



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.03

УДК 539.3

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

М.А. Ташкинов, Н.В. Михайлова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 01 июля 2016 г.
Принята: 28 ноября 2016 г.
Опубликована: 30 декабря 2016 г.

Ключевые слова:

пористые материалы, упругопластическая краевая задача, случайная структура, моментные функции, поля напряжений и деформаций, функция Грина, статистическое осреднение.

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена разработке метода вычисления полей микроструктурных напряжений и деформаций в многокомпонентных средах на основе вычисления статистических характеристик локальных полей напряжений и деформаций в компонентах, позволяющих учитывать заданные геометрические и физико-механические свойства компонентов. Исследуются представительные объемы структурно-неоднородных материалов, состоящие из нескольких компонентов. Предполагается, что компоненты являются однородными и изотропными. Для описания внутренней геометрии и оценки пространственного взаимодействия между микроструктурными компонентами используется набор структурных моментных функций различных порядков.

Поведение отдельных компонентов микроструктуры при нагружении представительного объема оценивается с помощью статистических характеристик локальных полей напряжений и деформаций. В качестве характеристик процессов деформирования использованы статистические моментные функции полей напряжений и деформаций в компонентах неоднородной среды. Аналитические выражения для статистических моментов и корреляционных функций полей напряжений и деформаций находятся с помощью статистического осреднения интегродифференциальных уравнений, содержащих моментные функции и получаемых на основе решения стохастических краевых задач в упругой и упругопластической постановке.

Рассмотрены некоторые частные случаи типичных неоднородных сред со случайной микроструктурой. Построены корреляционные функции напряжений и деформаций для разреженных структур со сферическими и эллипсоидальными полями включениями в упругом и упругопластическом случае. Проведено исследование и выбор аппроксимирующих зависимостей для полученных корреляционных функций. Полученные численные результаты могут использоваться для оценки механического поведения микроструктурных компонентов неоднородной среды при нагружении, а также для предсказания момента начала разрушения.

© ПНИПУ

© **Ташкинов Михаил Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией, e-mail: m.tashkinov@pstu.ru

Михайлова Наталья Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: evlnat@mail.ru

Mikhail A. Tashkinov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Head of Scientific Research Laboratory, e-mail: m.tashkinov@pstu.ru

Natalia V. Mikhailova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: evlnat@mail.ru

CORRELATION FUNCTIONS OF STRESS AND STRAIN FIELDS IN MICRO-HETEROGENEOUS MEDIA

M.A. Tashkinov, N.V. Mikhailova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 July 2016
Accepted: 28 November 2016
Published: 30 December 2016

Keywords:

porous materials, elastoplastic boundary value problem, random structure, correlation function, stress and strain fields, Green's function, statistical averaging.

ABSTRACT

The paper is devoted to the development of a method for calculation of microstructural stresses and strains fields in the multi-phase media based on the calculation of the statistical characteristics of the local stress and strain fields in the components, which takes into account the geometrical and mechanical properties of components. Representative volumes of structurally multi-phase heterogeneous materials were investigated. It is assumed that the components are homogeneous and isotropic. The internal geometry of the structure as well as the assessment of spatial interaction is described by the moment functions of different orders.

The behavior of individual components of the microstructure during loading of the representative volume is estimated using the statistical characteristics of the local stress and strain fields. The characteristics of deformation processes are the statistical moment functions of the stress and strain fields in the components of the material. Analytical expressions for the statistical moments and correlation functions of the stress and strain fields are obtained using statistical averaging of integral-differential equations that contain moment functions, and derived from the solution of the stochastic boundary value problems in elastic and elastoplastic formulation.

Some special cases of typical heterogeneous media with a random microstructure were considered. The correlation functions of stress and strain for sparse structures with spherical and ellipsoidal hollow inclusions in the elastic and elastoplastic cases were built. The study and the selection of approximating dependences obtained for the correlation functions were performed. The numerical results can be used to evaluate the mechanical behavior of the inhomogeneous medium microstructural component under different loading conditions and to predict fracture initiation.

© PNRPU

Введение

Важной и актуальной проблемой в механике неоднородных материалов является разработка моделей механики неоднородных сред со случайной структурой, учитывающих особенности реальной структуры композиционных материалов, процессы нелинейного деформирования, появление и развитие областей разрушения в структуре микронеднородных материалов задолго до полного разрушения конструкций.

Доказано, что влияние распределения включений играет решающую роль в макроскопическом поведении неоднородных сред [1–4]. Таким образом, создание точных математических моделей позволяет предсказывать эффективное механическое поведение с учетом особенностей микроструктуры, таких как размер, объемная доля, ориентация, дисперсия и кластеризация составляющих компонентов.

Распространенным направлением в микромеханике материалов со случайной структурой являются методы статистической механики для систем многих частиц, в которых используются многоточечные статистики для напряжений, деформаций и полей смещений, для описания взаимодействия неоднородностей. Основы статистической механики были заложены в работах М. Берана, В.А. Ломакина, Т.Д. Шермегора [6, 8, 9, 11, 12] и в дальнейшем широкое распространение получили во многих научных школах [1, 5, 7, 10, 13, 14]. Представленные характеристики полей учитывают хаотичность расположения элементов в структуре, а также статистическую дисперсию свойств компонентов. Например, эффективные упругие свойства могут быть оценены на основе статистических моментов первого

порядка полей напряжений и структурных моментных функций [7, 8, 13, 15]. Моменты высшего порядка используются для исследования распределения напряжений и деформаций в компонентах. Методы, связанные с описанием гетерогенных структур с помощью корреляционных функций, также используются для отождествления моделей микроструктуры с экспериментально анализируемыми образцами материалов [16–18].

Анализ деформирования и разрушения в рамках статистических подходов основан на разработке многоуровневых математических моделей и численных алгоритмов для решения задачи микромеханического описания процессов деформации представительного объема материала [5–8, 13, 14, 19]. Параметры таких процессов зависят от конкретных характеристик полей структурных напряжений и деформаций, которые могут быть определены из решения стохастических краевых задач, где уравнения и граничные условия содержат случайные величины.

Целью данной работы является разработка аналитического инструментария для анализа полей микроструктурных напряжений и деформаций в многокомпонентных неоднородных средах, позволяющего учитывать геометрические и физико-механические свойства компонентов, на основе построения корреляционных функций полей напряжений и деформаций. В разработанных ранее подходах в качестве статистических характеристик полей деформирования использовались статистические моменты, которые являются константами для конкретного представительного объема при заданном нагружении [6–8, 20–28]. При этом для оценки пространственного взаимодействия между микроструктурными компонентами используется набор структурных моментных функций различных порядков. Разработанная в данной работе аналитическая модель позволяет поставить в соответствие структурным моментным функциям корреляционные функции полей напряжений и деформаций, представляющие собой моментные функции второго порядка.

1. Постановка и решение стохастических краевых задач неоднородных сред

Аналитические выражения для корреляционных функций полей напряжений и деформаций находятся на основе решения стохастических краевых задач в упругой и упругопластической постановке. Стохастическая краевая задача теории упругости для композитов со случайной структурой в некоторой области (представительном объеме) V записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{r}) = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\vec{r}) + u_{j,i}(\vec{r})), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\varepsilon_{kl}(\vec{r}), \quad (3)$$

$$u_i(\vec{r})|_{\vec{r} \in \Gamma_u} = e_{ij}r_j, \quad (4)$$

где $C_{ijkl}(\vec{r})$ – тензор структурных модулей упругости; e_{ij} – компоненты симметричного тензора малых макродеформаций, с помощью которого определяется нагружение представительного объема; \vec{r} – радиус-вектор с компонентами (x_1, x_2, x_3) ; Γ_u – поверхность представительного объема. Между компонентами выполняются условия идеального контакта $u_i^{(I)} = u_i^{(M)}$, $\sigma_{ij}^{(I)}n_j = \sigma_{ij}^{(M)}n_j$.

Стохастическая краевая задача упругости композитов с помощью функции Грина сводится к интегродифференциальному уравнению относительно пульсаций перемещений [6–8, 22, 24], которое в первом и втором приближении для двухфазных материалов имеют следующий вид:

$$u'_{i,j}{}^{(1)}(\vec{r}) = e_{kl} \bar{C}_{mnkl} \int_V G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) (\lambda'(\vec{r}_1))_{,n} dV_1, \quad (5)$$

$$u'_{i,j}{}^{(2)}(\vec{r}) = e_{kl} \bar{C}_{mnkl} \int_{V_1} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) (\lambda'(\vec{r}_1))_{,n} dV_1 + \\ + e_{oq} \bar{C}_{mnkl} \bar{C}_{fsoq} \int_{V_1} \int_{V_{11}} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) \left[\lambda'(\vec{r}_1) G_{kf,l}(\vec{r}_1, \vec{r}_{11}) (\lambda'(\vec{r}_{11}))_{,11s} \right]_{,1n} dV_{11} dV_1, \quad (6)$$

где $G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)$ функция Грина; $_{,j}$ обозначение производной $\frac{\partial}{\partial r_j}$; $\lambda'(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) - \langle \lambda(\vec{r}) \rangle$ флуктуация случайной индикаторной функции в точке; $\bar{C}_{mnkl} = C'_{mnkl} - C_{mnkl}^M$ – разность тензоров структурных модулей упругости включений и матрицы; $u'_{k,l}(\vec{r})$ – поле флуктуаций перемещений в представительном объеме, которое является решением краевой задачи теории упругости или упругопластичности в стохастической постановке.

С учетом разложения полей деформаций и напряжений на среднюю составляющую и пульсацию для пульсаций структурных напряжений и деформаций справедливы следующие соотношения:

$$\ddot{\varepsilon}'_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (u'_{i,j}(\vec{r}) + u'_{j,i}(\vec{r})), \quad (7)$$

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}) = \sigma_{ij}(\vec{r}) - \langle \sigma_{ij}(\vec{r}) \rangle.$$

Тогда получаем

$$\varepsilon'_{ij}(\vec{r})^{(1)} = \frac{1}{2} e_{kl} \bar{C}_{mnkl} \int_{V_1} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \lambda'(\vec{r}_1)_{,1n} dV_1, \quad (8)$$

$$\varepsilon'_{ij}(\vec{r})^{(2)} = \frac{1}{2} \left(e_{kl} \bar{C}_{mnkl} \int_{V_1} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \lambda'(\vec{r}_1)_{,1n} dV_1 + \right. \\ \left. + e_{oq} \bar{C}_{fsoq} \bar{C}_{mnkl} \int_{V_1} \int_{V_{11}} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) G_{kf,l}(\vec{r}_1, \vec{r}_{11}) (\lambda'(\vec{r}_1) \lambda'(\vec{r}_{11}))_{,1n,11n} dV_{11} dV_1 \right), \quad (9)$$

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}) = C'_{ijmn}(\vec{r}) \varepsilon'_{mn} - \langle C'_{ijmn}(\vec{r}) \varepsilon'_{mn} \rangle + C_{ijmn}(\vec{r}) \varepsilon'_{mn}(\vec{r}). \quad (10)$$

Здесь комбинации типа $\lambda'(\vec{r}_1) \lambda'(\vec{r}_{11})$ при последующем осреднении образуют структурные моментные функции, значения которых могут быть получены для геометрии исследуемых представительных объемов. Выражения (7)–(9) используются для получения аналитического представления корреляционных функций полей напряжений и деформаций.

Использование второго приближения(9) предполагает использование структурных моментных функций более высокого порядка, при этом значительно увеличивается время расчета. Установлено, что для исследуемого класса пористых композитов вклад, вноси-

мый в результаты вторым приближением, является незначительным (разница с результатами в первом приближении составляет 2-4%), поэтому с целью экономии вычислительных ресурсов представляется целесообразным использование первого приближения (8).

2. Аналитические выражения для многоточечных корреляционных функций полей напряжений и деформаций

Напряженно-деформированное состояние представительного объема композита характеризуют моменты и моментные функции полей микроструктурных напряжений и деформаций. Существуют безусловные и условные статистические характеристики, предназначенные для описания механического поведения композита как макрооднородного материала и его компонентов в отдельности [7, 8]. Выражения для многоточечных условных и безусловных моментных функций стохастических полей напряжений и деформаций в представительных объемах композитов позволяют описывать взаимосвязь полей в удаленных на различное расстояние точках и при необходимости вычислять значения моментов случайных полей в произвольных точках представительного объема.

В общем виде моментные функции n -го порядка полей напряжений могут быть получены из выражения

$$M_{\sigma_c}^{(n)}(|\vec{r} - \vec{x}|) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \langle \sigma \rangle^{(n-i)} \left(\frac{1}{\langle \lambda_c \rangle} \langle \lambda_c \sigma^{(i)} \rangle + D_{(i)}^{(\sigma)} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} D_{(i)}^{(\sigma_c)} \langle \sigma \rangle_C^{(n-i)}, \quad (11)$$

$$\langle \sigma \rangle^{(n-i)} = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle \dots \langle \sigma_{xy} \rangle,$$

$$\langle \sigma \rangle_C^{(n-i)} = \langle \sigma_{ij} \rangle_C \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_C \dots \langle \sigma_{xy} \rangle_C,$$

$$\langle \lambda \sigma^{(i)} \rangle = \langle \lambda'_c(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \dots \sigma'_{xy}(\vec{t}) \rangle, \quad (12)$$

$$D_{(i)}^{(\sigma)} = \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \dots \sigma'_{xy}(\vec{t}) \rangle,$$

$$D_{(i)}^{(\sigma_c)} = \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \dots \sigma'_{xy}(\vec{t}) \rangle_C,$$

где $\langle \rangle$ оператор осреднения есть оператор математического ожидания. Для случайных однородных эргодических полей осреднение по объему совпадает со статистическим осреднением. $\lambda_c(\vec{r})$ – индикаторная функция для представительного объема, равная 1, если радиус-вектор \vec{r} находится в компоненте C , и 0 – в остальных случаях, $\lambda'_c(\vec{r}) = \lambda_c(\vec{r}) - \langle \lambda_c(\vec{r}) \rangle$ – флуктуация индикаторной функции, величина $\langle \lambda_c(\vec{r}) \rangle$ определяет объемную долю компоненты C в представительном объеме.

В данных формулах случайные поля флуктуаций напряжений $\sigma'_{ij}(\vec{r})$ выражаются через поле структурных модулей упругости $C_{ijkl}(\vec{r}) = \langle C_{ijkl}(\vec{r}) \rangle + C'_{ijkl}(\vec{r})$, и флуктуации полей деформаций $\varepsilon'_{ij}(\vec{r})$ формулой (10).

Для многокомпонентного композита в общем виде флуктуации структурных модулей упругости в i -м компоненте выражаются в следующем виде в упругом (13) и упругопластическом случае (14):

$$C'_{mnkl}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^m (\langle \lambda_i(\vec{r}) \rangle + \lambda'_i(\vec{r})) C_{mnkl}^{(i)} - \langle C_{mnkl}(\vec{r}) \rangle, \quad (13)$$

$$C'_{mnkl}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^m (\langle \lambda_i(\vec{r}) \rangle + \lambda'_i(\vec{r})) C_{mnkl}^{(i)} (\langle \varepsilon_{kk} \rangle_{(i)}, \Lambda_{(i)}) - \langle C_{mnkl}(\vec{r}) \rangle, \quad (14)$$

где $\Lambda_{(i)} = \sqrt{\langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_{(i)} \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle_{(i)}}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ – девиаторная часть тензора деформаций.

Непосредственно получить решение упругопластической краевой задачи обычно не удается, так как связь тензоров напряжений и деформаций является физически нелинейной, и применить к ней традиционные методы механики затруднительно. Поэтому системе уравнений структурно-феноменологической модели, как и в упругой задаче, ставится в соответствие система уравнений для среды с эффективными свойствами. Чтобы воспользоваться статистическими методами, физические уравнения (которые записываются через определяющие соотношения в инвариантной форме: $\sigma_{ij}(\vec{r}) = [3K(\vec{r}, j_\varepsilon^{(1)}, j_\varepsilon^{(2)}) V_{ijkl} + 2\mu(\vec{r}, j_\varepsilon^{(1)}, j_\varepsilon^{(2)}) D_{ijkl}] \varepsilon_{kl}(\vec{r})$) необходимо линеаризовать при определенных допущениях. Для решения поставленной задачи применяется вариант метода статистического осреднения, в пределах объема каждого компонента композита пренебрегаются пульсации деформаций, стоящие под знаком материальных функций

$$\mu_{(i)}(j_\varepsilon^{(1)}, j_\varepsilon^{(2)}) = \mu_{(i)}(\langle \varepsilon_{ii} \rangle_{(i)}, \Lambda_{f,m}), K_{f,m}(j_\varepsilon^{(1)}, j_\varepsilon^{(2)}) = K_{f,m}(\langle \varepsilon_{ii} \rangle_{f,m}, \Lambda_{f,m}).$$

С учетом формулы (10) и с помощью процедуры осреднения получены выражения для моментных функций полей напряжений, описывающих представительный объем как макрооднородный. Так, соотношение для безусловной корреляционной функции полей напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} M_{\sigma_c}^{(2)}(|\vec{r} - \vec{x}|) &= \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle = e_{kl} e_{\phi h} \bar{C}_{ijkl} \bar{C}_{\alpha\beta\phi h} D_2^{(\lambda)} + \\ &+ e_{kl} \bar{C}_{ijkl} \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{x}) \rangle + e_{\phi h} \bar{C}_{\alpha\beta\phi h} \langle C_{ijkl} \rangle \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle + \\ &+ \langle C_{ijkl} \rangle \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \langle \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{x}) \rangle - e_{kl} \bar{C}_{ijkl} \bar{C}_{\alpha\beta\phi h} \langle \lambda'(\vec{r}) \lambda'(\vec{x}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{x}) \rangle - \\ &- e_{\phi h} \bar{C}_{ijkl} \bar{C}_{\alpha\beta\phi h} \langle \lambda'(\vec{r}) \lambda'(\vec{x}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle - \bar{C}_{\alpha\beta\phi h} \langle C_{ijkl} \rangle \langle \lambda'(\vec{x}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{x}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle - \\ &- \bar{C}_{ijkl} \langle C_{\alpha\beta\phi h} \rangle \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{x}) \rangle + \bar{C}_{ijkl} \bar{C}_{\alpha\beta\phi h} \langle \lambda'(\vec{r}) \lambda'(\vec{x}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \varepsilon'_{\phi h}(\vec{x}) \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом разложения полей деформаций и напряжений на средние составляющие и пульсации (7) для многокомпонентной неоднородной среды корреляционные функции (моментные функции второго порядка) полей деформаций и напряжений в компоненте С записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon_c}^{(2)}(|\vec{r} - \vec{x}|) &= \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle_c = \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle + e_{ij} e_{\alpha\beta} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_c \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_c + \\ &+ \frac{1}{\langle \lambda_c(\vec{r}) \rangle} (\langle \lambda'_c(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle + e_{ij} \langle \lambda'_c(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle + e_{\alpha\beta} \langle \lambda'_c(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M_{\sigma_c}^{(2)}(|\vec{r} - \vec{x}|) &= \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle_c = \langle \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle + \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle - \langle \sigma_{ij} \rangle_c \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_c + \\ &+ \frac{1}{\langle \lambda_c(\vec{r}) \rangle} (\langle \lambda'_c(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle + \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \lambda'_c(\vec{r}) \sigma'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle + \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle \langle \lambda'_c(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \rangle). \end{aligned} \quad (17)$$

Средние значения тензора деформаций и напряжений в компоненте C принимают вид [7, 8]

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_C = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{\langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle} \left(\langle \lambda'_C(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle \right), \quad (18)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_C = \langle \sigma_{ij} \rangle + \frac{1}{\langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle} \langle \lambda'_C(\vec{r}) \sigma'_{ij}(\vec{r}) \rangle. \quad (19)$$

Искомые моментные функции полей напряжений и полей деформаций как в компонентах неоднородной среды (16), (17), так и гомогенизированном представительном объеме (15) зависят от ряда безусловных и смешанных функций различных порядков, в которые входят флуктуации полей деформации $\varepsilon'_{ij}(\vec{r})$, а также многоточечные структурные моментные функции $K_{\lambda}^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$, которые содержат статистическую информацию о геометрии неоднородной структуры композитов. Для многокомпонентной среды структурные моментные функции строятся для каждой компоненты в отдельности:

$$\begin{aligned} K_{\lambda_C}^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) &= \langle \lambda'_C(\vec{r}) \lambda'_C(\vec{r}_1) \dots \lambda'_C(\vec{r}_n) \rangle = \\ &= \langle (\lambda_C(\vec{r}) - \langle \lambda_C(\vec{r}) \rangle) (\lambda_C(\vec{r}_1) - \langle \lambda_C(\vec{r}_1) \rangle) \dots (\lambda_C(\vec{r}_n) - \langle \lambda_C(\vec{r}_n) \rangle) \rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Значения структурных моментных функций могут быть получены на основе анализа геометрической модели представительного объема [16, 18, 24].

В качестве примера далее приведены некоторые безусловные корреляционные функции полей деформаций, входящие в выражения для корреляционных функций полей напряжений и полученные с использованием первого и второго приближения решения стохастической краевой задачи в случае двухфазного композита:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle^{(1)} &= \frac{1}{4} e_{mn} e_{\nu\mu} \bar{C}_{klmn} \bar{C}_{\gamma\theta\nu\mu} \int_{V_1} \int_{V_2} (G_{ik,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jk,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) (G_{\alpha\gamma,\beta}(\vec{x}, \vec{x}_1) + G_{\beta\gamma,\alpha}(\vec{x}, \vec{x}_1)) \times \\ &\quad \times K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{x}_1)_{,l0} dV_1 dV_2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rangle^{(2)} = \\ &= \frac{1}{4} \bar{C}_{mnlk} \bar{C}_{\gamma\eta\phi h} \left(e_{kl} e_{\phi h} \int_{V_1} \int_{V_2} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) (G_{\alpha\gamma,\beta}(\vec{x}, \vec{x}_1) + G_{\beta\gamma,\alpha}(\vec{x}, \vec{x}_1)) \times \right. \\ &\quad \times K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{x}_1)_{,ln,1\eta} dV_2 dV_1 + \\ &\quad + e_{kl} e_{bd} \bar{C}_{vwbd} \int_{V_1} \int_{V_2} \int_{V_{21}} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) (G_{\alpha\gamma,\beta}(\vec{x}, \vec{x}_1) + G_{\beta\gamma,\alpha}(\vec{x}, \vec{x}_1)) \times \\ &\quad \times G_{\phi\nu,h}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) K_{\lambda}^{(3)}(\vec{r}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2)_{,ln,1\eta,2w} dV_{21} dV_2 dV_1 + \\ &\quad + e_{\phi h} e_{oq} \bar{C}_{fsoq} \int_{V_1} \int_{V_2} \int_{V_{11}} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) (G_{\alpha\gamma,\beta}(\vec{x}, \vec{x}_1) + G_{\beta\gamma,\alpha}(\vec{x}, \vec{x}_1)) \times \\ &\quad \times G_{kf,l}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) K_{\lambda}^{(3)}(\vec{r}_1, \vec{x}_1, \vec{r}_2)_{,ln,1\eta,2s} dV_{11} dV_2 dV_1 + \\ &\quad \left. + e_{oq} e_{bd} \bar{C}_{fsoq} \bar{C}_{vwbd} \int_{V_1} \int_{V_2} \int_{V_{11}} \int_{V_{21}} (G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1)) (G_{\alpha\gamma,\beta}(\vec{x}, \vec{x}_1) + G_{\beta\gamma,\alpha}(\vec{x}, \vec{x}_1)) \times \right. \\ &\quad \left. \times G_{kf,l}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) G_{\phi\nu,h}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \frac{\partial^4 K_{\lambda}^{(4)}(\vec{r}_1, \vec{x}_1, \vec{r}_2, \vec{x}_2)}{\partial r_{1n} \partial x_{1\eta} \partial r_{2s} \partial x_{2w}} dV_{21} dV_{11} dV_2 dV_1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, получены выражения для вычисления моментных функций первого и второго порядков полей напряжений и деформаций как в целом так и в компонентах композита с использованием структурных моментных функций высших порядков.

3. Трехмерные модели внутренней полидисперсной структуры текстурированных матричных композитов с эллипсоидальными включениями

Для реализации методики были построены трехмерные модели внутренней полидисперсной структуры исследуемых материалов – двухкомпонентных текстурированных матричных композитов с эллипсоидальными включениями. В отличие от хаотически армированных композитов рассматривается текстурированный композит с эллипсоидальными включениями, имеющими определенную пространственную ориентацию. Предполагается, что включения расположены в матрице равномерно. Также было введено условие, согласно которому включения не могут пересекаться. Для создания геометрической модели был использован алгоритм, позволяющий синтезировать полидисперсные эллипсоидальные включения в представительном объеме заданного размера.

Для проверки выполнения условия отсутствия пересечений эллипсоидов каждое включение описывается параллелепипедом, для которого проверяется пересечение с другими, уже существующими. При условии, что все эллипсоиды находятся в одной системе координат, необходимо отдельно сравнить минимумы и максимумы координат вершин параллелепипедов отдельно по трем осям. Так, если первый параллелепипед определен значениями координат A_{x_min} , A_{x_max} , A_{y_min} , A_{y_max} , A_{z_min} , A_{z_max} , а второй B_{x_min} , B_{x_max} , B_{y_min} , B_{y_max} , B_{z_min} , B_{z_max} , то эллипсоиды пересекаются, если выполняются все неравенства: $A_{x_min} < B_{x_max}$, $A_{x_max} > B_{x_min}$, $A_{y_min} < B_{y_max}$, $A_{y_max} > B_{y_min}$, $A_{z_min} < B_{z_max}$, $A_{z_max} > B_{z_min}$.

На рис. 1 приведены изображения некоторых полученных моделей представительных объемов с различной объемной долей эллипсоидальных включений.

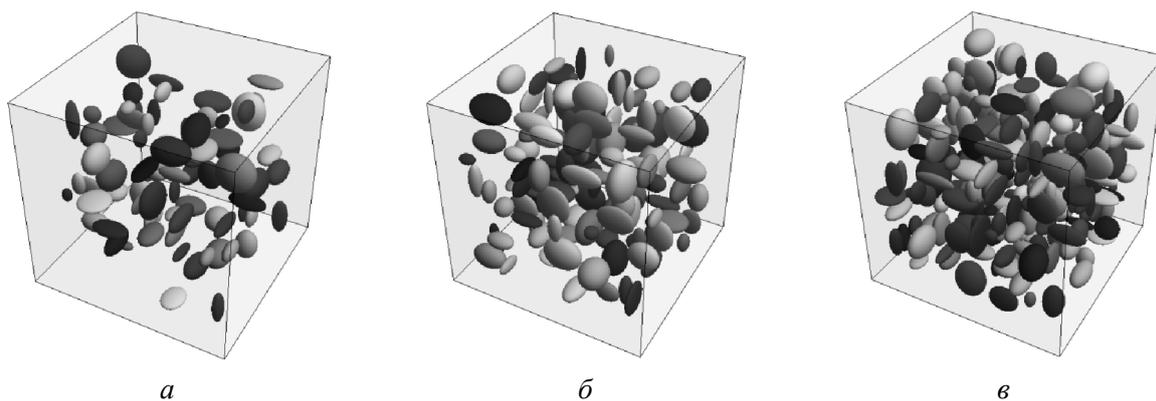


Рис. 1. Представительные объемы структур с эллипсоидальными включениями с различной объемной долей: a – 5 %, количество включений 77; b – 10 %, количество включений 158; c – 15 %, количество включений 245

Fig. 1. Representative volumes of structures with ellipsoidal inclusions of different volume fractions: a – 5 %, the number of inclusions is 77; b – 10 %, the number of inclusions is 158; c – 15 %, the number of inclusions is 245

Для исследуемых структур с эллипсоидальными включениями получены значения структурных моментных функций высших порядков, а также рассчитаны коэффициенты аналитических аппроксимирующих выражений для структурных моментных функций, необходимых для вычисления моментных функций полей напряжений и деформаций. В качестве выражений для аппроксимации использованы следующие зависимости [23, 27]:

$$f_{\lambda}^{(2)}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) = \exp(-c_1 |\vec{r} - \vec{r}_1|) [\cos(c_2 |\vec{r} - \vec{r}_1|) + c_3 \sin(c_2 |\vec{r} - \vec{r}_1|)], \quad (23)$$

$$f_{\lambda}^{(n)}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) = \exp(-c_1 |\vec{r} - \vec{r}_1|) \left[\cos(c_2 |\vec{r} - \vec{r}_1|^2) \right], \quad (24)$$

где (23) использовано для аппроксимации функций второго порядка; (24) – для функций порядка выше второго. Для построения моментных функций высшего порядка шаг между радиусами-векторами принимался равным. На рис. 2 отображены графики аппроксимированных моментных функций различных порядков для структуры с объемной долей включений 10 %.

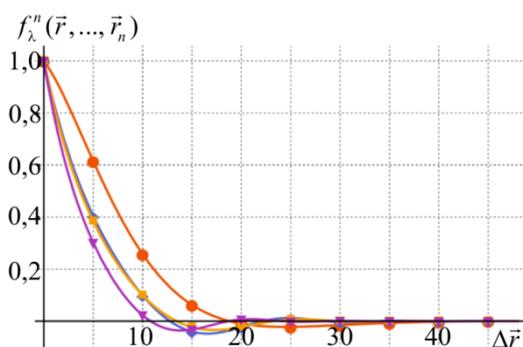


Рис. 2. Моментные функции различных порядков для структуры с объемной долей эллипсоидальных включений 10%: —●— моментная функция второго порядка; —◆— моментная функция третьего порядка; —■— моментная функция четвертого порядка; —▼— моментная функция пятого порядка

Fig. 2. Correlation functions of different orders for a structure with a volume fraction of ellipsoidal inclusions amounting to 10 %: —●— is the second order correlation function; —◆— is the third order correlation function; —■— is the fourth order correlation function; —▼— is the fifth order correlation function

4. Значения моментных функций полей деформирования в упругом случае при различных условиях нагружения и физико-механических характеристиках компонентов композитов

Для получения значений условных (в компонентах композита) и безусловных (для представительного объема как целого) моментных функций полей напряжений и деформаций в представительных объемах и их компонентах использовано решение стохастической упругой и упругопластической краевой задачи в первом и втором приближении. В качестве входных параметров для вычислений выступают константы, характеризующие свойства компонентов представительного объема и входящие в функции Грина в подын-

тегральных выражениях, а также геометрические свойства компонентов, определяемые структурными моментными функциями. Нагружение представительного объема задается в виде граничных условий стохастической краевой задачи.

Алгоритм численной реализации методики заключается в вычислении значений интегралов в выражениях для корреляционных функций при необходимых комбинациях индексов в зависимости от расстояния между радиусами-векторами \vec{r} и \vec{x} . При этом значения моментной функции $M_\varepsilon^{(2)}(|\vec{r} - \vec{x}|)$ находятся путем осреднения моментов $\varepsilon'_{ij}(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{x})$ для заданного расстояния между радиусами-векторами $|\vec{r} - \vec{x}|$, вычисленных в дискретных точках представительного объема V . Точность вычисления значений моментной функции определяется частотой (шагом) дискретизации представительного объема.

Для реализации методик численного вычисления значений моментных функций полей деформирования в упругом и упругопластическом случае при различных условиях нагружения представительных объемов и физико-механических характеристиках компонентов созданы программные инструменты, реализованные в виде программного кода в среде Wolfram Mathematica, с использованием возможностей встроенных функций и параллельных вычислений, а также в среде C++. Используемые численные методики аналогичны методикам при вычислении моментов полей напряжений и деформаций, которые подробно рассмотрены в работах [24, 28].

На приведенных ниже рисунках представлены некоторые результаты для моментных функций полей деформаций в представительном объеме пористого композита. Представлены дискретные значения и их интерполяция. Для расчетов был выбран частный случай деформирования как чистый сдвиг.

Для упругой краевой задачи был задан тензор макродеформаций e_{ij} на границе представительного объема в виде граничных условий (4), равный $e_{12} = e_{21} = 10^{-6}$. Упругие свойства матрицы заданы следующими величинами: модуль упругости матрицы пористого композита $E_M = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,3$.

На рис. 3–4 представлена нормированная корреляционная функция полей деформаций для пористого материала с различным содержанием сферических пор ($p = 0,20$ и $p = 0,24$). Нормирование проводилось делением значений построенной корреляционной функции на дисперсию полей деформаций, т.е. на корреляционную функцию при $|\vec{r} - \vec{x}| = 0$. В качестве размеров $|\vec{r} - \vec{x}|$ используем условные единицы. Вид полученных моментных функций полей деформаций в целом схож с видом структурных моментных функций (см. рис. 2), поэтому для аппроксимации были протестированы те же исходные выражения (25), (26), что были использованы для аппроксимации структурных функций.

Проведено исследование моментной функции полей деформаций для структур с эллипсоидальными порами от объемного содержания (рис. 5) и от вариации разброса максимального размера полуоси эллипсоидальных включений (рис. 6).

Так как наибольшие значения корреляционной функции полей деформаций возникают при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$, а это дисперсии полей деформаций, то при решении краевой задачи в каких-то частных случаях достаточно учитывать только дисперсии для характеристики полей деформаций.

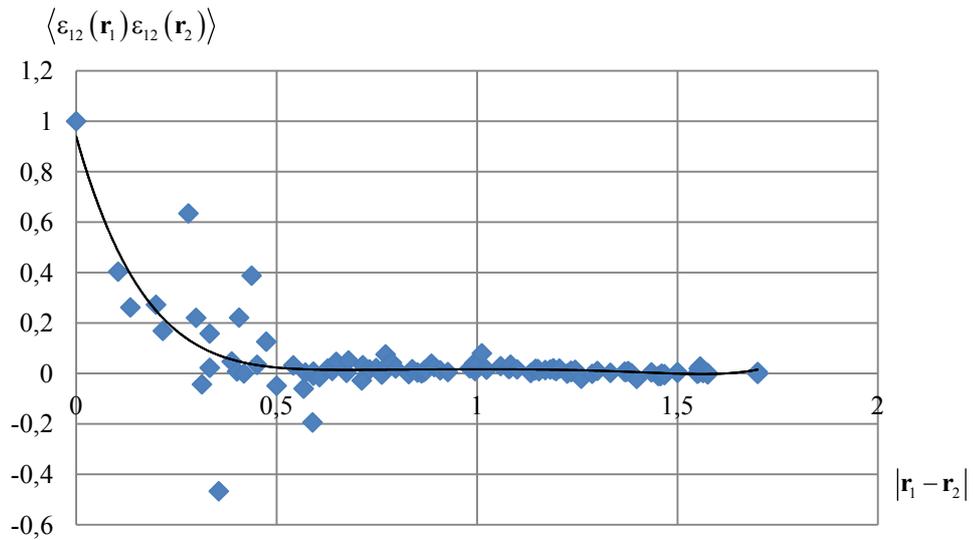


Рис. 3. Нормированная интерполированная моментная функция деформации $\langle \varepsilon_{12}(\mathbf{r}_1)\varepsilon_{12}(\mathbf{r}_2) \rangle$ для структуры с объемной долей 20 % при чистом сдвиге; \blacklozenge значения нормированной моментной функции деформаций; — интерполированная моментная функция деформаций

Fig. 3. Normalized interpolated correlation function of strain $\langle \varepsilon_{12}(\mathbf{r}_1)\varepsilon_{12}(\mathbf{r}_2) \rangle$ for a structure with a volume fraction of 20 % at pure share; \blacklozenge are values of normalized correlation function of strains; — is interpolated correlation function of strains

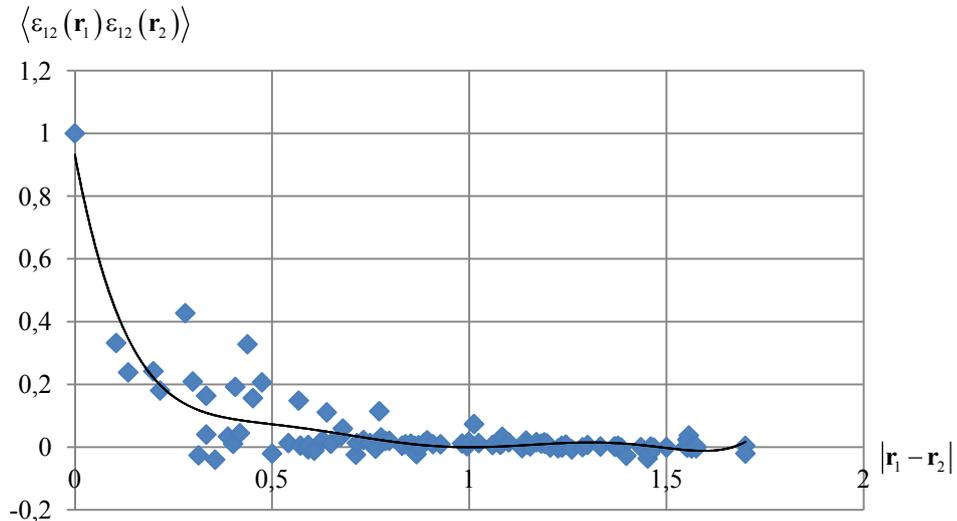


Рис. 4. Нормированная моментная функция деформации $\langle \varepsilon_{12}(\mathbf{r}_1)\varepsilon_{12}(\mathbf{r}_2) \rangle$ для структуры с объемной долей 24 % при чистом сдвиге; \blacklozenge значения нормированной моментной функции деформаций; — интерполированная моментная функция деформаций

Fig. 4. Normalized correlation function of strain $\langle \varepsilon_{12}(\mathbf{r}_1)\varepsilon_{12}(\mathbf{r}_2) \rangle$ for a structure with a volume fraction of 24 % at pure share; \blacklozenge are values of normalized correlation function of strains; — is interpolated correlation function of strains

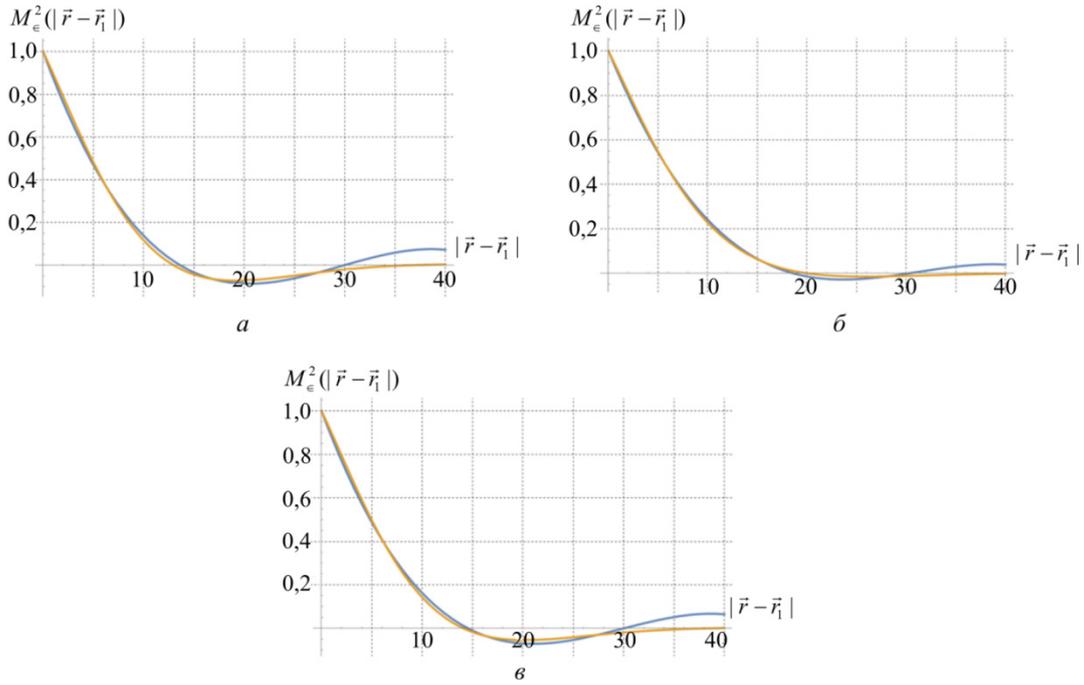


Рис. 5. Интерполированная (—) и аппроксимированная (—) моментные функции деформаций для структур с различным разбросом максимального размера полуоси эллипсоидальных включений: a – от 6 до 22; b – от 9 до 13; c – от 4 до 24
 Fig. 5. Interpolated (—) and approximated (—) correlation function of strains for structures with a different range of maximum sizes of semi-axis ellipsoidal inclusions: a – is from 6 to 22; b – from 9 to 13; c – from 4 to 24

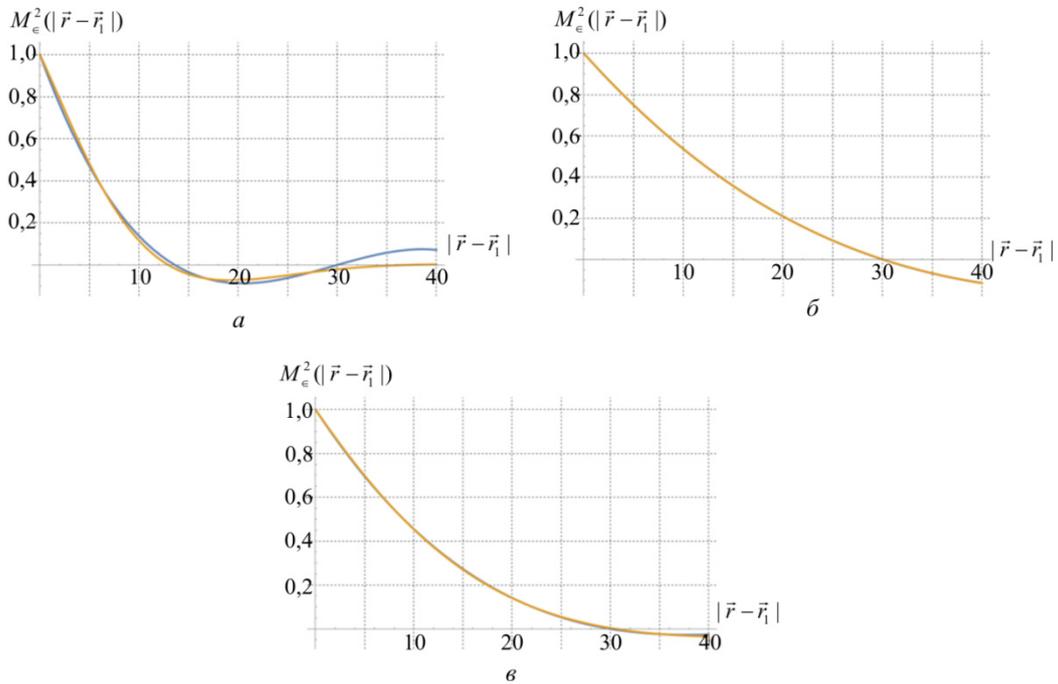


Рис. 6. Интерполированная (—) и аппроксимированная (—) моментные функции деформаций для структур с различной объемной долей включений: a – 4 %; b – 10 %; c – 13 %
 Fig. 6. Interpolated (—) and approximated (—) correlation function of strains for structures with a different range of volume fraction of inclusions: a – 4 %; b – 10 %; c – 13 %

В качестве примера решения упругопластической задачи был произведен расчет также для пористого материала с матрицей, обладающей следующими свойствами: модуль упрочнения $G_M = 44,2$ ГПа, модуль сдвига $G'_M = 14,3$ ГПа, коэффициент объемного сжатия $K_M = 132,2$ ГПа, $j_{\varepsilon_T}^{(2)} = 6,37 \times 10^{-4}$. В качестве примера представлены моментные

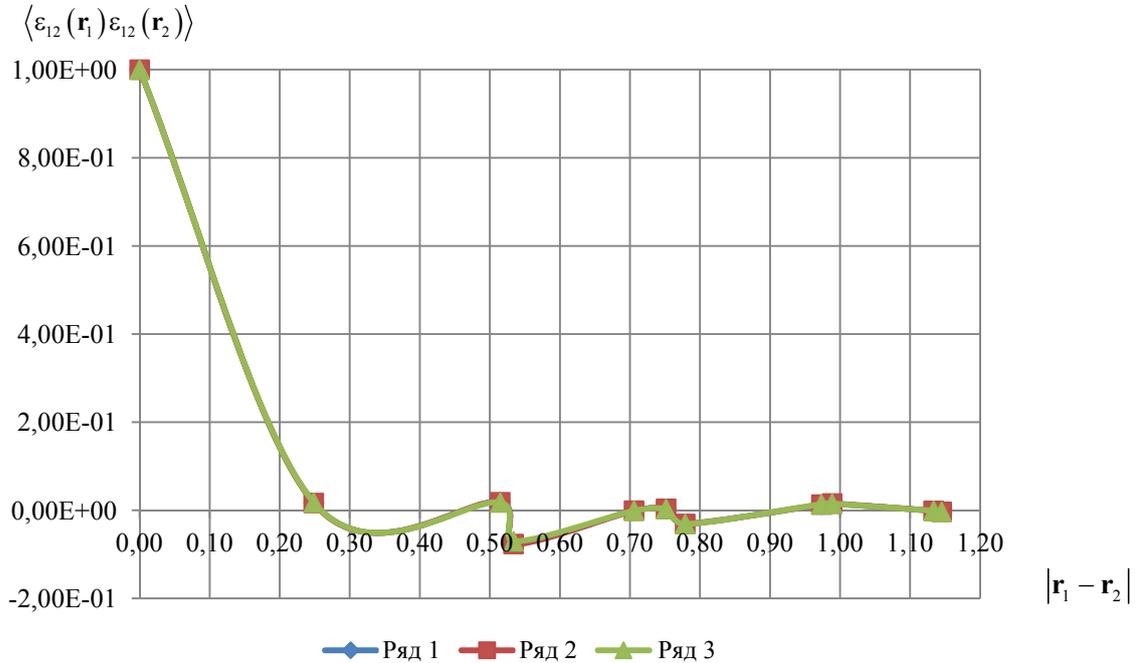


Рис. 7. Нормированные моментные функции полей деформаций в упругопластической задаче в разных точках деформирования для структур со сферическими включениями с разным объемным содержанием $p = 0,20; 0,24; 0,28$ при $\langle \varepsilon_{12} \rangle = 2,25E - 04$

Fig. 7. Normalized correlation functions of strain fields in an elastoplastic problem at different straining points for structures with spherical inclusions of different volume fractions $p = 0,20; 0,24; 0,28$ at $\langle \varepsilon_{12} \rangle = 2,25E - 04$

функции полей напряжений и деформаций. Проведено исследование в зависимости от объемной доли включений. Корреляционные функции полей деформаций для структур с содержанием пор от 15 до 28 % можно аппроксимировать одним выражением с одинаковыми константами (рис. 7)

Выводы

Были рассмотрены частные случаи представительных объемов многокомпонентных композитов со случайным расположением эллипсоидальных включений. Разработана и реализована методика вычисления значений корреляционных функций полей деформирования в упругом и упругопластическом случае при различных условиях нагружения и физико-механических характеристиках компонентов композитов. Для получения значений условных и безусловных корреляционных функций полей напряжений и деформаций в представительных объемах и их компонентах использовано решение стохастической краевой задачи в полном корреляционном приближении. В качестве входных параметров для вычислений выступают константы, характеризующие свойства компонентов предста-

вительного объема, и входящие в функции Грина в подынтегральных выражениях, а также геометрические свойства компонентов и представительного объема, определяемые структурными моментными функциями.

Построены корреляционные функции напряжений и деформаций для разреженных структур со сферическими и эллипсоидальными полыми включениями. Проведено исследование и выбор аппроксимирующих зависимостей для полученных моментных функций. Полученные численные результаты могут использоваться в стохастических моделях для предсказания момента начала разрушения микроструктурных компонентов материала.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-41-590259 и 16-01-00682), а также гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (проект МК-5172.2015.1).

Библиографический список

1. Buryachenko V. Micromechanics of heterogeneous materials. – New York: Springer, 2007. – 686 p.
2. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites // International Journal of Engineering Science. – 2012. – Vol. 58. – P. 21–34. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.03.022
3. Mishnaevsky Jr. L., Derrien K., Baptiste D. Effect of microstructure of particle reinforced composites on the damage evolution: probabilistic and numerical analysis // Composites Science and Technology. – 2004. – Vol. 64. – Iss. 12. – P. 1805–1818. DOI: 10.1016/j.compscitech.2004.01.013
4. Yu M., Zhu P., Ma Y. Effects of particle clustering on the tensile properties and failure mechanisms of hollow spheres filled syntactic foams: A numerical investigation by microstructure based modeling // Materials & Design. – 2013. – Vol. 47. – P. 80–89. DOI: 10.1016/j.matdes.2012.12.004
5. Torquato S. Random heterogeneous materials, microstructure and macroscopic properties. – Springer, 2001. – 701 p.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
7. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1997. – 288 с.
8. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
9. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
10. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова думка, 1985. – 302 с.
11. Beran M. J. Statistical continuum theories. – New-York: Wiley. Intersci. Publ., 1968. – 493 p.
12. Болотин В.В., Москаленко В.К. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 106–111.
13. Хорошун Л.П. Методы случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 3–17.
14. Сараев Л.А., Глушечков В.С. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой. – Самара: Самарский университет, 2004. – 163 с.
15. Ghossein E., Lévesque M. Homogenization models for predicting local field statistics in ellipsoidal particles reinforced composites: Comparisons and validations // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol. 58. – P. 91–105. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.021

16. Jiao Y., Stillinger F. H., Torquato S. Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions. II. Algorithmic details and applications // *Physical Review*. – 2008. – Vol. 77. – No. 3. – P. 031135. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.031135
17. Computational microstructure characterization and reconstruction for stochastic multiscale material design / Yu. Liu, M. Steven Greene, W. Chen, D.A. Dikin, W.K. Liu // *Computer-Aided Design*. – 2013. – Vol. 45. – P. 65–76. DOI: 10.1016/j.cad.2012.03.007
18. Lee H., Gillman A.S., Matouš K. Computing overall elastic constants of polydisperse particulate composites from microtomographic data // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2011. – Vol. 59. – Iss. 9. – P. 1838–1857. DOI: 10.1016/j.jmps.2011.05.010
19. Берестова С.А., Хананов Ш.М. О некоторых путях становления структурно-феноменологических теорий в механике деформируемого твердого тела // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2010. – № 4. – С. 17–28. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.12
20. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомполитов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.
21. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 116 с.
22. Ташкинов М.А., Вильдеман В.Э., Михайлова Н.В. Метод последовательных приближений в стохастической краевой задаче теории упругости структурно-неоднородных сред // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2010. – Т. 16. – № 3. – С. 369–384.
23. Tashkinov M. Statistical characteristics of structural stochastic stress and strain fields in polydisperse heterogeneous solid media // *Computational Materials Science*. – 2014. – Vol. 94. – P. 44–50. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.050
24. Tashkinov M.A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials // Eds. V.V. Silberschmidt, V.P. Matveenko. *Mechanics of Advanced Materials*. – Springer. – P. 43–78. Doi: 10.1007/978-3-319-17118-0_3
25. Ташкинов М.А. Стохастическое моделирование процессов деформирования упругопластических композитов со случайным расположением включений с использованием моментных функций высоких порядков // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2014. – № 3. – С. 163–185. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.09
26. Ташкинов М.А. Моделирование упругого поведения многокомпонентных композиционных материалов с использованием приближенных решений стохастических краевых задач // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2015. – № 3. – С. 165–181. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.12
27. Ташкинов М.А. Статистические характеристики полей напряжений и деформаций в компонентах композитов со сферическими включениями при различных видах макрооднородного напряженно-деформированного состояния // *Решение инженерных задач на высокопроизводительном вычислительном комплексе Пермского национального исследовательского политехнического университета: моногр. / под ред. В.Я. Модорского*. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – С. 172–192.
28. Соколкин Ю.В., Паньков А.А. Сингулярное приближение метода периодических составляющих для дисперсий деформаций в фазах композита // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2001. – Т. 7, № 4. – С. 427–433.
29. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 116 с.

References

1. Buryachenko V. *Micromechanics of heterogeneous materials*. New York, Springer, 2007. 686 p.
2. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites. *International Journal of Engineering Science*, 2012, vol. 58, pp. 21-34. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.03.022.

3. Mishnaevsky Jr. L., Derrien K., Baptiste D. Effect of microstructure of particle reinforced composites on the damage evolution: probabilistic and numerical analysis. *Composites Science and Technology*, 2004, vol. 64, iss. 12, pp. 1805-1818. DOI: 10.1016/j.compscitech.2004.01.013.
4. Yu M., Zhu P., Ma Y. Effects of particle clustering on the tensile properties and failure mechanisms of hollow spheres filled syntactic foams: A numerical investigation by microstructure based modeling. *Materials & Design*, 2013, vol. 47, pp. 80-89. DOI: 10.1016/j.matdes.2012.12.004.
5. Torquato S. Random heterogenous materials, microstructure and macroscopic properties. Springer, 2001. 701 p.
6. Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnyh sred [Elasticity theory of microinhomogeneous media]. Moskow: Nauka, 1976. 400 p.
7. Vil'deman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mehanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnyh materialov [Mechanics of nonlinear deformation and failure of composite materials]. Moskow: Nauka, 1997, 288 p.
8. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statisticheskaya mekhanika kompozitnykh materialov [Statistical mechanics of composite materials]. Minsk: Belorusskii gosudarstvennii universitet, 1978, 208 p.
9. Lomakin V.A. Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemykh tel [Statistical problems of the mechanics of solid deformable bodies]. Moskow: Nauka, 1970, 139 p.
10. Vanin G.A. Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov [Micromechanics of composite materials]. Kiev: Naukova dumka, 1985, 302 p.
11. Beran M.J. Statistical continuum theories. New-York: Wiley. Intersci. Publ., 1968, 493 p.
12. Bolotin V.V., Moskalenko V.K. K raschetu makroskopicheskikh postoiannykh sil'no izotropnykh kompozitsionnykh materialov [Calculation of macroscopic permanent strongly isotropic composites]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1967, no. 3, pp. 106-111.
13. Khoroshun L.P. Metody sluchaynykh funktsiy v zadachah o makroskopicheskikh svoystvah mikroneodnorodnyh sred [Methods of random functions in the problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media]. *Prikladnaia mehanika*, 1978, vol. 14, no. 2, pp. 3-17.
14. Saraev L.A., Glushchenkov V.S. Neuprugie svoystva mnogokomponentnykh kompozitov so sluchainoi strukturoi [Inelastic properties of multi-component composites with random structure]. Samarskii universitet, 2004, 163 p.
15. Ghossein E., Lévesque M. Homogenization models for predicting local field statistics in ellipsoidal particles reinforced composites: Comparisons and validations. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 58, pp. 91-105. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.021
16. Jiao Y., Stillinger F. H., Torquato S. Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions. II. Algorithmic details and applications. *Physical Review*, 2008, vol. 77, no. 3, pp. 031135. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.031135
17. Liu Yu, Steven Greene M., Chen W., Dikin D.A., Liu W.K., Computational microstructure characterization and reconstruction for stochastic multiscale material design. *Computer-Aided Design*, 2013, vol. 45, pp. 65-76. DOI: 10.1016/j.cad.2012.03.007.
18. Lee H., Gillman A.S., Matouš K. Computing overall elastic constants of polydisperse particulate composites from microtomographic data. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59, pp. 1838-1857. DOI: 10.1016/j.jmps.2011.05.010
19. Berestova S.A., Khananov Sh.M. O nekotorykh putyakh stanovleniya strukturo-fenomonologicheskikh teoriy v mehanike deformiruemogo tverdogo tela [About several ways of establishment of structural-phenomenological theories in mechanics of solids]. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2010. no. 4. pp. 17-28. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.12
20. Pan'kov A.A. Statisticheskaya mehanika piezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites]. Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2009, 480 p.
21. Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika deformirovaniia i razrusheniia strukturo-neodnorodnykh tel [Mechanics of deformation and failure of structurally heterogeneous bodies]. Moskow: Nauka, 1984, 116 p.

22. Tashkinov M.A., Vildeman V.E., Mikhailova N.V. Method of successive approximations in a stochastic boundary-value problem in the elasticity theory of structurally heterogeneous media. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 21-37.
23. Tashkinov M.A. Statistical characteristics of structural stochastic stress and strain fields in polydisperse heterogeneous solid media. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 94, pp. 44–50. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.050.
24. Tashkinov M.A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials. *Mechanics of Advanced Material*, Springer, pp. 43-78. DOI: 10.1007/978-3-319-17118-0_3.
25. Tashkinov M.A. Stochastic modelling of deformation process in elastoplastic composites with randomly located inclusions using high order correlation functions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 163-185. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.09
26. Tashkinov M.A. Modeling of elastic behavior of multicomponent composite materials basing on the approximate solution of stochastic boundary value problems. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 3, pp. 165-181. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.12
27. Tashkinov M.A. Statisticheskie kharakteristiki polei napriazhenii i deformatsii v komponentakh kompozitov so sfericheskimi vklucheniiami pri razlichnykh vidakh makroodnorodnogo napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia [Statistical characteristics of stress and strain fields in the components of the composite with spherical inclusions subjected to various macroscopic stress-strain state]. *Modorskiy V.Ia. [et al.]. Reshenie inzhenernykh zadach na vysokoproizvoditel'nom vychislitel'nom komplekse Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta*. Permskii natsional'nyi issledovatel'skii politekhnicheskii universitet, 2014, pp. 172-192.
28. Sokolkin Yu.V., Pankov A.A. Singuliarnoe priblizhenie metoda periodicheskikh sostavliaiushchikh dlia dispersii deformatsii v fazakh kompozita [Singular approximation method of periodic components of strain in the phases of the composite dispersions]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2001, vol. 7, no. 4, pp. 427-433.
29. Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika deformirovaniia i razrusheniia strukturno neodnorodnykh tel* [Mechanics of deformation and rupture of structurally inhomogeneous bodies]. Moscow: Nauka, 1984, 116 p.