \frac{W(\gamma, z)}{T(a\gamma)}, \quad U^*(\gamma, z) = -\frac{\Theta}{a^2} \gamma \frac{U(\gamma, z)}{T(a\gamma)}, \quad \Theta = \frac{E(0)}{2(1-\nu^2(0))}, \quad (8)$$

из (3) можно получить интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно неизвестной функции  $\tau(\rho)$ :

$$\int_0^1 \tau(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0(ur\lambda^{-1}) J_0(u\rho\lambda^{-1}) du = \lambda \Theta (\delta - a^2 r^2 / 2R) a^{-1}, \quad r \leq 1. \quad (9)$$

Выше были использованы обозначения:  $\lambda = H/a$ ,  $L(u) = W^*(u/H, 0)$ ;  $J_0, J_1$  – функции Бесселя первого рода. Вопросы существования и единственности решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (9) были подробно исследованы в работе [22]. Интегральное уравнение (9) можно записать в виде эквивалентного ему парного интегрального уравнения:

$$\begin{cases} \int_0^\infty T(\gamma)L(\lambda\gamma)J_0(r\gamma)d\gamma = \Theta(\delta - a^2r^2/2R)a^{-1}, & r \leq 1, \\ \int_0^\infty T(\gamma)J_0(r\gamma)\gamma d\gamma = 0, & r > 1. \end{cases} \quad (10)$$

Введем в рассмотрение следующие операторы [23]:

$$U_1^t\varphi(r) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}; \quad U_1^t J_0(r\gamma) = \cos t\gamma, \quad (11)$$

$$U_2^t\varphi(r) = \int_t^\infty \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{r^2 - t^2}}; \quad U_2^t J_0(r\gamma) = \gamma^{-1} \cos t\gamma. \quad (12)$$

Действуя операторами (11) и (12) на первое и второе уравнение (10) соответственно, приходим к следующему парному интегральному уравнению:

$$\begin{cases} \int_0^\infty T(\gamma)L(\lambda\gamma)\cos(\gamma t)d\gamma = \Theta(\delta - a^2t^2/R)a^{-1}, & t \leq 1, \\ \int_0^\infty T(\gamma)\cos(\gamma t)d\gamma = 0, & t > 1. \end{cases} \quad (13)$$

Аппроксимируем трансформанту ядра следующим выражением:

$$L(u) \approx L_N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad A_i, B_i \in C. \quad (14)$$

В этом случае удается в аналитическом виде получить приближенное решение интегрального уравнения [2] (13):

$$T(\gamma) = -\frac{4a\Theta}{\pi RL_N(0)} \left\{ \frac{\gamma \cos \gamma - \sin \gamma}{\gamma^3} + \frac{1}{2} \left( 1 - \delta \frac{R}{a^2} + 2\lambda^2 \sum_{i=1}^N (A_i^{-2} - B_i^{-2}) \right) \frac{\sin \gamma}{\gamma} + \sum_{i=1}^N C_i \frac{\gamma \sin \gamma \operatorname{ch} A_i \lambda^{-1} + A_i \lambda^{-1} \cos \gamma \operatorname{sh} A_i \lambda^{-1}}{\gamma^2 + A_i^2 \lambda^{-2}} \right\}. \quad (15)$$

Обращая преобразование Ханкеля в (15) и учитывая (6), получим приближенное аналитическое представление для контактных давлений под штампом:

$$\tau(r) = \frac{4a\Theta}{\pi RL_N(0)} \left[ \sqrt{1 - r^2} + \sum_{i=1}^N C_i A_i \lambda^{-1} \int_r^1 \frac{\operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1} t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right], \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (16)$$

Также можно получить соотношения, связывающие осадку, радиус сферы, зону контакта и вдавливающую силу:

$$\delta = \frac{2a^2}{R} \left( \sum_{i=1}^N C_i \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^N (A_i^{-2} \lambda^2 - B_i^{-2} \lambda^2) \right), \quad (17)$$

$$P = \frac{8a^3\Theta}{3RL_N(0)} \left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^N C_i \left( \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) - A_i^{-1} \lambda \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1}) \right) \right]. \quad (18)$$

Следует отметить, что  $\frac{\Theta}{L_N(0)} = \frac{E^{(s)}}{2(1 - \nu_{(s)}^2)}$ .

Подставляя выражение (15) в исходное уравнение (13), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $C_i (i = 1, \dots, N)$ :

$$\sum_{i=1}^N C_i \left[ \frac{B_k \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) + A_i \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1})}{B_k^2 - A_i^2} - B_k^{-1} \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) \right] = -\frac{(B_k \lambda^{-1} + 1) \lambda^2}{B_k^3} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Доказано, что решение (16) является асимптотически точным для больших и малых значений геометрического параметра задачи  $\lambda$  [18]. Погрешность решения для средних значений параметра  $\lambda$ , очевидно, связана с точностью аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения (14). В работе [24] подробно изучается связь между погрешностью аппроксимации трансформанты ядра и точностью решения задачи, и на примере задачи о кручении показано, что они являются величинами одного порядка малости. Алгоритмы подбора коэффициентов  $A_i, B_i (i = 1, \dots, N)$  аппроксимации трансформанты ядра, а также их влияние на связь между погрешностью аппроксимации трансформанты ядра и погрешностью приближенного решения (16) описаны в [24].

Из (7) и (8) получим формулы для смещений в произвольной точке внутри полупространства (как покрытия, так и подложки):

$$\begin{aligned} u(r, z) &= \frac{a}{\Theta} \int_0^\infty U^*(\gamma a^{-1}, zH) T(\gamma) J_1(r\gamma) d\gamma, \\ w(r, z) &= -\frac{a}{\Theta} \int_0^\infty W^*(\gamma a^{-1}, zH) T(\gamma) J_0(r\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

Связь между напряжениями и смещениями имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2M(z) \frac{\partial u}{\partial r'} + \Lambda(z)\theta, \quad \sigma_\varphi = 2M(z) \frac{u}{r'} + \Lambda(z)\theta, \\ \sigma_z &= 2M(z) \frac{\partial w}{\partial z'} + \Lambda(z)\theta, \quad \tau_{rz} = M(z) \left( \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial r'} \right), \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial r'} + \frac{u}{r'} + \frac{\partial w}{\partial z'}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\Lambda(z) = \frac{E(z)\nu(z)}{(1+\nu(z))(1-2\nu(z))}$ ;  $M(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$  – упругие параметры Ламе;  $r' = ra$ ,

$z' = Hz$  – размерные пространственные координаты.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\Theta} \int_0^\infty T(\gamma) U^*(\gamma a^{-1}, zH) J_1(r\gamma) d\gamma, \quad I_2 = \frac{a}{\Theta} \int_0^\infty T(\gamma) \frac{\partial U^*(\gamma a^{-1}, zH)}{\partial z'} J_1(r\gamma) d\gamma, \\ I_3 &= \frac{a}{\Theta} \int_0^\infty T(\gamma) W^*(\gamma a^{-1}, zH) J_0(r\gamma) d\gamma, \quad I_4 = \frac{a}{\Theta} \int_0^\infty T(\gamma) \frac{\partial W^*(\gamma a^{-1}, zH)}{\partial z'} J_0(r\gamma) d\gamma, \\ I_5 &= \frac{1}{\Theta} \int_0^\infty T(\gamma) W^*(\gamma a^{-1}, zH) J_1(r\gamma) \gamma d\gamma, \quad I_6 = \frac{1}{\Theta} \int_0^\infty T(\gamma) U^*(\gamma a^{-1}, zH) J_0(r\gamma) \gamma d\gamma. \end{aligned} \quad (22)$$

Значения функций  $U^*(\gamma, z)$  и  $W^*(\gamma, z)$ , а также их производных по переменной  $z$  строятся численно из решения некоторых задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [2].

Из (13) с учетом (7), (8) и (22) получим

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, z) &= -(\Lambda(z) + 2M(z))I_4(r, z) + \Lambda(z)I_6(r, z), \\ \sigma_r(r, z) &= (\Lambda(z) + 2M(z))I_6(r, z) - \Lambda(z)I_4(r, z) - 2M(z)r^{-1}I_1(r, z), \\ \sigma_\varphi(r, z) &= 2M(z)r^{-1}I_1(r, z) + \Lambda(z)(-I_4(r, z) + I_6(r, z)), \\ \tau_{rz}(r, z) &= M(z)(I_2(r, z) + I_5(r, z)).\end{aligned}\tag{23}$$

Используя закон Гука, получим выражения для деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(r, z) &= I_6(r, z) - r^{-1}I_1(r, z), \quad \varepsilon_z(r, z) = -I_4(r, z), \\ \varepsilon_\varphi(r, z) &= r^{-1}I_1(r, z), \quad \varepsilon_{rz}(r, z) = I_2(r, z) + I_5(r, z).\end{aligned}\tag{24}$$

Используя (20), запишем смещения в виде

$$u(r, z) = aI_1(r, z), \quad w(r, z) = -I_3(r, z).\tag{25}$$

Таким образом, расчет полей смещений, напряжений и деформаций сводится к вычислению интегралов  $I_i(r, z), i = 1, \dots, 6$ .

Численное интегрирование в (22) представляет определенные трудности, так как подынтегральные функции являются сильно осциллирующими. Скорость затухания при увеличении  $\gamma$  в основном определяется значением координаты  $z$ . Для  $z$ , близких к нулю, подынтегральные функции затухают очень медленно, что также существенно усложняет процесс численного интегрирования.

### 3. Численные примеры

Проанализируем напряженное состояние внутри мягкого ( $\beta = 100$ ) неоднородного слоя с модулем Юнга, изменяющимся по одному из следующих законов:

- покрытие 1 (homogeneous coating 1):  $E^{(c)}(z) = 1$ ;
- покрытие 2 (linear coating 2):  $E^{(c)}(z) = 3,5 + 2,5z$ ;
- покрытие 3 (linear coating 3):  $E^{(c)}(z) = (1 - 2,5z)/3,5$ .

Коэффициент Пуассона покрытия и подложки считаем равным 0,3. Модуль Юнга внутри покрытий 2 и 3 изменяется в 3,5 раза (рис. 2).

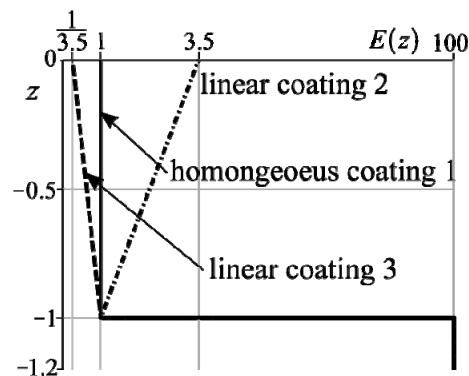


Рис. 2. Модуль Юнга в покрытиях 1–3 в зависимости от глубины  
Fig. 2. Young's modulus in the coatings 1–3 versus depth coordinate



Все расчеты, представленные ниже, были проведены при следующих значениях параметров задачи:  $\lambda = 1$ ,  $R = 50$ ,  $H = 1$ . Следует отметить, что в этом случае вдавливающая сила и глубина внедрения штампа в покрытия 1, 2 и 3 различны и равны соответственно:

$$\delta_1 \approx 0,0131, \delta_2 \approx 0,0144, \delta_3 \approx 0,0122 \text{ и } P_1 \approx 0,0369, P_2 \approx 0,0895, P_3 \approx 0,0176.$$

На рис. 3 изображены поля вертикальных смещений  $w(r, z)$  в диапазоне  $z \in [-1.2, -0.001]$ ,  $r \in [0, 1.5]$ . Своего максимального значения вертикальные смещения достигают в точке  $z = 0, r = 0$ , с увеличением  $r$  и  $z$  они убывают. Поскольку подложка намного более жесткая, чем покрытия 1–3, то смещения в подложке практически равны нулю. Значение модуля Юнга в покрытии 2 убывает с глубиной, поэтому вертикальные смещения с глубиной убывают медленнее, чем в покрытии 3, где модуль Юнга с глубиной возрастает, и в покрытии 1, где он постоянен.

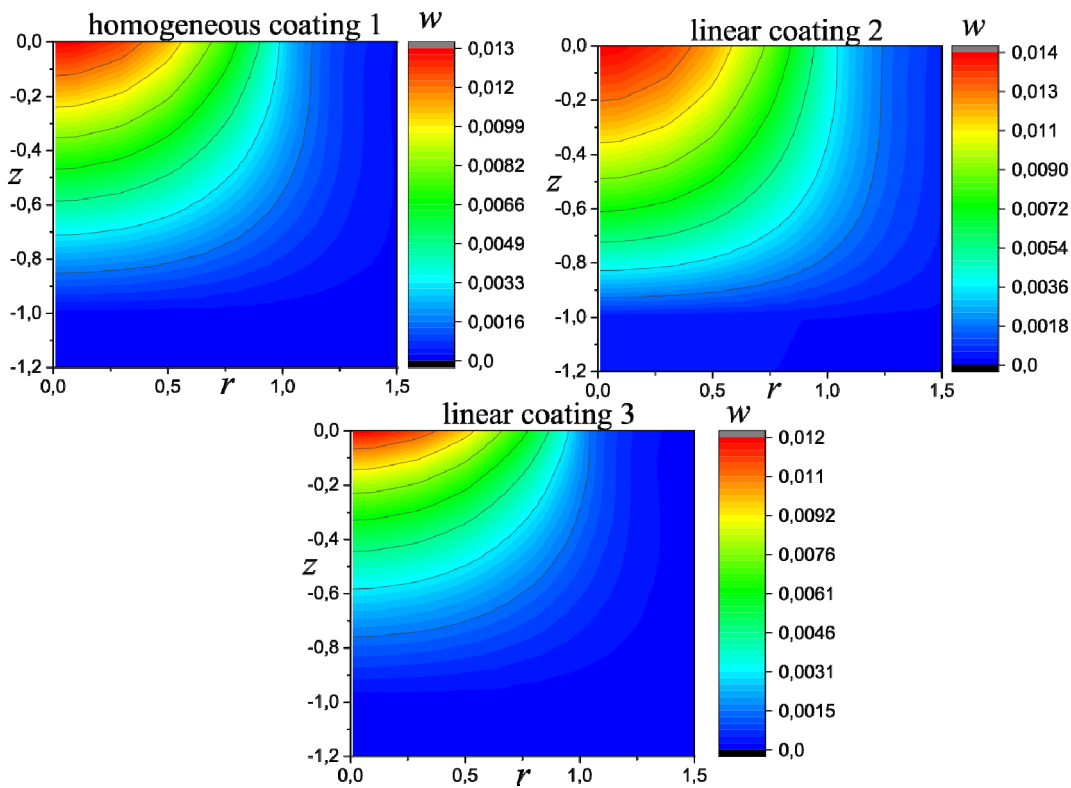


Рис. 3. Вертикальные смещения  $w$  в покрытиях 1–3  
 Fig. 3. Vertical displacements  $w$  in the coatings 1–3

Абсолютные значения радиальных смещений имеют два локальных максимума: на поверхности и на глубине  $z \approx -0,5$ ,  $z \approx -0,6$  или  $z \approx -0,4$  для покрытий 1, 2 и 3 соответственно при значении координаты  $r \approx 0,8$  (рис. 4). При удалении от точки максимума радиальные смещения уменьшаются. При этом на глубине  $z \in (-0.15, -0.1)$  наблюдается зона, где радиальные смещения близки к нулю. Следует отметить, что на поверхности радиальные смещения отрицательны, то есть направлены по направлению к центру штампа, а в глубине положительны – направлены от центра штампа.

Для прогнозирования областей, максимально подверженных риску разрушения, удобно использовать главные напряжения, которые для данной задачи имеют вид:

$$\sigma_{I,III} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_z\right)^2 + \tau_{rz}^2}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\varphi \quad (26)$$

На рис. 5–7 изображены главные напряжения  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  и  $\sigma_{III}$  внутри покрытий 1–3 и внутри подложки в диапазонах  $z \in [-1.6, 0.001]$ ,  $r \in [0, 2]$ . Наблюдаются три зоны концентрации напряжений  $\sigma_I$  (см. рис. 5). Первая зона расположена в области  $z \in (-0.2, 0)$ ,  $r \in (1, 2)$ , где величина  $\sigma_I$  максимальна, максимум достигается на поверхности вблизи границы области контакта. Вторая зона находится внутри покрытия на глубине  $z \in (-0.6, 0.1)$ , третья зона – на глубине  $z \in (-1.6, 0.9)$ . Локальные точки максимума во второй и третьей зонах находятся под краем зоны контакта, т.е. при  $r \approx 1$ . Значения  $\sigma_I$  во второй и третьей зонах значительно меньше, чем в первой. Для покрытия 3 третья зона концентрации напряжений расположена как раз на границе стыка покрытия с подложкой, а для покрытий 1 и 2 – в подложке, на некотором удалении от границы с покрытием.

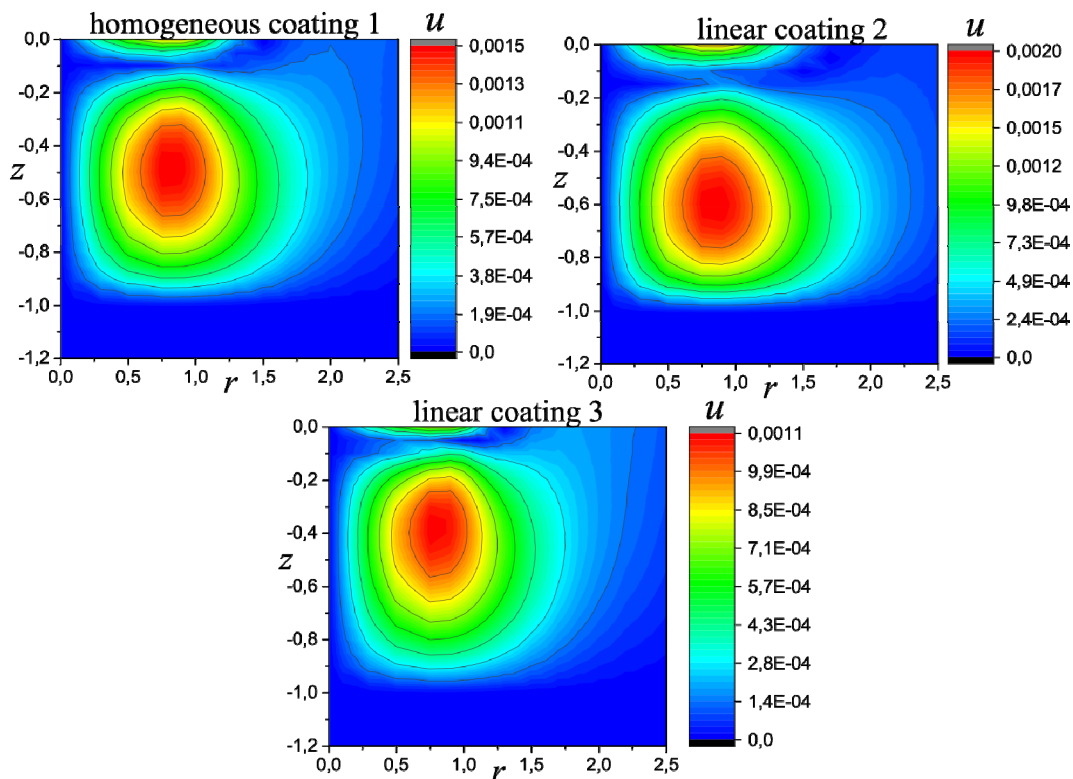


Рис. 4. Радиальные смещения  $u$  в покрытиях 1–3  
 Fig. 4. Radial displacements  $u$  in the coatings 1–3

Следует отметить, что значения напряжений  $\sigma_I$  во второй и третьей зонах по отношению к максимальному значению  $\sigma_I$  значительно выше в случае покрытия 3. Таким образом, покрытие 3 более подвержено риску отслаивания от подложки.

На рис. 6 видны две зоны концентрации напряжений  $\sigma_{II}$ : на поверхности и в районе стыка покрытия и подложки. В подложке, а также в покрытии при  $r > 1$  значения величины  $\sigma_{II}$  малы. Аналогично наблюдаемому для  $\sigma_I$  значения  $\sigma_{II}$ , возникающие в глубине покрытия 3, значительно ближе к максимальному значению, чем в случае покрытий 1 и 2. Напряжения  $\sigma_{II}$  в покрытии 3 убывают медленнее, чем в покрытиях 1 и 2.

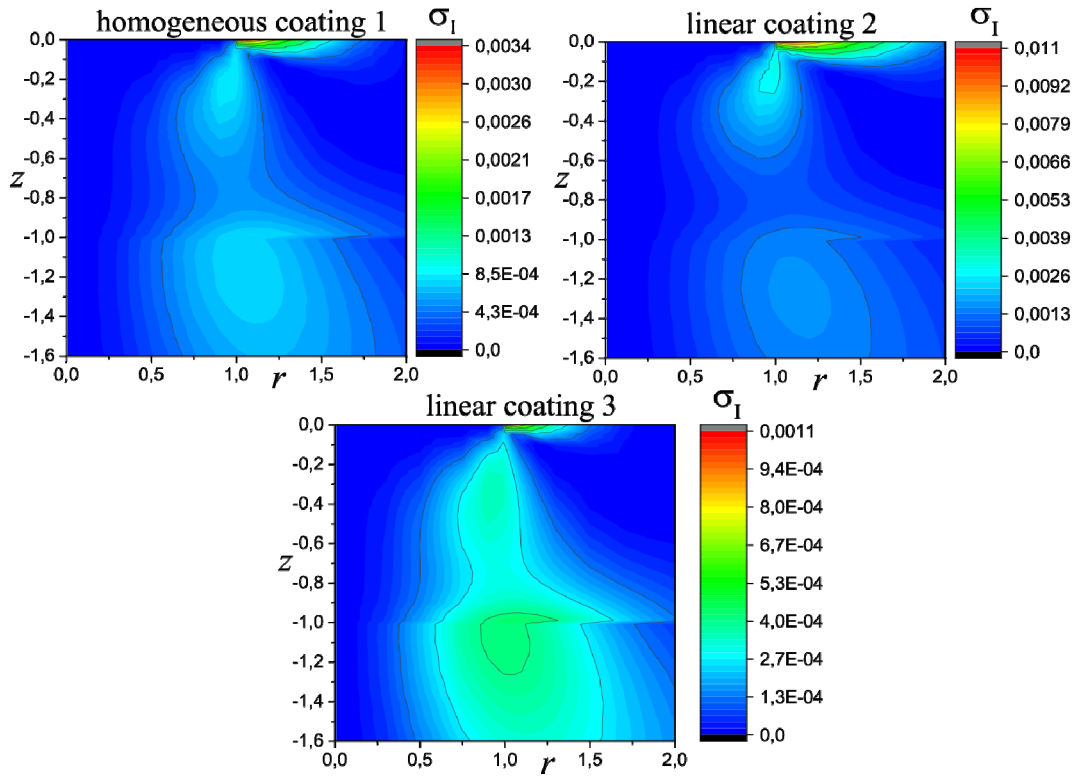


Рис. 5. Главные напряжения  $\sigma_I$  в покрытия 1–3  
 Fig. 5. Principal stresses  $\sigma_I$  in the coatings 1–3

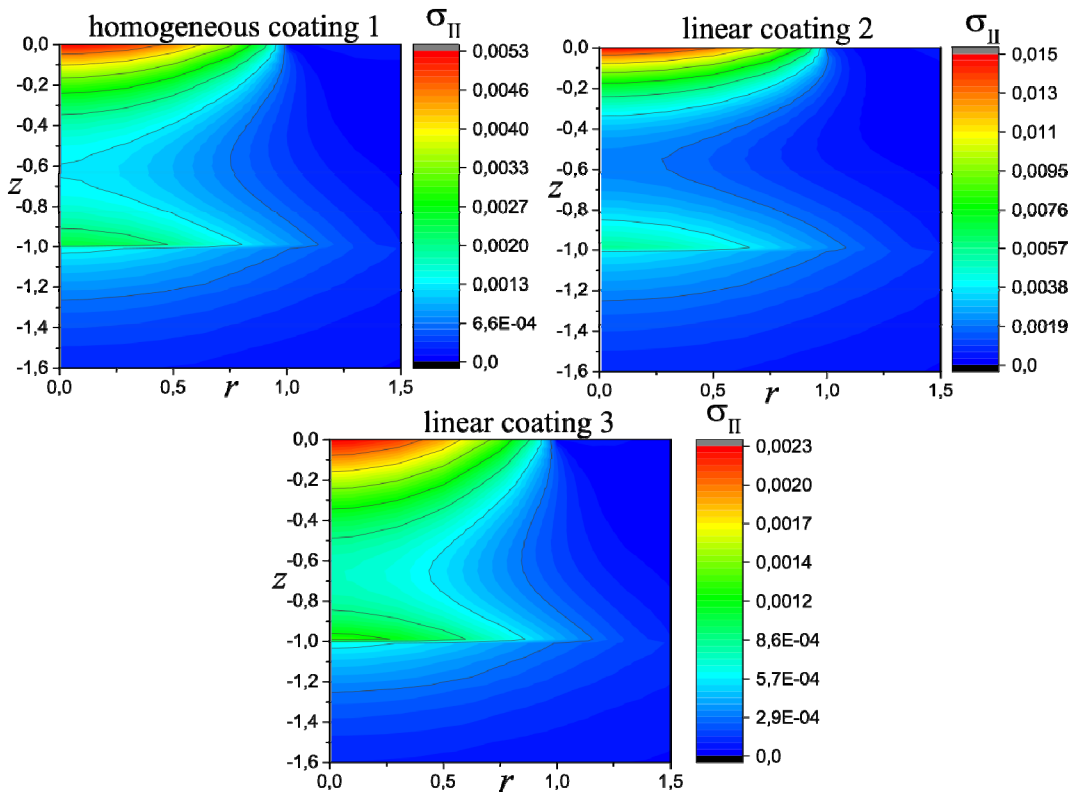


Рис. 6. Главные напряжения  $\sigma_{II}$  в покрытия 1–3  
 Fig. 6. Principal stresses  $\sigma_{II}$  in the coatings 1–3

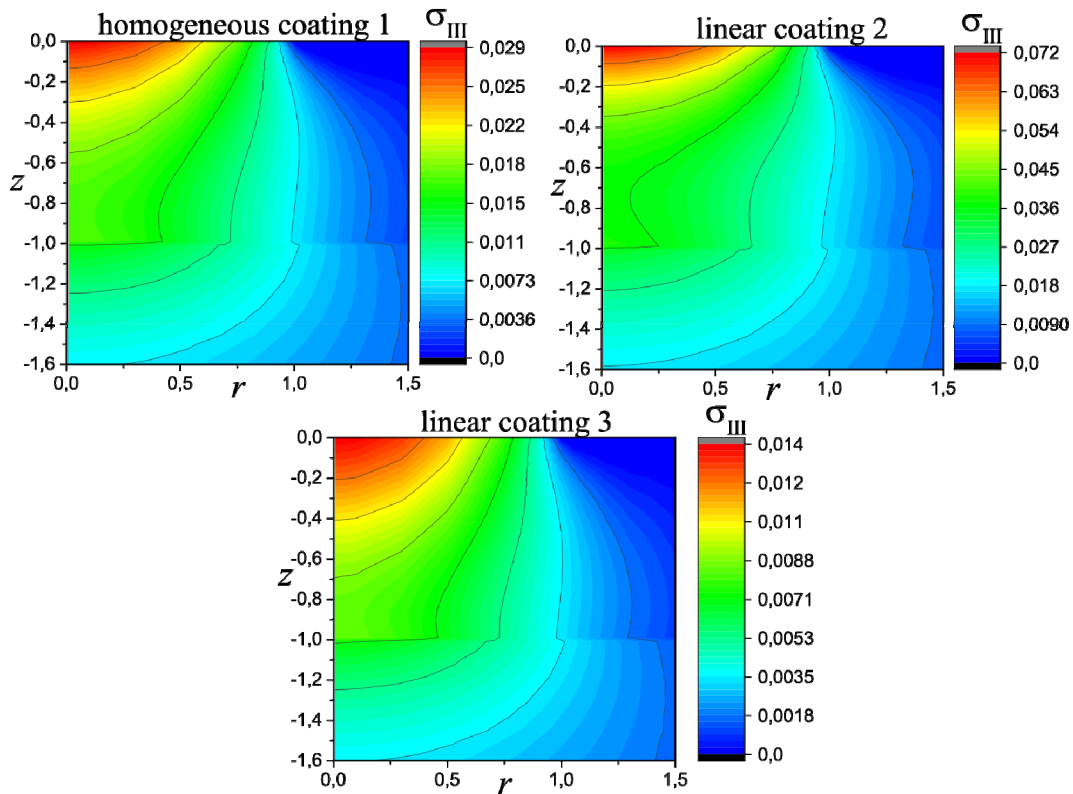


Рис. 7. Главные напряжения  $\sigma_{III}$  в покрытиях 1–3  
 Fig. 7. Principal stresses  $\sigma_{III}$  in the coatings 1–3

Графики величины  $\sigma_{III}$  напоминают графики  $\sigma_{II}$  (см. рис. 7). Также наблюдаются две зоны концентрации напряжений  $\sigma_{III}$  при тех же значениях координат  $r$  и  $z$ , что и в случае с  $\sigma_{II}$ . Основное отличие состоит в том, что эти зоны сливаются между собой. Так, например, для покрытия 3 они практически неразличимы. Кроме того, величина  $\sigma_{III}$  внутри подложки достаточно велика и медленнее убывает при удалении от точек максимума, чем  $\sigma_{II}$ .

В случае использования модели недеформируемого основания, очевидно, все рассматриваемые величины внутри покрытия равнялись бы нулю. Таким образом, напряженно-деформированное состояние отличалось бы существенно от полученного в настоящей статье и были бы упущены важные особенности распределения напряжений внутри подложки (см. рис. 5 и 7).

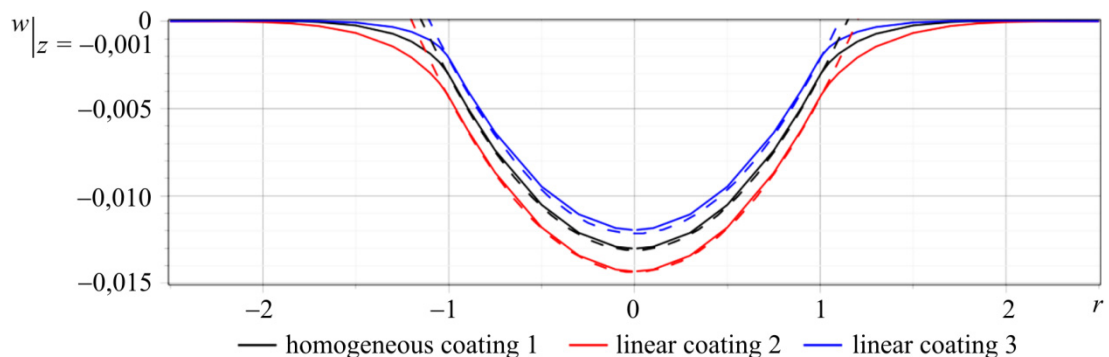


Рис. 8. Вертикальные смещения точек вблизи поверхности покрытий 1–3 (сплошные линии) и профили инденторов (пунктирные линии)  
 Fig. 8. Vertical displacements of points near the surface of the coatings 1–3 (solid lines) and profile of the indentors (dashed lines)

На рис. 8 изображены вертикальные смещения  $w(r, -0.001)$  точек вблизи поверхности покрытий 1–3, а также проиллюстрированы профили штампов. Хорошее совпадение формы инденторов и смещений, посчитанных численно с помощью приближенных формул, подтверждает точность полученных результатов.

## Заключение

В работе предложен метод построения полей упругих смещений, напряжений и деформаций на основании полученных ранее приближенных аналитических выражений для контактных напряжений, возникающих на поверхности при вдавливании сферического штампа в упругое полупространство с функционально-градиентным покрытием. Приведены численные расчеты величин смещений и главных напряжений, возникающих в случае однородного покрытия или покрытия с линейным изменением модуля Юнга по глубине (возрастанием или убыванием). Показано, что характер изменения упругих модулей по глубине покрытия существенно влияет на напряженно-деформированное состояние внутри покрытия и подложки. Выявлен ряд характерных особенностей при внедрении сферического штампа в мягкое покрытие, когда упругие свойства на границе стыка покрытия и подложки отличаются в 100 раз. Отмечено, что даже при таком большом отличии упругих свойств покрытия и подложки, использование модели недеформируемого основания привело бы к существенным неточностям в напряженно-деформированном состоянии.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 15-19-10056).*

## Библиографический список

1. Niino M., Maeda S. Recent development status of functionally gradient materials // Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan. – 1990. – Vol. 30. – No. 9. – P. 699–703.
2. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties / S. Aizikovich, V. Alexandrov, J. Kalker, L. Krenev // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol. 39. – P. 2745–2772.
3. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers / A.S. Vasiliev, S.S. Volkov, S.M. Aizikovich, Y.-R. Jeng // ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2014. – Vol. 94. – No. 9. – P. 705–712.
4. Thermoelastic frictional contact of functionally graded materials with arbitrarily varying properties / J. Liu, L.-L. Ke, Y.-S. Wang, J. Yang, F. Alam // International Journal of Mechanical Sciences. – 2012. – Vol. 63. – P. 86–98.
5. Liu T.J., Wang Y.S., Zhang C.Z. Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials // Archive of Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 78. – P. 267–282.
6. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51. – P. 2791–2806.
7. Kucuksucu A., Guler M.A., Avcı A. Mechanics of sliding frictional contact for a graded orthotropic half-plane // Acta Mechanica. – 2015. – Vol. 226. – P. 3333–3374.
8. Sliding contact analysis of functionally graded coating/substrate system / Y. Alinia, A. Beheshti, M.A. Guler, S. El-Borgi, A.A. Polycarpou // Mechanics of Materials. – 2016. – Vol. 94. – P. 142–155.
9. Suresh S., Giannakopoulos A.E., Alcalá J. Spherical indentation of compositionally graded materials: theory and experiments // Acta Materialia. – 1997. – Vol. 45. – P. 1307–1321.

10. Awojobi A.O. On the hyperbolic variation of elastic modulus in a non-homogeneous stratum // *International Journal of Solids and Structures*. – 1976. – Vol. 12. – No. 11. – P. 639–748.
11. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 2011. – Vol. 129. – No. 5. – P. 2923–2934.
12. Altenbach H., Eremeyev V.A. Direct approach-based analysis of plates composed of functionally graded materials // *Archive of Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 78. – No. 10. – P. 775–794.
13. Hertzian contact response of single-layer, functionally graded and sandwich coatings / X.C. Zhang, B.S. Xu, H.D. Wang, Y.X. Wu, Y. Jiang // *Materials and Design*. – 2007. – Vol. 28. – P. 47–54.
14. Schwarzer N., Richter F., Hecht G. The elastic field in a coated half-space under Hertzian pressure distribution // *Surface and Coatings Technology*. – 1999. – Vol. 114. – P. 292–304.
15. Some criteria for coating effectiveness in heavily loaded line elastohydrodynamically lubricated contacts. – Part I: Dry contacts / I.I. Kudish, S.S. Volkov, A.S. Vasiliev, S.M. Aizikovich // *Journal of Tribology*. – 2016. – Vol. 138, No. 2. – Article number 21504. DOI: 10.1115/1.4030956
16. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties / A.S. Vasiliev, M.V. Swain, S.M. Aizikovich, E.V. Sadyrin // *Archive of Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 86. – pp. 1247–1254.
17. Kulchytsky-Zhyhailo R., Rogowski G. Stresses in hard coating due to a rigid spherical indenter on a layered elastic half-space // *Tribology International*. – 2010. – Vol. 43. – No. 9. – P. 1592–1601.
18. Aizikovich S.M., Alexandrov, V.M., Trubchik, I.S. Bilateral asymptotic solution of one class of dual integral equations of the static contact problems for the foundations inhomogeneous in depth // *Operator Theory: Advanced Applications*. – 2009. – Vol. 191. – P. 3–17.
19. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины // *Прикладная математика и механика*. – 1959. – Т. 23, № 3 – С. 445–455.
20. Александров В.М., Ворович И.И. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины // *Прикладная математика и механика*. – 1964. – Т. 30, № 2. – С. 350–351.
21. Yoffe E.H. Modified Hertz theory for spherical indentation // *Philosophical magazine A: Physics of Condensed Matter, Structure, Defects and Mechanical Properties*. – 1984. – Vol. 50. – No. 6. – P. 813–828.
22. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
23. Александров В.М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // *Прикладная математика и механика*. – 1967. – №. 6. – С. 1117–1131.
24. Айзикович С.М., Васильев А.С. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства // *Прикладная математика и механика*. – 2013. – Т. 77, № 1. – С. 129–137.

## References

1. Niino M., Maeda S. Recent development status of functionally gradient materials. *Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan*, 1990, vol. 30, no. 9, pp. 699-703.
2. Aizikovich S., Alexandrov V., Kalker J., Krenev L. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, pp. 2745-2772.
3. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers. *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94, no. 9, pp. 705-712.
4. Liu J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Yang J., Alam F. Thermoelastic frictional contact of functionally graded materials with arbitrarily varying properties. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, vol. 63, pp. 86-98.

5. Liu T.J., Wang Y.S. and Zhang C.Z. Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, vol. 78, pp. 267-282.
6. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2791-2806.
7. Kucuksucu A., Guler M.A., Avci A. Mechanics of sliding frictional contact for a graded orthotropic half-plane. *Acta Mechanica*, 2015, vol. 226, pp. 3333-3374.
8. Alinia Y., Beheshti A., Guler M.A., El-Borgi S., Polycarpou A.A. Sliding contact analysis of functionally graded coating/substrate system. *Mechanics of Materials*, 2016, vol. 94, pp. 142-155.
9. Suresh S., Giannakopoulos A.E., Alcalá J. Spherical indentation of compositionally graded materials: theory and experiments. *Acta Materialia*, 1997, vol. 45, pp. 1307-1321.
10. Awojobi A.O. On the hyperbolic variation of elastic modulus in a non-homogeneous stratum. *International Journal of Solids and Structures*, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 639-748.
11. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, vol. 129, no. 5, pp. 2923-2934.
12. Altenbach H., Eremeyev V.A. Direct approach-based analysis of plates composed of functionally graded materials. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, vol. 78, no. 10, pp. 775-794.
13. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Wu Y.X., Jiang Y. Hertzian contact response of single-layer, functionally graded and sandwich coatings. *Materials and Design*, 2007, vol. 28, pp. 47-54.
14. Schwarzer N., Richter F., Hecht G. The elastic field in a coated half-space under Hertzian pressure distribution. *Surface and Coatings Technology*, 1999, vol. 114, pp. 292-304.
15. Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M. Some criteria for coating effectiveness in heavily loaded line elasto-hydrodynamically lubricated contacts—Part I: Dry contacts. *Journal of Tribology*, 2016, vol. 138, no. 2, Article number 21504. DOI: 10.1115/1.4030956
16. Vasiliev A.S., Swain M.V., Aizikovich S.M., Sadyrin E.V. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, vol. 86, pp. 1247-1254.
17. Kulchytsky-Zhyhailo R., Rogowski G. Stresses in hard coating due to a rigid spherical indenter on a layered elastic half-space. *Tribology International*, 2010, vol. 43, no. 9, pp. 1592-1601.
18. Aizikovich S.M., Alexandrov V.M., Trubchik I.S. Bilateral asymptotic solution of one class of dual integral equations of the static contact problems for the foundations inhomogeneous in depth. *Operator Theory: Advanced Applications*, 2009, vol. 191, pp. 3-17.
19. Vorovich I.I., Ustinov Iu.A. O davlenii shtampa na sloi konechnoi tolshchiny [Pressure of a die on an elastic layer of finite thickness]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, no. 2, pp. 637-650.
20. Aleksandrov V.M., Vorovich I.I. Kontaktnye zadachi dlia uprugogo sloia maloi tolshchiny [Contact problems for the elastic layer of small thickness]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1964, vol. 28, pp. 425-427.
21. Yoffe E.H. Modified Hertz theory for spherical indentation. *Philosophical magazine A: Physics of Condensed Matter, Structure, Defects and Mechanical Properties*, 1984, vol. 50, no. 6, pp. 813-828.
22. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. Neklassicheskie smeshennye zadachi teorii uprugosti [Non-classical mixed problem in theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
23. Aleksandrov V.M. O priblizhennom reshenii nekotorykh integral'nykh uravnenii teorii uprugosti i matematicheskoi fiziki [On the approximate solution of some integral equations of the theory of elasticity and mathematical physics]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1967, vol. 31, no. 6, pp. 1122-1136.
24. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S. Dvukhstoronnii asimptoticheskii metod resheniia integral'nogo uravneniia kontaktnoi zadachi o kruchenii neodnorodnogo po glubine uprugogo poluprostranstva [A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem for the torsion of an elastic halfspace inhomogeneous in depth]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 91-97.